Text book on Compulsory Mathematics for High, Higher Secondary and Multipurpose Schools of West Bengal, written according to the new approved Syllabus of the Board of Secondary Education, West Bengal.

(Vide Notification No. Syl. 1/62 dated 30. 3. 62)

আবশ্যিক গণিত

(Complete Core Mathematics)

পাটীগণিত ও রাশি-বিজ্ঞান, বীজগণিত, জ্যামিতি ও পরি

[নবম-দশম শ্রেণীর পাঠ্য]

অধ্যাপক শ্রীসলিলরঞ্জন মাইতি, এম্. এস্-সি.,

সুরেন্দ্রনাথ কলেজ, কলিকাতা

ও

শ্রীভূপতিমোহন মু... াধ্যায়, বি. এস্-সি.,

লকাতা বেলেঘাটা দেশবন্ধু উচ্চমাধ্যমিক (...হুমুখী) বিদ্যালয়ের অন্যতম শিক্ষক

প্রণীত

মেদিনীপুর বুক ডিপো :: প্রকাশক ও পুস্তক বিক্রেতা

॥ দ্বিতীয় সংস্করণের ভূমিকা ॥

অতি অল্প সময়ের মধ্যে প্রথম সংস্করণের সমুদয় পুস্তক নিঃশেষিত হওয়ায় আমরা যথেষ্ট উৎসাহিত হইয়াছি। এই সংস্করণে পূর্বের সংস্করণের ভুল-ত্রুটিগুলির সংশোধন করিতে প্রয়াস পাইয়াছি এবং কিছু কিছু নূতন অঙ্কও সন্নিবেশিত করা হইয়াছে। আশা করি ছাত্র-ছাত্রীগণ ইহার দ্বারা উপকৃত হইবে এবং শ্রদ্ধেয় শিক্ষক-শিক্ষিকাগণ ইহা সহানুভূতির সংগে গ্রহণ করিবেন। ইতি—

কলিকাতা, বিনীত

১০ই ফেব্রুয়ারী, ১৯৬৩। গ্রন্থকারদ্বয়।

॥ প্রথম সংস্করণের ভূমিকা ॥

মধ্যশিক্ষা-পর্ষদের নূতন পাঠ্য-সূচী অনুযায়ী উচ্চ মাধ্যমিক ও বহুমুখী বিদ্যালয়ের নবম ও দশম শ্রেণীর ছাত্র-ছাত্রীদের এবং দশম শ্রেণাযুক্ত উচ্চ-বিদ্যালয়সমূহের স্কুল-ফাইন্যাল পরীক্ষার্থীদের জন্য **আবশ্যিক গণিত** পুস্তকখানি রচিত হইল। সুকুমারমতি ছাত্রদের বোধগম্য ভাষায় গণিতের তথ্যগুলির আলোচনা করা হইয়াছে। ব্যবহারিক জীবনে উহার উপযোগিতা এবং অঙ্কগুলির মধ্যে ক্রমপরম্পরা (Gradation)—এই উভয়দিকে দৃষ্টি রাখিয়া পুস্তকটি লিখিত হইয়াছে। নিছক পরীক্ষায় কৃতকার্য হওয়ার জন্য নহে, ছাত্র-ছাত্রীগণ যাহাতে নিজ নিজ স্বাধীন চিন্তা-শক্তি দ্বারা বিষয়টি আয়ত্ত করিতে পারে—সেইদিকে বিশেষ লক্ষ্য রাখিয়া প্রত্যেক অধ্যায়ের শেষে বিভিন্ন রকমের অঙ্কের সমাধান এবং যথেষ্ট সংখ্যক অঙ্ক কষিতে দেওয়া হইয়াছে। পুস্তকখানি শিক্ষক ও শিক্ষার্থীগণের সমাদর লাভ করিলে আমরা আমাদের শ্রম সার্থক মনে করিব। এই পুস্তক রচনা-কালে প্রত্যক্ষ এবং পরোক্ষভাবে যাঁহাদের অনুপ্রেরণা ও সহযোগিতা লাভ করিয়াছি, তাঁহাদেরকে আমাদের আন্তরিক ধন্যবাদ জানাই। অতি অল্প সময়ের মধ্যে পুস্তকখানি প্রকাশ করিবার গুরু-দায়িত্ব বহন করিয়া **'মেদিনীপুর বুক ডিপো'**-র কর্তৃপক্ষ আমাদের চিরকৃতজ্ঞ করিয়াছেন।

পুস্তকখানির উন্নতিসাধনের জন্য যে-কোন প্রকার সমালোচনা ধন্যবাদের সহিত গৃহীত হইবে। ইতি—

কলিকাতা, বিনীত

২রা ডিসেম্বর, ১৯৬২। গ্রন্থকারদ্বয়।

BOARD OF SECONDARY EDUCATION, WEST BENGAL

Notification No. SYL/1/62, dated the 30th March, 1962

Syllabus in Mathematics (Compulsory) for both Class IX X and Class XI Schools

[This course is intended to be mainly a revision of the work done in earlie classes and reoriented to the use of Mathematics in daily life. The teacher i only expected to define the various terms used in the course-content and sho their practical utility. It is not desired that he should burden the student wit too many mathematical details, methods and problems.]

Class IX

Unit 1.—ARITHMETIC.

All questions should be straightforward. Application of Algebra should b permitted in Arithmetic.

Revision of previous work—Vulgar and Decimal Fractions including Recurr ing Decimals: Extraction of Square Root; Square and Cubic measures; Simpl examples of Unitary Method including Time and Work, Time and Distance Percentages and easy cases of Simple Interest. Simple ideas of Approximatio (excluding Contracted Method and Infinite Series).

Compound Interest (calculation of interest only); Profit and Loss.

Unit 2.—ALGEBRA.

Revision of previous work—Directed Numbers; Fundamental Laws; Problem and Simple Equations; the following formulae with their applications:

$(a+b)^2$, $(a-b)^2$, a^2-b^2, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^3+b^3, a^3-b^3.

Easy Factors: H.C.F.; L.C.M.; Easy Fractions.

Simple Simultaneous Equations involving two unknowns; Problems leading t Equations, Simple and Simultaneous; Graphs of Simple Equations.

Unit 3.—GEOMETRY.

THEORETICAL

Revision of previous work as in the Board's Syllabus up to Class VIII.

To prove—

1. The opposite sides and angles of a parallelogram are equal, each diagonal divide the parallelogram into congruent triangles, and diagonals of a parallelogra bisect one another.
2. A quadrilateral is a parallelogram if—
   (i) both pairs of opposite sides are equal, or

(ii) both pairs of opposite angles are equal, or
(iii) one pair of opposite sides are equal and parallel, or
(iv) its diagonals bisect one another.

3. If there are three or more parallel straight lines, and the intercepts made by them on any one straight line that cuts them are equal, then the corresponding intercepts on any other straight line that cuts them are also equal.

The straight line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side and equal to half of it.

The straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and equal to half of it.

4. The formal proof should be preceded by practical work with squared paper in all the cases of this paragraph.
   (i) Parallelograms on the same base and between the same parallels (or, of the same altitude) are equal in area.
   (ii) Triangles on the same base (or on equal bases) and between the same parallels (or, of the same altitude) are equal in area.
   (iii) Equal triangles on the same base and on the same side of it are between the same parallels.
   (iv) If a triangle and a parallelogram stand on the same base and are between the same parallels, the area of the triangle is half that of the parallelogram.
   (v) In a right-angled triangle the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the sides containing the right angle.
   (vi) If a traingle is such that, the square on the side is equal to the sum of the squares on the other two sides, then the angle contained by these two sides is a right angle.

5. To prove—

The locus of points which are equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the two fixed points.

The locus of the points which are equidistant from two intersecting straight lines consists of the pair of straight lines which bisect the two angles between the two given lines.

6. (i) The perpendiculars drawn to the sides of a triangle from their middle points are concurrent.
   (ii) The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.
   (iii) The medians of a triangle are concurrent.

PRACTICAL

1. Revision of previous work.
   (i) Bisection of angles and straight lines.
   (ii) Construction of a perpendicular to a straight line.
   (iii) Construction of an angle equal to a given angle.
   (iv) Construction of parallels to given straight lines.

(v) Construction of triangles with given parts.

(vi) Division of a straight lines into a given number of equal parts.

2. Construction of quadrilaterals.
3. Construction of a parallelogram equal to a given triangle and having one of its angle equal to a given angle.
4. Construction of a triangle equal in area to a given rectilineal figure.

Class X

Unit 1.—ARITHMETIC.

All questions should be straightforward. Applications of Algebra should be permitted in Arithmetic.

Ratio and Proportion ; Simple examples on Unitary Method including direct Problems on Income Tax, Foreign Exchange and Draft ; Metric System dealing with topics of conversion.

(Adequate practice should be given in the use of the metric system of weights and measures including area and volume.)

Unit 2.—STATISTICS.

Frequency Tables ; Averages—Mean, Median and Mode ; Mean and Standard Deviations ; Graphical representations—Histogram, Frequency Polygon.

(All data used for imparting the above-mentioned rudiments of Statistics should be collected by the pupils themselves. Examples : Weights, heights, ages of pupils, their school attendance and progress in studies, etc.)

Unit 3.—ALGEBRA.

Simple quadratic equations as can be solved by easy factorisation.

Graphical solutions of Simultaneous Equations of the First Degree ; Ratio and Proportion.

Unit 4.—GEOMETRY.

THEORETICAL

1. To prove—

   There is one circle and, only one which passes through three given points not in a straight line.

2. Axioms—

   In equal circles (or, in the same circle) equal chords cut off equal arcs and subtend equal angles at the centre and conversely.

To prove—

3. A straight line, drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter, is at right angles to the chord and conversely.
4. In equal circles (or, in the same circle) equal chords are equidistant from the centres and conversely.

5. The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point on the remaining part of the circumference.
6. Angles in the same segment of a circle are equal, and if the line joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points lie on a circle.
7. The angle in a semicircle is a right angle ; the angle in a segment greater than a semicircle is less than a right angle ; and the angle in a segment less than a semicircle is greater than a right angle.
8. The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary and the converse.

The following theorems are also to be included :—

(i) The tangent at any point of a circle and its radius through the point are perpendicular to one another.

(ii) The two tangents to a circle from an external point are equal and they subtend equal angles at the centre.

(iii) If two circles touch, the point of contact lies in the straight line through the centres.

PRACTICAL

Simple cases of construction of Circles ; Construction of Designs with Geometrical Figures.

Unit 5. (a)—MENSURATION.

Area of a Triangle ; Circumference and Area of a Circle ; Surface and Volume of a Rectangular Parallelopiped, Cylinder and Sphere.

Unit 5. (b)—GEOMETRY OF SPHERE.

Elementary ideas of Geometry of a Sphere leading to the definition of Latitude, Longitude.

The following demonstrations and experiments are suggested for Class X in connection with the different units, as indicated below :—

1. DEMONSTRATION & EXPERIMENTS.

(Note—"D" stand for demonstration and "E" for experiments).

Unit 1.—ARITHMETIC.

D. Explanation of Specimen Cheques ; Drafts ; Bills ; Foreign Currencies etc.

Unit 2.—STATISTICS.

E. Determination of weights, heights and ages of pupils and their Graphical Representations.

Unit 4.—GEOMETRY.

D. Explanation of Models of Geometrical Figures.

Unit 5. (a)—MENSURATION.

E. Measurement of Areas of Rectangular Figures and Triangles ; Circumference and Area of a Circle.

Unit 5. (b)—GEOMETRY OF SPHERE.

D. Geometry of sphere.

পাটীগণিত

[নবম শ্রেণী]

[দশম শ্রেণী]

রাশি-বিজ্ঞান

বীজগণিত

[নবম শ্রেণী]

[দশম শ্রেণী]

জ্যামিতি

[নবম শ্রেণী]

দশম শ্রেণী

পরিমিতি

পাটীগণিত

(নবম শ্রেণী)

প্রথম অধ্যায়

1. *সামান্য ভগ্নাংশ*

(Vulgar Fractions)

[**পুনরালোচনা**]

ভগ্নাংশ সম্বন্ধে পূর্ববর্তী শ্রেণীসমূহে বিস্তারিত আলোচনা হইয়াছে; এখানে অতি সংক্ষেপে কতিপয় বিষয়ের পুনরালোচনা করা হইতেছে।

ভগ্নাংশের সরল:

ভগ্নাংশের সরলতা সম্পাদন করিবার সময় নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখিও—

(1) বিভিন্ন চিহ্নগুলির মধ্যে সর্বাগ্রে "এর", পরে ভাগ (÷), গুণ (×), যোগ (+) ও বিয়োগ (−) এর কাজ যথাক্রমে করিতে হয়। "এর" সংযুক্ত ভগ্নাংশকে একটিমাত্র রাশি মনে করিয়া "এর"-স্থলে গুণ (×) চিহ্নের ব্যবহার করিতে হয়।

(2) দুইটি ভগ্নাংশের মধ্যে কোন চিহ্ন না থাকিলে উহারা "এর" সংযুক্ত ভগ্নাংশ মনে করিয়া উহাদের উভয়কে গুণ করিতে হয়।

(3) বন্ধনীসমূহের মধ্যে সর্বাগ্রে রেখাবন্ধনী, পরে যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বন্ধনীর কাজ করিতে হয়। বন্ধনীর অন্তর্গত ভগ্নাংশ-সমন্বিত রাশিমালাকে একটিমাত্র ভগ্নাংশ বলিয়া মনে করিতে হয়।

(4) মিশ্র ভগ্নাংশ, জটিল ভগ্নাংশ ও ক্রমিক ভগ্নাংশকে একটিমাত্র রাশি মনে করিয়া উহাদিগকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করা নিয়ম।

(5) কোন ভগ্নাংশের লব ও হর একজাতীয় মিশ্ররাশি হইলেও উহা সামান্য ভগ্নাংশ; কিন্তু কেবলমাত্র লব মিশ্ররাশি হইলে উহা একটি তজ্জাতীয় মিশ্ররাশি।

নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর :—

উদাহরণ 1. সরল কর : $5\frac{1}{2}-[2\frac{1}{3}\div\{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}-\overline{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}})\}]$

রাশিমালা $=\frac{11}{2}-[\frac{7}{3}\div\{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}-\frac{1}{24})\}]$

$=\frac{11}{2}-[\frac{7}{3}\div\{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ এর $\frac{15}{24}\}]$

$=\frac{11}{2}-[\frac{7}{3}\div\{\frac{3}{4}-\frac{5}{16}\}]$

$=\frac{11}{2}-[\frac{7}{3}\div\frac{7}{16}]$

$=\frac{11}{2}-\frac{16}{3}=\frac{1}{6}$

[এখানে বন্ধনীর কাজগুলি যথারীতি করা হইয়াছে। $\frac{1}{2}$ এবং প্রথম বন্ধনীর মধ্যে কোন চিহ্ন না থাকায় $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{15}{24}$-কে গুণ করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 2. সরল কর : $\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}\times\dfrac{3}{\frac{5}{6}\text{ এর }\frac{3}{2}\div1\frac{1}{4}}$ [C. U. 1940]

রাশিমালা $=\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{\frac{1}{2}}}\times\dfrac{3}{\frac{5}{4}\div\frac{5}{4}}$

$=\dfrac{2}{1+2}\times\dfrac{3}{\frac{5}{4}\times\frac{4}{5}}$

$=\frac{2}{3}\times3=2$

[এখানে ক্রমিক ভগ্নাংশটি ও জটিল ভগ্নাংশটিকে প্রথমে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করা হইয়াছে; পরে যথারীতি উহাদিগকে গুণ করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 3. সরল কর :

$\dfrac{3\frac{3}{4}+7\frac{5}{12}}{8\frac{5}{6}-4\frac{2}{3}}-4\frac{1}{5}\div\dfrac{2\frac{3}{4}}{1\frac{5}{9}}$ এর $\dfrac{4\text{ টা. }20\text{ ন.প.}}{2\text{ টা. }97\text{ ন.প.}}$

রাশিমালা $=\dfrac{\frac{15}{4}+\frac{89}{12}}{\frac{53}{6}-\frac{14}{3}}-\frac{21}{5}\div\dfrac{\frac{11}{4}}{\frac{14}{9}}$ এর $\dfrac{420\text{ ন.প.}}{297\text{ ন.প.}}$

$=\dfrac{\frac{134}{12}}{\frac{25}{6}}-\frac{21}{5}\div(\frac{11}{4}\times\frac{9}{14})$ এর $\frac{140}{99}$

$=(\frac{134}{12}\times\frac{6}{25})-\frac{21}{5}\div\frac{99}{56}$ এর $\frac{140}{99}$

$=\frac{67}{25}-\frac{21}{5}\div\frac{5}{2}$

$=\frac{67}{25}-\frac{42}{25}$

$=1$

[এখানে মিশ্ররাশি দুইটিকে প্রথমে নয়া পয়সায় পরিণত করিয়া একটি সামান্য ভগ্নাংশ পাওয়া গিয়াছে। অন্যান্য ভগ্নাংশগুলিকেও সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া যথারীতি চিহ্নগুলির কাজ করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 4. মান নির্ণয় কর :

3 কি. গ্রা. 150 গ্রা. $\times\dfrac{\frac{2}{7}\div4\frac{2}{7}\times28}{\frac{2}{3}\div\frac{5}{6}}-1$ কি. গ্রা. 500 গ্রা. $\times\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{3}}}$

$$\text{রাশিমালা} = 3\tfrac{150}{1000} \text{ কি. গ্রা.} \times \frac{\frac{2}{7} \div \frac{14}{3} \times 28}{\frac{2}{3} \times \frac{6}{5}} - 1\tfrac{500}{1000} \text{ কি. গ্রা.} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{\frac{4}{3}}}$$

$$= 3\tfrac{3}{20} \text{ কি. গ্রা.} \times \frac{\frac{2}{7} \times \frac{3}{14} \times 28}{\frac{4}{5}} - 1\tfrac{1}{2} \text{ কি. গ্রা.} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= \tfrac{63}{20} \text{ কি. গ্রা.} \times \left(\tfrac{2}{7} \times \tfrac{3}{14} \times 28 \times \tfrac{5}{4}\right) - \tfrac{3}{2} \text{ কি. গ্রা.} \times \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$= \tfrac{63}{20} \text{ কি. গ্রা.} \times \tfrac{15}{7} - \tfrac{3}{2} \text{ কি. গ্রা.} \times 4$$

$$= \tfrac{27}{4} \text{ কি. গ্রা.} - 6 \text{ কি. গ্রা.} = \tfrac{3}{4} \text{ কি. গ্রা.} = 750 \text{ গ্রাম।}$$

[এখানে মিশ্ররাশিগুলিকে একজাতীয় করা হইয়াছে; পরে যথারীতি চিহ্ন অনুযায়ী কাজ করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 5. এক ব্যক্তি $4\frac{1}{2}$ কিলোমিটার যাইবার পর দেখিল যে, সে গন্তব্য পথের $\dfrac{2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} \text{ এর } 2\frac{1}{4} + 1\frac{7}{9}}{(2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}) \text{ এর } (2\frac{1}{4} + 1\frac{7}{9})}$ এর $\dfrac{\frac{2}{11} + \frac{1}{2}}{\frac{4}{7} - \frac{1}{11}}$ অংশ অতিক্রম করিয়াছে। তাহাকে আর কত পথ যাইতে হইবে?

$$\text{পথের অতিক্রান্ত অংশ} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{4}{3} \text{ এর } \frac{9}{4} + \frac{16}{9}}{(\frac{5}{2} - \frac{4}{3}) \text{ এর } (\frac{9}{4} + \frac{16}{9})} \text{ এর } \frac{\frac{15}{22}}{\frac{23}{77}}$$

$$= \frac{\frac{5}{2} - 3 + \frac{16}{9}}{\frac{7}{6} \text{ এর } \frac{145}{36}} \text{ এর } \left(\tfrac{15}{22} \times \tfrac{77}{23}\right) = \frac{\frac{23}{18}}{\frac{7 \times 145}{6 \times 36}} \text{ এর } \frac{15 \times 77}{22 \times 23}$$

$$= \tfrac{23}{18} \times \tfrac{6 \times 36}{7 \times 145} \times \tfrac{15 \times 77}{22 \times 23} = \tfrac{18}{29}$$

প্রশ্নানুসারে, গন্তব্য পথের $\frac{18}{29}$ অংশ $4\frac{1}{2}$ কি. মি.;

$\therefore$ গন্তব্য পথ $= \frac{9}{2}$ কি. মি. $\times \frac{29}{18} = \frac{29}{4}$ কি. মি.।

অতএব, অবশিষ্ট পথ $= (\frac{29}{4} - \frac{9}{2})$ কি. মি. $= \frac{11}{4}$ কি. মি. $= 2\frac{3}{4}$ কি. মি.।

উদাহরণ 6. 248 টাকা A ও B-কে এমনভাবে ভাগ করিয়া দাও যেন A-র অংশের $\frac{3}{4}$, B-এর অংশের $\frac{4}{5}$-এর সমান হয়।

A-র অংশের $\frac{3}{4}$ = B-এর অংশের $\frac{4}{5}$

$\therefore$ A-র অংশ = B-এর অংশের $(\frac{4}{5} \times \frac{4}{3})$ বা $\frac{16}{15}$

$\therefore$ A-র অংশ 1 হইলে B-এর অংশ $= 1 \div \frac{16}{15} = \frac{15}{16}$

$\therefore$ A-র অংশ $= 248$ টাকা $\div (1 + \frac{15}{16})$

$= 248$ টাকা $\times \frac{16}{31}$

$= 128$ টাকা।

$\therefore$ B-এর অংশ $= (248 - 128)$ বা 120 টাকা।

ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. ঃ

(1) কতিপয় ভগ্নাংশের গ. সা. গু. $= \dfrac{\text{উহাদের লবগুলির গ. সা. গু.}}{\text{উহাদের হরগুলির ল. সা. গু.}}$

(2) কতিপয় ভগ্নাংশের ল. সা. গু. $= \dfrac{\text{উহাদের লবগুলির ল. সা. গু.}}{\text{উহাদের হরগুলির গ. সা. গু.}}$

ভগ্নাংশের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করিবার কালে উহাদিগকে সর্বদা লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিয়া লইতে হয়।

উদাহরণ 7. যে বৃহত্তম মাপকাঠি দ্বারা $5\frac{5}{8}$ মিটার ও $9\frac{3}{4}$ মিটার দৈর্ঘ্য মাপা যায়, সেই মাপকাঠির দৈর্ঘ্য কত ?

বৃহত্তম মাপকাঠিটির দৈর্ঘ্য $5\frac{5}{8}$ মিটার ও $9\frac{3}{4}$ মিটারের গ. সা. গু. হইবে।

$5\frac{5}{8} = \frac{45}{8}$ এবং $9\frac{3}{4} = \frac{39}{4}$

এখন, $5\frac{5}{8}$ ও $9\frac{3}{4}$-এর গ. সা. গু. $= \dfrac{\text{45 ও 39-এর গ. সা. গু}}{\text{8 ও 4-এর ল. সা. গু.}} = \frac{3}{8}$

$\therefore$ মাপকাঠিটির নির্ণেয় দৈর্ঘ্য $= \frac{3}{8}$ মিটার।

উদাহরণ 8. চারিটি ঘণ্টা একসঙ্গে বাজিয়া অতঃপর যথাক্রমে $1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড, 2 সেকেণ্ড, $2\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড ও $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড অন্তর অন্তর বাজিতে লাগিল। 6 ঘণ্টায় উহারা কতবার একত্রে বাজিবে ?

ঘণ্টা চারিটি যখন পুনরায় একসঙ্গে বাজিবে সেই সময় $1\frac{1}{2}$ সেকেণ্ড, 2 সেকেণ্ড, $2\frac{1}{4}$ সেকেণ্ড ও $2\frac{1}{2}$ সেকেণ্ডের ল. সা. গু. হইবে।

এখন, $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $2 = \frac{2}{1}$, $2\frac{1}{4} = \frac{9}{4}$ এবং $2\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

উহাদের ল. সা. গু. $= \dfrac{\text{3, 2, 9 এবং 5-এর ল. সা. গু}}{\text{2, 1, 4 এবং 2-এর গ. সা. গু.}} = \frac{90}{1}$

$\therefore$ ঘণ্টা চারিটি 90 মিনিট বা $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা অন্তর অন্তর একত্রে বাজিবে।

$\therefore$ 6 ঘণ্টায় উহারা একত্রে বাজিবে (6 ঘণ্টা $\div 1\frac{1}{2}$ ঘণ্টা) বা 4 বার।

প্রশ্নমালা 1

সরল কর :

1. $4\frac{2}{7}\times 4\frac{2}{3}$ এর $\frac{1}{9}\div\frac{2}{3}$

2. $5\frac{1}{3}\div\frac{2}{3}$ এর $\frac{9}{10}\times(\frac{3}{8}-\frac{5}{16})$

3. $3\frac{7}{11}\div(4\frac{2}{7}\div 10\frac{5}{7})\div(7\frac{1}{2}\div\frac{77}{540})$

4. $\frac{133}{209}\times\frac{38}{49}\div 1\frac{17}{49}$ এর $\frac{7}{11}$

5. $\frac{2}{5}(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6})+(2-\frac{1}{8})(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$

6. $2-[1\frac{1}{2}\{7\frac{2}{3}-\frac{5}{8}\div(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6})\}]$

7. $8-8\times\dfrac{2\frac{1}{5}-1\frac{2}{7}}{2-\dfrac{1}{6-\frac{1}{6}}}$

*8. $\frac{2}{3}\div\frac{4}{9}$ এর $7\frac{1}{2}+999\frac{44}{45}\times 99$ [C. U. 1942]

9. $\dfrac{6\frac{7}{8}+3\frac{4}{5}}{6\frac{7}{8}-3\frac{4}{5}}\div 10\frac{17}{41}$ এর $\frac{1}{3}$

10. $\dfrac{2\frac{3}{4}-3\frac{4}{5}+4\frac{5}{6}}{7\frac{11}{30}\div 1\frac{1}{3}\text{ এর } 1\frac{1}{2}}$ এর $\frac{1}{24}$

11. $\dfrac{(3\frac{1}{3}-2\frac{1}{2})\div\frac{5}{8}\text{ এর }\frac{3}{4}}{2\frac{2}{3}\div(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})}$ এর 6 টা. 32 ন. প.

12. $\dfrac{2\frac{13}{16}\text{ এর }\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}\text{ এর }\frac{5}{18}\div 5\frac{1}{6}}\div 1\frac{15}{16}$ এর $\frac{1}{5}$

13. $\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ এর $\dfrac{2}{3+\frac{1}{2}}$ এর $\dfrac{4\frac{2}{3}}{4}\div\dfrac{36}{25}+\dfrac{77}{189}$

*14. $\dfrac{3\frac{1}{5}+2\frac{7}{11}}{4\frac{7}{10}-1\frac{17}{22}}\div\dfrac{5}{1+\dfrac{7}{8+\frac{5}{2}}}-4\dfrac{5}{7\frac{2}{3}}$ [C. U. 1933]

15. $\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}$ এর $\frac{3}{4}\div\frac{4}{5}\times\dfrac{\text{8 কি. গ্রা. 400 গ্রা.}}{\text{3 কি. গ্রা. 500 গ্রা.}}$

16. $\dfrac{3\frac{3}{4}\div 2\frac{2}{3}\text{ এর }\frac{3}{4}}{3\frac{3}{4}\div 2\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}}+\dfrac{2\frac{2}{3}\text{ এর }\frac{1}{6}}{3\text{ এর }\frac{3}{4}}$

17. $\dfrac{2\frac{3}{4}}{5\frac{1}{6}}$ এর $\frac{3}{4}(\frac{7}{9}+\frac{1}{12})\div\dfrac{5\frac{7}{8}}{7\frac{1}{4}}$ এর $\dfrac{\text{2 ঘ. 25 মি.}}{\text{3 ঘ. 55 মি.}}$

18. $\dfrac{5\frac{5}{8}}{6\frac{3}{7}}$ এর $\dfrac{6\frac{7}{11}}{9\frac{1}{8}}\div\frac{8}{9}(2\frac{3}{11}+\frac{13}{22})$ এর $\dfrac{\text{7 মি. 50 সে. মি.}}{\text{12 মি. 50 সে. মি.}}$

19. $\dfrac{1}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{3}{4+\dfrac{5}{6\frac{1}{3}}}}}+\frac{3}{2}\div\frac{5}{6}$ এর $\frac{3}{2}\times 1\frac{1}{4}-\frac{1}{11}(10+\frac{13}{30})$

20. $15-\dfrac{2}{4-\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}}+\dfrac{(\frac{3}{5}-\frac{1}{6})\div\frac{1}{20}}{3\frac{1}{4}\times1\frac{1}{2}\div7\frac{1}{4}\text{ এর }4\frac{1}{2}}$ [W. B. S. B. 1957]

21. $\left\{2\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\text{ এর }\dfrac{1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}}-1\frac{6}{7}\right\}\div\dfrac{8\text{ টা. }25\text{ ন. প.}}{10\text{ টা. }50\text{ ন. প.}}\times675$ মিটার

22. $\frac{3}{4}$ অংশ জলপূর্ণ চৌবাচ্চা হইতে 16 গ্যালন জল তুলিয়া লইবার পর দেখা গেল, ঐ চৌবাচ্চার অর্ধাংশ পূর্ণ হইয়াও 25 গ্যালন জল বেশী আছে। ঐ চৌবাচ্চায় মোট কত গ্যালন জল ধরে ? [G. U. 1948]

23. জলপূর্ণ একটি পাত্রের ওজন 28 কি. গ্রা.; যখন পাত্রের এক-চতুর্থাংশ জলপূর্ণ থাকে তখন উহার ওজন 19 কি. গ্রা.। যখন পাত্রের দুই-তৃতীয়াংশ জলপূর্ণ থাকিবে, তখন তাহার ওজন কত ?

24. এক ব্যক্তি তাহার অর্থের $\frac{1}{2}$ অংশ দান করিলেন, অবশিষ্টের $\frac{1}{3}$ অংশ স্ত্রীকে দিয়া যাহা অবশিষ্ট রহিল তাহা চারি পুত্রের মধ্যে সমান অংশে ভাগ করিয়া দিলেন। যদি স্ত্রী অপেক্ষা প্রত্যেক পুত্র 600 টাকা কম পায়, তবে প্রত্যেক পুত্র কত পাইবে ?

25. পাঁচ পুত্র মিলিয়া পিতার ঋণ পরিশোধ করিল। জ্যেষ্ঠ পুত্র $\frac{1}{3}$ অংশ এবং অন্যান্য পুত্র অবশিষ্ট ঋণ সমান অংশে পরিশোধ করিল। ইহাতে জ্যেষ্ঠ পুত্র অপেক্ষা অন্যান্য পুত্রকে 840 টাকা কম দিতে হইল। পিতৃ-ঋণের পরিমাণ কত ?

26. A, B ও C-কে 445 টা. 50 ন. প. এমন ভাবে ভাগ করিয়া দাও যেন, A যত পায়, B তাহার $\frac{1}{2}$ অংশ পায় এবং A ও B একত্রে যত পায়, C তাহার $\frac{1}{4}$ অংশ পায়।

*27. একটি বালকের জামা, জুতা ও কাপড়ের মূল্য 22 টা. 44 ন. প.; কাপড়ের মূল্য, জামার মূল্যের $\frac{7}{12}$ অংশ এবং জুতার মূল্য, কাপড়ের মূল্যের $\frac{5}{7}$ অংশ। জামা, জুতা ও কাপড়ের মূল্য পৃথকভাবে নির্ণয় কর।

28. এক ব্যক্তি তাহার সম্পত্তির $\frac{1}{3}$ অংশ স্ত্রীকে এবং অবশিষ্টাংশ সন্তানদিগকে সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়ায় প্রত্যেক সন্তান স্ত্রীর $\frac{1}{3}$ অংশ টাকা পাইল। ঐ ব্যক্তির সন্তান কয়টি ?

29. কোন্ ক্ষুদ্রতম অখণ্ড সংখ্যা $1\frac{5}{21}$ এবং $1\frac{6}{7}$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য ?

30. কোন্ বৃহত্তম ভগ্নাংশ দ্বারা $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ ও $\frac{8}{9}$ নিঃশেষে বিভাজ্য ? কোন্ ক্ষুদ্রতম পূর্ণ সংখ্যা উক্ত ভগ্নাংশগুলি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য ? [D. B. 1934]

2. দশমিক ভগ্নাংশ

(Decimal Fractions)

[পুনরালোচনা]

দশমিক ভগ্নাংশ সম্পর্কে পূর্ববর্তী শ্রেণীসমূহে বিস্তারিত আলোচনা করা হইয়াছে। এখানে অতি সংক্ষেপে কতিপয় বিষয়ের পুনরালোচনা করা হইতেছে।

সামান্য ভগ্নাংশকে দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তন ঃ

সামান্য ভগ্নাংশের লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া উহাকে তুল্যমান দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়।

উদাহরণ 1. $3\frac{5}{8}$-কে তুল্যমান দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত কর।

$3\frac{5}{8}=3+\frac{5}{8}$

```
8)50(·625
  48
   20
   16
    40
    40
```

∴ নির্ণেয় দশমিক ভগ্নাংশ $=3+\cdot655=3\cdot625$

[পূর্ণসংখ্যাকে পৃথক রাখিয়া ভগ্নাংশটিকে দশমিকে পরিবর্তিত করা হইয়াছে এবং পরে উহাকে পূর্ণ-সংখ্যার সহিত যোগ করা হইয়াছে।]

দশমিক ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিবর্তন ঃ

দশমিক ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিতে হইলে উহার দশমিক বিন্দু পরিত্যাগ করিয়া যে সংখ্যাটি পাওয়া যায়, তাহাকে লব এবং দশমিক বিন্দুর পরে যত ঘর অঙ্ক থাকে, 1-এর পর তত ঘর শূন্য বসাইয়া যে সংখ্যা হয়, তাহাকে হর করিয়া বসাইলেই দশমিক ভগ্নাংশটি সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত হইবে।

উদাহরণ 2. 3·0625-কে তুল্যমান ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

$3\cdot0625=3+\cdot0625$

$\cdot0625=\frac{625}{10000}=\frac{1}{16}$

নির্ণেয় ভগ্নাংশ

$=3+\frac{1}{16}=3\frac{1}{16}$

পূর্ণসংখ্যাকে পৃথক রাখিয়া দশমিক ভগ্নাংশটিকে সামান্য ভগ্নাংশে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করা হইয়াছে এবং পরে এই ভগ্নাংশটি পূর্ণসংখ্যার সহিত যোগ করা হইয়াছে।]

আবৃত্ত দশমিক (Recurring Decimal) ঃ

কোন কোন সামান্য ভগ্নাংশকে দশমিক ভগ্নাংশে পরিণত করিবার সময় হরের দ্বারা লবকে ভাগ করিলে ভাগ-ক্রিয়া কখনও শেষ হয় না।

যে সামান্য ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিণত করিতে হইলে দশমিক বিন্দুর পর এক বা তদধিক স্থান পর্যন্ত ভাগফল পাওয়া যায় এবং ভাগশেষ থাকে না, তাহাকে **সসীম** (Terminating) এবং যদি কিছু-না-কিছু ভাগশেষ থাকিয়া যায়, তাহাকে **অসীম** (Non-terminating) দশমিক ভগ্নাংশ বলে। $\frac{21}{24} = \cdot875$; সুতরাং $\frac{21}{24}$-এর তুল্যমান দশমিক ভগ্নাংশটি সসীম ; কিন্তু $\frac{5}{11} = \cdot4545\cdots$; সুতরাং ইহা অসীম। অসীম দশমিক ভগ্নাংশে যদি এক বা একাধিক অঙ্ক পুনঃ পুনঃ বসে তবে সেই দশমিককে **পৌনঃপুনিক** বা **আবৃত্ত দশমিক** (Recurring Decimal) বলে।

আবৃত্ত দশমিকাংশে যদি একটি অঙ্ক বারংবার আসে তাহা হইলে উক্ত অঙ্কের মাথায় আবৃত্ত বিন্দু বসাইতে হয় এবং যদি একাধিক অঙ্ক বারংবার আসিতে থাকে তাহা হইলে ঐ অঙ্কসমূহের প্রথম ও শেষটির মাথার উপর আবৃত্ত বিন্দু বসাইতে হয়। যথা, $\cdot222\cdots$ না লিখিয়া $\cdot\dot{2}$ এবং $\cdot142857142857142857\cdots$ না লিখিয়া $\cdot\dot{1}4285\dot{7}$ লিখা হয়। শেষোক্ত ক্ষেত্রে '142857' বারংবার আসিতেছে বলিয়া প্রথম অঙ্ক 1-এর এবং শেষ অঙ্ক 7-এর মাথার উপর আবৃত্ত বিন্দু বসানো হইয়াছে।

আবৃত্ত দশমিকের যে অংশ বারংবার আসে তাহাকে **আবৃত্ত** (Recurring) এবং দশমিক বিন্দুর পর যে অংশ বারংবার আসে না, তাহাকে **তদবস্থ** বা **অনাবৃত্ত অংশ** (Non-recurring) বলে। যথা, $\cdot35\dot{2}\dot{7}$—এই দশমিক ভগ্নাংশের 27 অংশটি আবৃত্ত এবং 35 অংশটি অনাবৃত্ত।

যদি কোন দশমিক ভগ্নাংশে অনাবৃত্ত অংশ না থাকে, তাহা হইলে সেই দশমিককে **বিশুদ্ধ আবৃত্ত** (Pure Recurring) এবং যদি কোন দশমিক ভগ্নাংশে অনাবৃত্ত ও আবৃত্ত অংশ—উভয়ই থাকে, তাহা হইলে সেই দশমিককে **মিশ্র আবৃত্ত** (Mixed Recurring) দশমিক বলে। যথা, $\cdot\dot{3}\dot{7}$ বিশুদ্ধ আবৃত্ত দশমিক এবং $\cdot54\dot{2}\dot{7}$ মিশ্র আবৃত্ত দশমিক।

আবৃত্ত দশমিক ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিবার পদ্ধতি

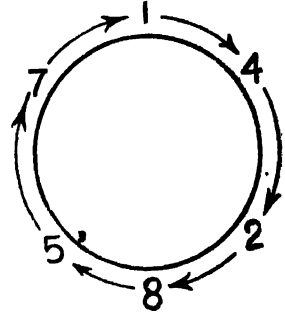
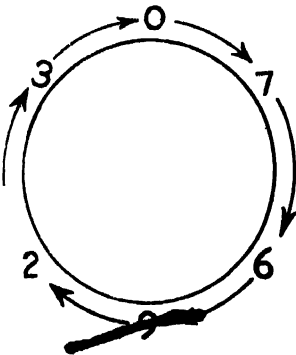
আবৃত্ত দশমিককে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিতে হইলে দশমিক ও আবৃত্ত বিন্দুগুলি তুলিয়া দিয়া যে সংখ্যা হয় তাহা হইতে পূর্ণসংখ্যাযুক্ত তদবস্থ অংশ বিয়োগ

করিয়া ঐ বিয়োগফলকে লব এবং অনাবৃত্তাংশে যত ঘর অঙ্ক থাকে তত ঘর 9 বসাইয়া প্রাপ্ত সংখ্যার ডানদিকে তদবস্থ অংশে যত ঘর অঙ্ক থাকে তত ঘর শূন্য বসাইয়া যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তাহাকে হর করিতে হয়। যেমন,—

$\cdot\dot{3}\dot{5} = \frac{35}{99}$; $\cdot 02\dot{5}\dot{7} = \frac{257-2}{9900} = \frac{255}{9900}$; $32\cdot 1\dot{4}\dot{5} = \frac{32145-321}{990} = \frac{31824}{990}$

দুইটি বিশেষ ক্ষেত্র ঃ

(1) $\cdot\dot{1}4285\dot{7} = \frac{1}{7}$, $\cdot\dot{2}8571\dot{4} = \frac{2}{7}$, $\cdot\dot{4}2857\dot{1} = \frac{3}{7}$, $\cdot\dot{5}7142\dot{8} = \frac{4}{7}$, $\cdot\dot{7}1428\dot{5} = \frac{5}{7}$ এবং $\cdot\dot{8}5714\dot{2} = \frac{6}{7}$

উপরের তালিকাটি হইতে একটি বিষয় লক্ষ্য করিয়া দেখ,—যে সকল ভগ্নাংশের হর 7, তাহাদের তুল্যমান দশমিকগুলি বিশুদ্ধ আবৃত্ত এবং সকলগুলিতেই 1, 4, 2, 8, 5 ও 7—এই কয়টি অঙ্ক আছে। যদি এই অঙ্কগুলি একটি বৃত্তের চতুর্দিকে স্থাপন করা যায়, এবং চক্রাকারে 1, 2, 4, 5, 7 ও 8 হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটা যে-দিকে আবর্তন করে সেইরূপে ঘুরিয়া পড়া যায়, তবে যথাক্রমে $\frac{1}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$ ও $\frac{6}{7}$-এর তুল্যমান দশমিক পাওয়া যায়। দশমিক বিন্দুর পর ঐ অঙ্কগুলি বসাইয়া প্রথম ও শেষ অঙ্কের মাথার উপর আবৃত্ত বিন্দু বসাইতে হয়।

(2) যে সকল ভগ্নাংশের হর 13, তাহাদের তুল্যমান দশমিকগুলিও বিশুদ্ধ আবৃত্ত। নিম্নের তালিকা দুইটি দেখিলেই ইহা বুঝিতে পারিবে।

(প্রথম শ্রেণী)

$\frac{1}{13} = \cdot\dot{0}7692\dot{3}$

$\frac{3}{13} = \cdot\dot{2}3076\dot{9}$

$\frac{4}{13} = \cdot\dot{3}0769\dot{2}$

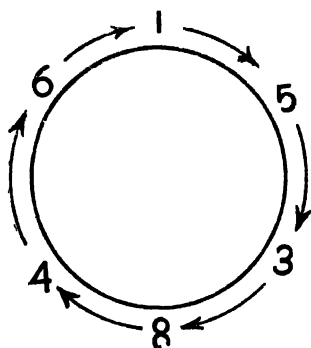
$\frac{9}{13} = \cdot\dot{6}9230\dot{7}$

$\frac{10}{13} = \cdot\dot{7}6923\dot{0}$

$\frac{12}{13} = \cdot\dot{9}2307\dot{6}$

প্রথম শ্রেণীতে $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{10}{13}$ এবং $\frac{12}{13}$ আছে। ইহাদের তুল্যমান দশমিকের প্রত্যেকটিতে 0, 7, 6, 9, 2 ও 3—এই কয়টি অঙ্ক আছে। ইহাদিগকে

একটি বৃত্তের চারিদিকে বসাইলে 0, 2, 3, 6, 7 এবং 9 হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটা যে-দিকে আবর্তন করে সেইরূপে ঘুরিয়া পড়িয়া গেলে যথাক্রমে $\frac{1}{13}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{9}{13}$, $\frac{10}{13}$ ও $\frac{12}{13}$-এর তুল্যমান দশমিক ভগ্নাংশ পাওয়া যায়।

দ্বিতীয় শ্রেণীতে $\frac{2}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{13}$ ও $\frac{11}{13}$ আছে। ইহাদের তুল্যমান দশমিকের প্রত্যেকটিতে 1, 5, 3, 8, 4 ও 6—এই কয়টি অঙ্ক আছে। ইহাদিগকে

একটি বৃত্তের চারিদিকে বসাইলে এবং 1, 3, 4, 5, 6 এবং 8 হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটা যে-দিকে আবর্তন করে সেইরূপে ঘুরিয়া পড়িয়া গেলে যথাক্রমে $\frac{2}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{6}{13}$, $\frac{7}{13}$, $\frac{8}{13}$ ও $\frac{11}{13}$-এর তুল্যমান দশমিক ভগ্নাংশ পাওয়া যায়।

দশমিক ভগ্নাংশের সরল :

দশমিক ভগ্নাংশের সরল অঙ্ক সামান্য ভগ্নাংশের সরলের ন্যায়ই সমাধান করিতে হয়। মনে রাখিও, দশমিক ভগ্নাংশের সরল অঙ্কের উত্তর কখনও সামান্য ভগ্নাংশে লেখা হয় না। এক্ষেত্রে সামান্য ভগ্নাংশকে পুনরায় দশমিকে পরিবর্তিত করিতে হয়।

নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর :—

উদাহরণ 3. সরল কর : $\dfrac{\cdot 1 \times \cdot 1 \times \cdot 1 + \cdot 01 \times \cdot 01 \times \cdot 01}{\cdot 2 \times \cdot 2 \times \cdot 2 + \cdot 02 \times \cdot 02 \times \cdot 02}$

$$\text{রাশিমালা} = \frac{\cdot 001 + \cdot 000001}{\cdot 008 + \cdot 000008} = \frac{(\cdot 001 + \cdot 000001)}{8\,(\cdot 001 + \cdot 000001)}$$

$$= \frac{1}{8} = \cdot 125$$

[এখানে অঙ্কটি কষিতে একটি বিশেষ কৌশল অবলম্বন করা হইয়াছে। অঙ্কের উত্তর দশমিক ভগ্নাংশে পরিবর্তিত করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 4. সরল কর : $\dfrac{\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \text{ এর } \frac{5}{6}}{\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}} \div \dfrac{\cdot 0\dot{3}}{\cdot 0\dot{5}}\left(2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}\right) \text{ এর } \dfrac{\text{টা. } 5\cdot 80}{\text{টা. } 11\cdot 60}$

$$\text{রাশিমালা} = \frac{\frac{2}{3} \div \frac{3\times 5}{4\times 6}}{\frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{6}} \div \frac{\frac{3}{90}}{\frac{5}{90}}\left(2+\frac{1}{\frac{5}{2}}\right) \text{ এর } \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \times \frac{4\times 6}{3\times 5}}{\frac{20}{27}} \div \frac{3}{5}\left(2+\frac{2}{5}\right) \text{ এর } \frac{1}{2} = \frac{\frac{16}{15}}{\frac{20}{27}} \div \left(\frac{3}{5} \times \frac{12}{5}\right) \text{ এর } \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{16}{15} \times \frac{27}{20}\right) \div \frac{36}{25} \text{ এর } \frac{1}{2}$$

$$= \frac{36}{25} \div \frac{18}{25}$$

$$= \frac{36}{25} \times \frac{25}{18} = 2$$

[দশমিক ভগ্নাংশকে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া অঙ্কটি যথারীতি করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$\frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{2}{3}}} \div \frac{1\cdot 1\dot{3}}{2} \times \frac{\cdot 14 \times \cdot 12 \times \cdot 02 + \cdot 04 \times \cdot 16 \times \cdot 01}{\cdot 01 \times \cdot 2 \times \cdot 1}$$

$$\text{রাশিমালা} = \frac{1}{1+\frac{3}{17}} \div \frac{\frac{102}{90}}{2} \times \frac{(\cdot 14 \times \cdot 12 \times \cdot 02 + \cdot 04 \times \cdot 16 \times \cdot 01) \times 1000000}{(\cdot 01 \times \cdot 2 \times \cdot 1) \times 1000000}$$

$$= \frac{17}{20} \div \frac{51}{90} \times \frac{14\times 12\times 2+4\times 16\times 1}{1\times 20\times 10}$$

$$= \frac{17}{20} \times \frac{90}{51} \times \frac{400}{200} = 3$$

[অঙ্কটিতে দশমিক ভগ্নাংশকে কৌশলে সামান্য ভগ্নাংশে পরিণত করা হইয়াছে। মনে রাখিও, ভগ্নাংশের হর ও লব—উভয়কে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে ভগ্নাংশটির মানের কোন তারতম্য হয় না।]

উদাহরণ 6. 1 টা. 90 ন.প.-কে 2 টা. 40 ন.প.-এর দশমিকে প্রকাশ কর।

$$\text{নির্ণেয় দশমিক} = \frac{1 \text{ টা. } 90 \text{ ন.প.}}{2 \text{ টা. } 40 \text{ ন.প.}} = \frac{190 \text{ ন.প.}}{240 \text{ ন.প.}} = \cdot 791\dot{6}$$

[লব এবং হরকে একজাতীয় করিয়া হর দ্বারা লবকে ভাগ করা হইয়াছে।]

দশমিকের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. :

দশমিকের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে সর্বাগ্রে প্রদত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলিকে 10-এর একই ঘাত দ্বারা গুণ করিয়া অখণ্ড সংখ্যায় পরিণত করিয়া লইতে হয় এবং পরে প্রাপ্ত অখণ্ড সংখ্যাগুলির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-কে গুণকরূপে গৃহীত 10-এর ঘাতটি দ্বারা ভাগ করিতে হয়।

উদাহরণ 7. $1\cdot2$, $\cdot06$ ও $\cdot04$-এর গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$1\cdot2 \times 100 = 120$, $\cdot06 \times 100 = 6$ এবং $\cdot04 \times 100 = 4$

এখন, 120, 6 এবং 4-এর গ. সা. গু. $= 2$;

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $= 2 \div 100 = \cdot02$

আবার, 120, 6 এবং 4-এর ল. সা. গু. $= 120$;

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= 120 \div 100 = 1\cdot2$

মন্তব্য : প্রদত্ত দশমিক ভগ্নাংশগুলিকে সামান্য ভগ্নাংশে (লঘিষ্ঠ আকারে) পরিণত করিয়া উহাদের গ. সা. গু. ও ল. সা. গু.-কে পুনরায় দশমিকে রূপান্তরিত করিলেও দশমিক ভগ্নাংশগুলির গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. পাওয়া যায়।

উদাহরণ 8. $2\cdot4$, $\cdot8$ ও $\cdot16$-এর গ সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর।

$2\cdot4 = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$; $\cdot8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ এবং $\cdot16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$

এখন, $\frac{12}{5}$, $\frac{4}{5}$ এবং $\frac{4}{25}$-এর গ. সা. গু. $= \frac{4}{25} = \cdot16$

আবার, $\frac{12}{5}$, $\frac{4}{5}$ এবং $\frac{4}{25}$-এর ল. সা. গু. $= \frac{12}{5} = 2\cdot4$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু $= \cdot16$ এবং ল সা. গু. $= 2\cdot4$

উদাহরণ 9. এক ব্যক্তি কোন সম্পত্তির $\cdot0\dot{3}$ অংশের $\cdot\dot{3}$-এর অধিকারী হইয়া নিজ অংশের $\cdot2\dot{3}$, 70 টাকায় বিক্রয় করিল। ঐ হারে সমস্ত সম্পত্তির মূল্য এবং তাহার অংশের মূল্য কত ?

$\cdot0\dot{3} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$; $\frac{1}{30}$ এর $\cdot\dot{3} = \frac{1}{30}$ এর $\frac{3}{9} = \frac{1}{90}$;

$\frac{1}{90}$ এর $\cdot2\dot{3} = \frac{1}{90}$ এর $\frac{23-2}{90} = \frac{1}{90}$ এর $\frac{21}{90} = \frac{7}{2700}$;

$\therefore$ সমস্ত সম্পত্তির $\frac{7}{2700}$ অংশের মূল্য $= 70$ টা.

$\therefore$ সমস্ত সম্পত্তির মূল্য $= 70 \div \frac{7}{2700}$ টাকা $= \frac{70 \times 2700}{7} = 27000$ টাকা ;

সুতরাং, তাহার অংশের মূল্য $= \frac{1}{90} \times 27000$ টাকা $= 300$ টাকা।

উদাহরণ 10. $\dfrac{5\frac{5}{8}}{6\frac{3}{7}}$ এর $\dfrac{6\cdot\dot{6}\dot{3}}{9\cdot125} \div \frac{8}{9}\left(2\frac{3}{11} + \frac{13}{22}\right)$ এর $\dfrac{1 \text{ টাকা } 20 \text{ ন.প.}}{2 \text{ টাকা } 80 \text{ ন.প.}}$-কে $\cdot\dot{4}2857\dot{1}$-এর দশমিকরূপে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $= \dfrac{\frac{45}{8}}{\frac{45}{7}}$ এর $\dfrac{\frac{663-6}{99}}{\frac{9125}{1000}} \div \frac{8}{9}\left(\frac{50+13}{22}\right)$ এর $\dfrac{120 \text{ ন.প.}}{280 \text{ ন প.}}$

$$= \frac{7}{8} \text{ এর } \left(\frac{657}{99} \times \frac{1000}{9125}\right) \div \frac{8 \times 63 \times 3}{9 \times 22 \times 7}$$

$$= \frac{7}{8} \text{ এর } \frac{8}{11} \div \frac{12}{11} = \frac{7}{11} \div \frac{12}{11} = \frac{7}{12}$$

এখন, $\frac{7}{12} \div \cdot\dot{4}2857\dot{1} = \frac{7}{12} \div \frac{3}{7} = \frac{49}{36} = 1\cdot36\dot{1}$ $\therefore$ নির্ণেয় দশমিক $= 1\cdot36\dot{1}$

প্রশ্নমালা 2

সরল কর :

1. $8.48 \times 8.48 + 1.52 \times 1.52 + 2 \times 1.52 \times 8.48$

2. $2.4607 \times .06 - 3.75 \times .012 + 2.163 \div 1.03$

3. $\dfrac{1.73 \times 1.73 - .27 \times .27}{1.73 - .27}$

4. $\dfrac{13.5 \times 13.5 - 7.25 \times 7.25}{10.4 \times 10.4 - 10.35 \times 10.35}$

5. $\dfrac{\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \text{ এর } \frac{5}{6}}{\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}} - \dfrac{7.\dot{7} \times 0.12}{2.1}$ [C. U. 1929]

6. $\dfrac{1}{.2 + \dfrac{1}{.3 + \dfrac{1}{.4}}}$

7. $\dfrac{8}{3} \times \dfrac{0.8\dot{5}}{1.\dot{2}} \times 7.\dot{1}4285\dot{7} \times 1.875$

8. $13\frac{9}{19} \div 7\frac{5}{57}$ এর $\dfrac{1}{.41\dot{6} \times 1.2625}$ [W. B. S. B. 1953]

9. $\dfrac{3\frac{3}{4} + 4\frac{4}{5}}{5\frac{1}{10} - 4\frac{3}{10}} \div \dfrac{4.75 + 3.8}{6.1 - 5.15} \times \dfrac{.021 \times .0021 \times 210}{.14 \times .007}$

10. $\dfrac{1\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{6\frac{1}{2} \div \frac{3}{4}} \div \dfrac{.625}{131.25}$ এর $\dfrac{2\frac{2}{3}}{1\frac{2}{3}} \times \dfrac{3.\dot{5} \times .05}{2.\dot{3} \times 2.5}$ [C. U. 1947]

11. $\dfrac{.2 \times .2 \times .2 + .02 \times .02 \times .02}{.6 \times .6 \times .6 + .06 \times .06 \times .06} \div \dfrac{2\frac{1}{3} - 1.1\dot{6}}{2.\dot{3} + 1\frac{1}{6}}$ [C. U. 1907]

12. $\dfrac{.67 \times .67 \times .67 - .001}{.67 \times .67 + .067 + .01} + \dfrac{.57}{1 + \dfrac{1}{3 + \frac{1}{14}}}$

13. $\dfrac{5}{5 + \dfrac{5}{5 + \frac{1}{5}}} + \dfrac{1 \text{ টা. } 75 \text{ ন.প.}}{1 \text{ টা. } 55 \text{ ন.প.}} \div .\dot{1}4285\dot{7}(2.\dot{4} + 4.\dot{5})^2$

*14. $\dfrac{5}{5 + \dfrac{5}{5 + \frac{1}{5}}} \times \dfrac{6\frac{1}{5}}{5\frac{1}{5}} + \dfrac{5.208\dot{3} \times 3 \text{ টা } 84 \text{ ন.প.}}{1000 \times \frac{4}{17} \times 45 \text{ ন.প. এর } .1\dot{8}}$

15. $\dfrac{3.\dot{3}}{6.0625}$ এর $\dfrac{9.7}{2.4\dot{2}} \div \dfrac{2.5}{1.09} (7.25 + 2.75) \times \dfrac{8 \text{ টাকা}}{25 \text{ টা. } 60 \text{ ন.প.}}$

16. $\dfrac{15.\dot{6} + 7 - 0.\dot{3}}{3 \times 7.\dot{4} \times 0.25} + \left\{37 + \dfrac{3.7\dot{0}3\dot{7}}{100}\right\} \times 0.27$ [C. U. 1934]

✓17. বৃহত্তম কোন্ মাপকাঠি দ্বারা 1·2 মিটার ও 2·04 মিটার কাপড় মাপিতে পারা যায় ?

✓18. তিনটি ঘণ্টা একত্রে বাজিয়া যথাক্রমে ·036, ·24 ও 1·6 মিনিট পর পর বাজিতে লাগিল। ঘণ্টাগুলি কতক্ষণ পরে পুনরায় একসঙ্গে বাজিবে ?

✓19. এক মজুরকে $\cdot 41\dot{6} \times 84$ দিনের জন্য এই শর্তে নিযুক্ত করা হইল, যেদিন সে কাজ করিবে সেদিন সে 3 টাকা পাইবে ; কিন্তু যেদিন সে অনুপস্থিত থাকিবে সেই দিন তাহাকে 1 টা. 80 ন.প. জরিমানা দিতে হইবে। নির্দিষ্ট সময় অন্তে সে মোট টা. 66·60 পাইল। সে কতদিন অনুপস্থিত ছিল ?

✓20. একদল সৈন্যের $0\cdot 0\dot{3}$ অংশ প্রথম যুদ্ধে নিহত হইল। অবশিষ্ট সৈন্যের 0·175 অংশ দ্বিতীয় যুদ্ধে নিহত হইল। অবশিষ্ট সৈন্যের $0\cdot\dot{2}\dot{7}$ অংশ তৃতীয় যুদ্ধে নিহত হইল এবং 870 জন সৈন্য শেষ পর্যন্ত বাঁচিয়া রহিল। ঐ দলে প্রথমে কত সৈন্য ছিল ? [C. U. 1936]

• *21. এক ব্যক্তি বৎসরে যত উপার্জন করেন তাহা হইতে দৈনিক সমান ভাবে খরচ করিয়া প্রতি সাধারণ বৎসরে তাঁহার আয়ের $\cdot\dot{0}3\dot{7}$ অংশ সঞ্চয় করেন এবং প্রত্যেক লিপ্-ইয়ারে মোট 339 টাকা সঞ্চয় করেন। ঐ ব্যক্তির বাৎসরিক আয় কত ?

✓22 5 দিনকে 1 সপ্তাহের দশমিকে প্রকাশ কর।

✓23. 1 সেকেণ্ড, 1 ঘণ্টার কত দশমিক ? [C. U. 1911, 1919]

• 24. 3 টা. 75 ন.প -এর সহিত 8 টাকার কত দশমিক অংশ যোগ করিলে সমষ্টি 5 টাকা হইবে ?

* 25. 16 কি. গ্রা. 875 গ্রা. হইতে 12 কি. গ্রা-এর কত দশমিক অংশ বিয়োগ করিলে বিয়োগফল 9 কি. গ্রা. 375 গ্রা. হইবে ?

26. 4·50 টাকার $\cdot 8\dot{3}$, 1·50 টাকার 1 875 এবং 5 টাকার 2 05-এর সমষ্টিকে 67·25 টাকার দশমিকে প্রকাশ কর।

27. 4 টা. 56 ন.প. এর $\frac{1}{9\frac{1}{2}}$ এর $\frac{3}{4}$ + 1 টা. 80 ন.প. এর ·375 এর $\frac{2}{3}$ + 1 টা. 35 ন প.-এর $\cdot 32\dot{8}$ এর $\frac{5}{74}$-কে 24 টাকার দশমিকে প্রকাশ কর।

28. $1 - \cfrac{2}{3 + \cfrac{}{5 - \cfrac{6}{7 + \frac{8}{9}}}} \div \dfrac{301 \text{ গ্রাম}}{1 \text{ কি. গ্রা. } 18/ \text{ গ্রা.}}$ এর $2\cdot 08\dot{3}$-কে 2·2-এর দশমিক ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ কর।

দ্বিতীয় অধ্যায়

1. বর্গমূল
(Square Root)
[পুনরালোচনা]

কোন সংখ্যাকে সেই সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে যে গুণফল হয়, তাহাকে ঐ সংখ্যার **বর্গ** (Square) বলে এবং পূর্বোক্ত সংখ্যাটিকে গুণফলের **বর্গমূল** (Square root) বলে। যথা, $4 \times 4 = 16$; এস্থলে 4-এর বর্গ 16 এবং 16-এর বর্গমূল 4 হইবে।

বর্গমূল বুঝাইবার জন্য সংখ্যাটির বামদিকে '$\sqrt{\ }$' চিহ্ন ব্যবহার করিতে হয়। $\sqrt{16}$-এর অর্থ 16-এর বর্গমূল, অর্থাৎ 4.

যে সকল সংখ্যার বর্গমূল সম্পূর্ণভাবে নির্ণয় করা যায় তাহাকে **পূর্ণবর্গ সংখ্যা** (Perfect Square) বলে। যেমন, 36, 49, 81, 121 ইত্যাদি পূর্ণবর্গ সংখ্যা; কিন্তু 27, 45, 66 ইত্যাদি পূর্ণবর্গ সংখ্যা নহে।

উৎপাদকের সাহায্যে বর্গমূল নির্ণয় :

প্রথমে সংখ্যাটিকে কতকগুলি মৌলিক উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া, পরে দুই-দুইটি সমান উৎপাদকের পরিবর্তে এক-একটি উৎপাদক লইয়া উহাদিগকে গুণ করিলেই সংখ্যাটির বর্গমূল পাওয়া যায়।

উদাহরণ 1. 1225-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$1225 = 5 \times 5 \times 7 \times 7$; $\therefore$ $\sqrt{1255} = \sqrt{5^2 \times 7^2} = 5 \times 7 = 35$

উদাহরণ 2. 288-কে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

$288 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 2 = 2^2 \times 2^2 \times 3^2 \times 2$

288-এর উৎপাদকসমূহের সহিত আরও একটি 2 থাকিলে গুণফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইত। সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা = 2

উদাহরণ 3. 180-কে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

$180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

180-এর উৎপাদকসমূহ হইতে 5 পরিত্যাগ করিলেই অবশিষ্ট উৎপাদকসমূহের গুণফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে। সুতরাং নির্ণেয় সংখ্যা = 5

উদাহরণ 4. কোন শ্রেণীতে যতজন ছাত্র ছিল, প্রত্যেকে তত '25 নয়া পয়সা' করিয়া চাঁদা দেওয়ায় মোট 132 টা. 25 ন.প. চাঁদা উঠিল। ঐ শ্রেণীতে কতজন ছাত্র ছিল ?

4-টি 'পঁচিশ নয়া পয়সা'-তে 1 টাকা ;

∴ 132 টাকায় (4×132) বা 528-টি 'পঁচিশ নয়া পয়সা'।

∴ মোট 'পঁচিশ নয়া পয়সা' মুদ্রার সংখ্যা $= 528 + 1 = 529$

সুতরাং, নির্ণেয় ছাত্রসংখ্যা $= \sqrt{529} = \sqrt{23 \times 23} = 23$

প্রশ্নমালা 3

1. 7056-এর বর্গমূল নির্ণয় কর। 2. 11025-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

3. কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা দ্বারা 19404-কে গুণ করিলে গুণফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ? [A. U. 1933]

4. কোন্ ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যার একটি উৎপাদক 7936 ? [P. U. 1933]

*5. একদল সৈন্যকে সমান 10, 15 ও 25 সারিতে সাজানো যায় এবং উহাদিকে নিরেট বর্গাকারেও সাজানো যায়। সৈন্যদলে অন্ততঃ কত সৈন্য আছে ?

6. একদলে যতজন লোক ছিল, প্রত্যেকে তত টাকা করিয়া খরচ করায় মোট 9604 টাকা খরচ হইল। প্রত্যেকে কত খরচ করিল ? [D. B. 1939]

7. কোন সমিতিতে সভ্যসংখ্যা যত, প্রত্যেকে তত নয়া পয়সা করিয়া চাঁদা দেওয়ায় মোট টা. 151.29 চাঁদা উঠিল। সমিতিতে সভ্যসংখ্যা কত ?

8. কতিপয় বালক নিজেদের মধ্যে 81 টাকা চাঁদা তুলিল। যতগুলি বালক ছিল, প্রত্যেকে তত '25 ন.প.' করিয়া চাঁদা দিয়াছিল। বালকের সংখ্যা কত ?

বর্গমূল নির্ণয়ের সাধারণ প্রণালী :

উদাহরণ 1. 80460900-এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [D. B. 1931]

```
                ←  ←  ←  ←
                80 46 09 00( 8970
                64
(8×2)=  16 9 | 1646
                1521
(89×2)=178 7 |  12509
                12509
```

নির্ণেয় বর্গমূল = 8970

[কোন সংখ্যার শেষে যুগ্ম সংখ্যক শূন্য থাকিলে ঐ শূন্যগুলি বাদে অবশিষ্টাংশের বর্গমূল নির্ণয় করিয়া, যত জোড়া শূন্য বাদ দেওয়া হয়, বর্গমূলের ডানদিকে ততটি শূন্য বসাইতে হয়।]

উদাহরণ 2. 5678 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

```
 ← ←
 5678(75
 49
145) 778
     725
      53
```

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 53

[5678-এর বর্গমূল নির্ণয় করিতে যাইয়া দেখা গেল 53 অবশিষ্ট থাকিতেছে। এই 53 যদি 5678 হইতে বিয়োগ করা যায় তবে সেই বিয়োগফলটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে।]

উদাহরণ 3. 8765-এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

```
 ← ←
 87 65(94
 81
184) 665
     736
     −71
```

∴ নির্ণেয় সংখ্যা = 71

[এস্থলে বর্গমূলের দ্বিতীয় অঙ্ক 3 ধরিলে কিছু অবশিষ্ট থাকে। সুতরাং বর্গমূলের দ্বিতীয় অঙ্ক 4 ধরা হইল; ইহাতে শেষ ধাপে 736 হইল। উহা 665 অপেক্ষা 71 বেশী; সুতরাং 71 যোগ করিলে যোগফল পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে।]

দশমিক ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় :

উদাহরণ 4. 1618·4529-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

```
 ← ← → →
 16 18·45 29(40·23
 16
802)  1845
      1604
8043)  24129
       24129
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = 40·23

[দশমিক অংশের জোড়া তৈয়ার করিতে হয় বামদিক হইতে এবং অখণ্ড অংশের জোড়া তৈয়ার করিতে হয় ডানদিক হইতে।]

উদাহরণ 5. ·001296-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

```
 → → →
 ·00 12 96(·036
      9
66)  396
     396
```

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = ·036

[প্রথমে দশমিক অংশের জোড়া গঠন করা হইল। প্রথম জোড়া 0 থাকার ফলে দশমিকের পর এক ঘর 0 দেওয়া হইল। এইবার 1296-এর বর্গমূল যথারীতি নির্ণয় করা হইল এবং 0-এর পর উহা লিখা হইল।]

উদাহরণ 6. ·3-এর 3 দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় কর।

```
     →  →  →
    ·30 00 00(·547
     25
104) 500
     416
1087) 8400
      7609
       791
```

[·3-এর পরে 5-টি 0 বসাইয়া 3 জোড়া অঙ্ক তৈয়ারি করা হইল ; কারণ দশমিকের পর 3 ঘর পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে। এইবার যথারীতি বর্গমূল নির্ণয় করা হইল এবং 3 দশমিক স্থান পর্যন্ত কষিয়া শেষ করা হইল।]

∴ নির্ণেয় বর্গমূল = ·547…

সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয়

উদাহরণ 7. $1\frac{87}{1849}$-এর বর্গমূল কত ?

$$\sqrt{1\frac{87}{1849}} = \sqrt{\frac{1936}{1849}}$$

$$= \frac{\sqrt{1936}}{\sqrt{1849}} = \frac{44}{43} = 1\frac{1}{43}$$

নির্ণেয় বর্গমূল $= 1\frac{1}{43}$

[সামান্য ভগ্নাংশের বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইলে পৃথক্ পৃথক্ ভাবে হর ও লবের বর্গমূল নির্ণয় করিয়া প্রাপ্ত ফলকে যথাক্রমে হর ও লব হিসাবে লিখিলেই নির্ণেয় বর্গমূল পাওয়া যায়। পূর্ণ সংখ্যাযুক্ত ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া লইতে হয়।]

প্রশ্নমালা 4

বর্গমূল নির্ণয় কর :

1. 12769 2. 2819041 [C. U. 1923]

3. 57214096 4. 184389241 [C. U. 1924]

5. 1440·9616 6. 7468·4164 7. 964·226704

8. ·08042896 9. $\frac{225}{784}$ 10. $10\frac{628}{729}$

11. $9+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\frac{1}{6}}}$

*12. $\sqrt{3\frac{33}{64}} \div \sqrt{9\frac{1}{7}} + 2\sqrt{21\cdot\dot{7}}$-এর তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

*13. $1+(\cdot046)^3$-এর চতুর্থ দশমিক স্থান পর্যন্ত বর্গমূল নির্ণয় কর।

14. কোন বাগানে যতগুলি সারি, প্রত্যেক সারিতেও ততগুলি গাছ আছে। বাগানে গাছের সংখ্যা 5776 ; সারির সংখ্যা কত ?

15. 14669 হইতে কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা বিয়োগ করিলে বিয়োগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

16. 598-এর সহিত কোন্ ক্ষুদ্রতম সংখ্যা যোগ করিলে যোগফল একটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা হইবে ?

17. ছয় অঙ্কের ক্ষুদ্রতম পূর্ণবর্গ সংখ্যা নির্ণয় কর।

18. এক সেনাপতি তাঁহার বাহিনীকে বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে 24 জন সৈন্য বেশী হয়। সৈন্যসংখ্যা 15400 হইলে, প্রতি সারিতে কত সৈন্য ছিল ?

19. এক সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার অধীনস্থ সৈন্যদিগকে বর্গাকারে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে কিছু সৈন্য কম হয়। বাহিনীতে 281900 সৈন্য থাকিলে কত সৈন্য কম পড়িয়াছিল ?

***20.** এক দলে যতজন লোক ছিল, তাহাদের প্রত্যেকে তত দ্বিগুণ সংখ্যক 'দশ নয়া পয়সা' এবং তত তিন গুণ সংখ্যক 'পাঁচ নয়া পয়সা' করিয়া খরচ করায় মোট টা. ৮9·60 ব্যয় হইল। লোকসংখ্যা কত ? প্রত্যেকে কত খরচ করিল ?

---

2. *বর্গ পরিমাণ*

(Square Measures)

[পুনরালোচনা]

ক্ষেত্রফল-বিষয়ক প্রশ্নের সমাধানকল্পে নিম্নলিখিত সূত্রগুলি মনে রাখা কর্তব্য :—

(i) আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ),

(ii) বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 4 × বাহু,

(iii) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ,

(iv) আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = ক্ষেত্রফল ÷ প্রস্থ,

(v) আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = ক্ষেত্রফল ÷ দৈর্ঘ্য,

(vi) বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = বাহু^{2},

(vii) বর্গক্ষেত্রের বাহু = $\sqrt{\text{ক্ষেত্রফল}}$

এবং (viii) চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল = 2 × (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) × উচ্চতা।

বর্গ পরিমাণের এককাবলী :

100 বর্গ মি. মি. = 1 বর্গ সে. মি.

100 বর্গ সে. মি. = 1 বর্গ ডেসি. মি.

100 বর্গ ডেসি. মি. = 1 বর্গমিটার

100 বর্গ মি. = 1 বর্গ ডেকা মি.

100 বর্গ ডেকা. মি. = 2 বর্গ হে. মি.

100 বর্গ হে. মি. = 1 বর্গ কি. মি.

যে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য এক ডেকামিটাব তাহার ক্ষেত্রফলকে ভূমির ক্ষেত্রফলের একক ধরা হয়। এই এককের নাম এর (Are)।

সুতরাং 10 সেন্টি এর = 1 ডেসি এর ; 10 ডেসি এর = 1 এর এবং 10 এর = ডেকা এর

উদাহরণ 1. একটি আয়তাকাব প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য 30 মিটার ও প্রস্থ 18 মিটার। উহাকে 15 সে. মি. বর্গ প্রস্তর দ্বারা বাঁধাইতে কতগুলি প্রস্তর লাগিবে ?

প্রাঙ্গণের ক্ষেত্রফল = (30 × 18) বর্গ মি. = 540 বর্গমিটার

= 540 × 100 × 100 বর্গ সে. মি.

প্রস্তরের ক্ষেত্রফল = (15 × 15) বর্গ সে. মি. = 225 বর্গ সে. মি.

∴ নির্ণেয় প্রস্তরের সংখ্যা = $\frac{540 \times 100 \times 100}{225}$ = 24000

[সর্বদা মনে রাখিও, 15 বর্গ সে. মি. এবং 15 সে. মি. বর্গ এক কথা নহে। 15 বর্গ সে. মি. = 15 × 1 বর্গ সে. মি. ও 15 সে মি. বর্গ = 15 সে. মি. × 15 সে. মি.]

উদাহরণ 2. একটি প্রাঙ্গণের ক্ষেত্রফল 37930424 বর্গমিটার। ইহাব দৈর্ঘ্য, বিস্তারের $3\frac{1}{2}$ গুণ। প্রাঙ্গণেব দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

যেহেতু, প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য, বিস্তারের $3\frac{1}{2}$ বা $\frac{7}{2}$ গুণ; সেই হেতু প্রাঙ্গণটিকে চিত্রাঙ্কিত উপায়ে (7 × 2) বা 14-টি সমান বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত করা যায়।

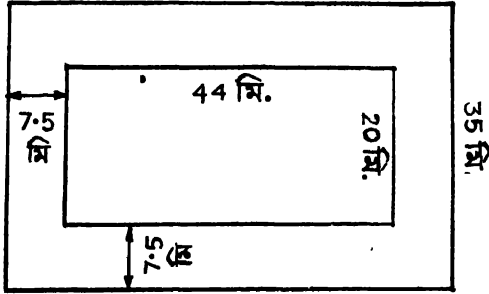
14-টি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = প্রাঙ্গণের ক্ষেত্রফল = 37930424 ব মি

∴ 1-টি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{37930424}{14}$ ব মি. = 2709316 ব. মি.

∴ বর্গক্ষেত্রের বাহু = $\sqrt{2709316}$ মিটার = 1646 মিটার ;

∴ প্রাঙ্গণের প্রস্থ = 2 × 1646 মিটার = 3292 মিটার

এবং দৈর্ঘ্য = 7 × 1646 মিটার = 11522 মিটার।

উদাহরণ 3. একটি আয়তকার উদ্যানের দৈর্ঘ্য 44 মিটার ও প্রস্থ 20 মিটার। উহার বাহিরে চারিদিকে 7·5 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা নির্মাণ করিতে হইবে। প্রতি বর্গমিটারে টা. 3·24 ব্যয় হইলে, সম্পূর্ণ রাস্তা নির্মাণ করিতে মোট কত ব্যয় হইবে ?

রাস্তাসহ উদ্যানের দৈর্ঘ্য হইবে $= (44 + 2 \times 7·5)$ বা 59 মিটার

রাস্তাসহ উদ্যানের প্রস্থ হইবে $= (20 + 2 \times 7·5)$ বা 35 মিটার

$\therefore$ রাস্তাসহ উদ্যানের ক্ষেত্রফল হইবে $= (59 \times 35)$ বা 2065 ব. মি.

কিন্তু উদ্যানের ক্ষেত্রফল $= (44 \times 20)$ বা 880 ব. মি.

$\therefore$ রাস্তার ক্ষেত্রফল $= (2065 - 880)$ বা 1185 ব. মি.

সুতরাং, রাস্তা নির্মাণে মোট ব্যয় $= 1185 \times$ টা. 3·24 = টা. 3839·40

উদাহরণ 4. 14·40 মিটার দৈর্ঘ্য এবং উহার এক-তৃতীয়াংশ প্রস্থবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের সমান পরিসীমাবিশিষ্ট অপর একটি বর্গক্ষেত্রকে 45 সে. মি. দীর্ঘ এবং 20 সে. মি. প্রস্থবিশিষ্ট কতগুলি প্রস্তর দ্বারা বাঁধান যাইতে পারে ?

আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 14·40 মিটার

$\therefore$ উহার প্রস্থ $= \frac{1}{3} \times 14·40$ মিটার = 4·80 মিটার

$\therefore$ উহার পরিসীমা $= 2 \times (14·40 + 4·80)$ মিটার = 38·40 মিটার

অতএব, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 38·40 মিটার

সুতরাং, উহার বাহু $= \frac{1}{4} \times 38·40$ মিটার = 9·60 মিটার = 960 সে. মি.

$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= 960 \times 960$ বর্গ সে. মি.

আবার, প্রতিটি প্রস্তরের ক্ষেত্রফল $= 45 \times 20$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ প্রস্তর সংখ্যা $= \frac{960 \times 960}{45 \times 20} = 1024$

[মনে রাখিও, কোন স্থান গালিচা, মাদুর, পাথর প্রভৃতি দ্বারা আবৃত হইলে গালিচা, মাদুর, পাথর প্রভৃতির ক্ষেত্রফলও ঐ স্থানটির ক্ষেত্রফলের সমান হয়।]

উদাহরণ 5. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের দ্বিগুণ। প্রতি বর্গমিটার 60 ন.প. হিসাবে ঐ ঘরের মেঝে কার্পেট দ্বারা মুড়িতে 14 টা. 70 ন. প. এবং প্রতি বর্গমিটার 9 ন. প. হিসাবে ঐ ঘরের দেওয়াল রং করিতে 6 টা. 30 ন. প. খরচ হয়। ঘরটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

মেঝের ক্ষেত্রফল $=$(1470 ন. প. $\div$ 60 ন. প.) বা $\frac{49}{2}$ ব. মি.

$\therefore$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ $= 2 \times$ প্রস্থ $\times$ প্রস্থ $= \frac{49}{2}$ ব. মি. বা $2 \times$ প্রস্থ$^2 = \frac{49}{2}$ ব. মি.

$\therefore$ প্রস্থ$^2 = \frac{49}{4}$ ব. মি. এবং প্রস্থ $= \sqrt{\frac{49}{4}}$ বা $\frac{7}{2}$ মিটার।

$\therefore$ দৈর্ঘ্য $= 2 \times \frac{7}{2}$ বা 7 মিটার।

আবার, চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল $=$(6 টা. 30 ন. প. $\div$ 9 ন. প.) ব. মি.

$= 70$ ব. মি.

$\therefore$ $2 \times (7 + \frac{7}{2})$ মিটার $\times$ উচ্চতা $= 70$ ব. মি.

$\therefore$ উচ্চতা $= \frac{70}{21}$ মিটার $= 3\frac{1}{3}$ মিটার।

$\therefore$ ঘরের দৈর্ঘ্য $= 7$ মিটার; প্রস্থ $= \frac{7}{2}$ বা $3\frac{1}{2}$ মিটার এবং উচ্চতা $= 3\frac{1}{3}$ মিটার।

[ঘরে চুণকাম করার কথা থাকিলে, দেওয়াল ও ছাদ সম্বন্ধে বুঝিতে হইবে; কিন্তু কাগজ মোড়াই বা রং করার কথা থাকিলে দেওয়ালগুলি সম্বন্ধেই বুঝিতে হইবে।]

উদাহরণ 6. একখানি ঘরের দৈর্ঘ্য 6 মিটার, প্রস্থ 4 মিটার ও উচ্চতা 5 মিটার। ঘরটিতে 2 মিটার উচ্চ, 1·3 মিটার বিস্তৃত 3-টি দরজা এবং 1·6 মিটার উচ্চ, 1 মিটার বিস্তৃত 6-টি জানালা আছে। প্রতি বর্গমিটার 45 ন. প. হিসাবে ঘরটির দেওয়ালগুলি চুণকাম করিতে কত ব্যয় হইবে?

দরজা-জানালাসহ চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল

$= 2 \times (6+4) \times 5$ ব. মি. $= 100$ ব. মি.

3-টি দরজা ও 6-টি জানালার ক্ষেত্রফল

$= 3 \times (2 \times \frac{4}{3})$ ব. মি. $+ 6 \times (\frac{5}{3} \times 1)$ ব. মি. $= 18$ ব. মি.

$\therefore$ চুণকাম করিতে হইবে $(100 - 18)$ বা 82 ব. মি.

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যয় $= 82 \times 45$ ন. প. $=$ টা. 36·90

[চারি দেওয়াল রং বা চুণকাম করার কথা থাকিলে দরজা-জানালা বাদে অবশিষ্ট অংশ বুঝিতে হইবে। তখন চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল হইতে দরজা-জানালার ক্ষেত্রফল বিয়োগ করিতে হয়।]

প্রশ্নমালা 5

1. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 64 মিটার এবং প্রস্থ 42 মিটার। উহার সমান পরিসীমাবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত ?

2. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য উহার বিস্তারের 3 গুণ। প্রতি বর্গমিটার টা. 7·50 হিসাবে ঐ ঘরের মেঝে কার্পেট মুড়িতে টা. 1102·50 খরচ হয়। ঘরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

3. একটি আয়তাকার প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য 36 মিটার ও প্রস্থ 25 মিটার ; 150 সে. মি. দীর্ঘ ও 125 সে. মি. প্রশস্ত কতগুলি পাথর দ্বারা ঐ প্রাঙ্গণ বাঁধান যায় ?

4. একটি আয়তাকার প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য প্রস্থের 3 গুণ। উহা 50 সে. মি. বর্গ মাপের 2028-টি পাথর দ্বারা বাঁধান হইল। প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

5. একটি উদ্যানের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের 1·5 গুণ ; উদ্যানটির ক্ষেত্রফল 3456 ব. মি. হইলে (i) উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ? (ii) প্রতি মিটারে টা. 15·0 খরচ পড়িলে উহার চতুর্দিকে বেড়া দিতে কত খরচ পড়িবে ?

6. একটি ঘরের প্রস্থ 6 মি. 25 সে. মি. এবং প্রতি বর্গমিটার 25 ন. প. হিসাবে ঐ ঘর প্রস্তর দ্বারা বাঁধাইতে টা. 12·50 খরচ হইল। ঘরের দৈর্ঘ্য কত ?

*7. 10 মিটার দীর্ঘ একটি ঘরের মেঝে কার্পেট দ্বারা আবৃত করিতে 150 টাকা খরচ হইল। ইহার প্রস্থ $1\frac{2}{3}$ মিটার কম হইলে 120 টাকা খরচ হইত। ঘরের প্রস্থ কত ?

8. 200 মিটার বাহুবিশিষ্ট বর্গাকৃতি একটি জমির বাহিরে চতুর্দিকে $3\frac{1}{3}$ মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। প্রতি বর্গমিটারে 22·5 ন. প. হিসাবে ঐ রাস্তা মেরামত করিতে কত ব্যয় হইবে ?

9. একটি গৃহের দৈর্ঘ্য $6\cdot\dot{6}$ মিটার এবং প্রস্থ $5\cdot\dot{3}$ মিটার। উহার চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল যদি মেঝে এবং ভিতরের ছাদের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হয়, তবে ঐ গৃহের উচ্চতা কত ?

10. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থের দ্বিগুণ এবং ঘরটির উচ্চতা 5 মিটার। প্রতি বর্গমিটার টা. 1·25 হিসাবে ঘরটির চারি দেওয়াল রং করিতে 450 টাকা খরচ হইল। ঘরের দৈর্ঘ্য [illegible] নির্ণয় কর।

11. একটি ঘরের চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল $73\frac{1}{3}$ বর্গমিটার এবং উহার মেঝের ক্ষেত্রফল 30 বর্গমিটার। মেঝের প্রস্থ 5 মিটার হইলে ঘরটির উচ্চতা কত ?

12. 20 মিটার দীর্ঘ, 15 মিটার বিস্তৃত একটি ঘরের দেওয়ালগুলি ভিতরের দিকে রং করিতে প্রতি বর্গমিটার টা. 1·25 হিসাবে মোট 280 টাকা ব্যয় হইলে ঘরের উচ্চতা কত ?

13. 5·3̇ মিটার দৈর্ঘ্য, 4 মিটার প্রস্থ ও 3·3̇ মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ঘরে 2 মিটার উচ্চতা ও 1·3̇ মিটার প্রস্থবিশিষ্ট 2-টি দরজা এবং 1·6̇ মিটার উচ্চতা ও 1 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট 6-টি জানালা আছে। প্রতি বর্গমিটার 22·5 ন. প. হিসাবে ঘরটির চারি দেওয়াল চুণকাম করিতে কত খরচ হইবে ?

*14. 27 সে. মি. দেওয়ালযুক্ত একটি ঘরের ভিতরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ যথাক্রমে 5 মি. 10 সে. মি. এবং 2 মি. 73 সে. মি.; ঐ ঘরের চতুর্দিকে 1 মি. 26 সে. মি. বিস্তৃত একটি বারান্দা আছে। 12 সে. মি. দৈর্ঘ্য ও 9 সে. মি. প্রস্থবিশিষ্ট প্রতিটি পাথরের মূল্য 25 ন. প. হইলে ঐ বারান্দাটি ঐরূপ পাথর দ্বারা বাঁধাইতে কত ব্যয় হইবে ?

15. একটি আয়তাকার প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 9 মিটার। উহার অভ্যন্তরে চতুর্দিকে সীমাসংলগ্ন 1 মিটার বিস্তৃত একটি পথ আছে। প্রতি বর্গমিটার টা. 6·50 দরে পথটি পাথর দ্বারা বাঁধাইতে এবং প্রতি বর্গমিটার 50 ন. প. দরে ক্ষেত্রটির অবশিষ্টাংশে ঘাসের চাপড়া বসাইতে মোট কত ব্যয় হইবে ?

*16. 100 মিটার দীর্ঘ এবং 50 মিটার বিস্তৃত একটি আয়তাকার উদ্যানের ভিতর 4 মিটার বিস্তৃত দুইটি রাস্তা উদ্যানের বাহুগুলির সমান্তরালভাবে গিয়া পরস্পরকে সমকোণে ছেদ করিয়াছে। যদি প্রতি বর্গমিটারে 75 ন. প. মূল্যের প্রস্তর এবং টা. 3·75 মূল্যের কাঁকর লাগে, তবে ঐ প্রাঙ্গণে প্রস্তর বসাইতে এবং রাস্তায় কাঁকর ফেলিতে কত খরচ হইবে ?

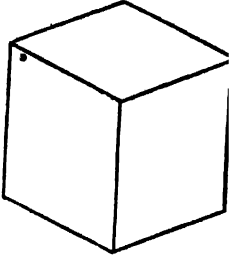
3. ঘনপরিমাণ

(Cubic Measures)

[পুনরালোচনা]

যে বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ বা উচ্চতা আছে তাহাকে **ঘনবস্তু** (Solid) বলে। ঘনবস্তু যে পরিমাণ স্থান অধিকার করে, তাহাকে **ঘনফল** (Volume) বলে।

ঘনবস্তুর উপরিভাগকে **পৃষ্ঠ** বা **তল** (Surface) বলে। প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ।

ঘনবস্তুর দুইটি তল যেখানে পরস্পর মিলিত হয় সেখানে একটি রেখার সৃষ্টি হয়। এই রেখাকে ঘনবস্তুর **ধার** (Edge) বলা হয়।

ঘনক

যে ঘনবস্তুর মোট ছয়টি তল এবং যাহার দুইটি বিপরীত তল পরস্পর সমান্তরাল, তাহাকে **চৌপল** (Parallelopiped) বলে এবং যে চৌপলের ছয়টি তলের প্রত্যেকটি আয়তক্ষেত্র, তাহাকে **সমকোণী চৌপল** বা **আয়তিক ঘন** (Rectangular Parallelopiped) বলে।

যে সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ পরস্পর সমান, তাহাকে **ঘনক** (Cube) বলে।

ঘনপরিমাণ-বিষয়ক প্রশ্নের সমাধানকল্পে নিম্নলিখিত সূত্রগুলি মনে রাখা কর্তব্য :—

সমকোণী চৌপল বা আয়তিক ঘনবস্তুর

(i) ঘনফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × বেধ

(ii) দৈর্ঘ্য = ঘনফল ÷ (প্রস্থ × বেধ)

(iii) প্রস্থ = ঘনফল ÷ (দৈর্ঘ্য × বেধ)

এবং (iv) বেধ = ঘনফল ÷ (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ)

ঘনবস্তুর বেধকে ক্ষেত্রবিশেষে **উচ্চতা** (Height) বা **গভীরতা** (Depth) বলা হয়।

ঘনপরিমাণের এককাবলী :

1000 ঘন মি. মি. = 1 ঘন সে. মি.

1000 ঘন সে. মি. = 1 ঘন ডেসি. মি.

1000 ঘন ডেসি. মি. = 1 ঘন মিটার

কাষ্ঠের আয়তন মাপিতে যে একক ব্যবহার করা হয়, তাহাকে **স্টেয়ার** (Stere) বলে। ইহা এক ঘন মিটারের সমান। তরল পদার্থের ঘনপরিমাণের একক **লিটার** (Litre) এবং ইহা 1 ঘন ডেসিমিটারের সমান।

উদাহরণ 1. 15 মিটার দীর্ঘ, 7 মি. 20 সে. মি. উচ্চ এবং 75 সে. মি. পুরু একটি দেওয়াল নির্মাণ করিতে 25 সে. মি. দীর্ঘ, 12·5 সে মি. বিস্তৃত এবং 7·5 সে. মি. পুরু কতগুলি ইট লাগিবে ?

দেওয়ালের ঘনফল $=(15\times 7{\cdot}20\times {\cdot}75)$ ঘনমিটার

এবং প্রত্যেক ইটের ঘনফল $=({\cdot}25\times{\cdot}125\times{\cdot}075)$ ঘনমিটার।

$\therefore$ ইটের সংখ্যা $=\dfrac{15\times 7{\cdot}20\times{\cdot}75}{{\cdot}25\times{\cdot}125\times{\cdot}075}=34560$

উদাহরণ 2. তিনটি সোনার ঘনকের ধারগুলি যথাক্রমে 3 সে. মি., 4 সে. মি. ও 5 সে. মি.। যদি উহাদিগকে গলাইয়া একটি নূতন ঘনক নির্মাণ করা যায় তাহা হইলে ঐ ঘনকটির ধার কত হইবে ?

তিনটি ঘনকের আয়তনের সমষ্টি $=(3^3+4^3+5^3)$ বা 216 ঘন সে. মি.

$\therefore$ নূতন ঘনকটির ধার $=\sqrt[3]{216}$ সে. মি. $=\sqrt[3]{6\times 6\times 6}$ সে. মি. $=6$ সে. মি.।

উদাহরণ 3. ঢাকনিসমেত একটি বাক্সের বহির্দেশের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 75 সে. মি., 50 সে. মি. এবং 37·5 সে. মি. ; বাক্সটি 25 সে. মি. পুরু কাষ্ঠ দ্বারা নির্মিত হইলে কাষ্ঠের পরিমাণ কত ?

বাক্সটির বাহিরের মাপের ঘনফল $=(75\times 50\times 37{\cdot}5)$ ঘন সে. মি. $=\frac{9}{64}$ ঘনমিটার ;

ভিতরের ঘনফল $=\{(75-2\times 2{\cdot}5)(50-2\times 2{\cdot}5)(37{\cdot}5-2\times 2{\cdot}5)\}$ ঘন সে. মি.

$=(70\times 45\times 32{\cdot}5)$ ঘন সে. মি. $=\frac{819}{8000}$ ঘনমিটার।

$\therefore$ কাষ্ঠের পরিমাণ $=(\frac{9}{64}-\frac{819}{8000})$ বা $\frac{153}{4000}$ ঘনমিটার বা $\frac{153}{4000}$ স্টেয়ার।

প্রশ্নমালা 6

1. 2 মিটার গভীর একটি বর্গাকার চৌবাচ্চায় 32000 লিটার জল ধরে। ঐ চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য কত ?

2. একটি শ্রেণীকক্ষের দৈর্ঘ্য, প্রস্থের দ্বিগুণ এবং উচ্চতার তিন গুণ। উহাতে 288 ঘনমিটার বায়ু ধরে। ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত ?

3. 4 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ঘরের প্রস্থ উহার দৈর্ঘ্যের $\frac{2}{3}$ অংশ। ঘরটিতে 384000 লিটার বায়ু ধরিলে ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

4. এক ঘনমিটার লৌহ দ্বারা 25 সে. মি ধারবিশিষ্ট কয়টি ঘনক প্রস্তুত করা যায় ?

5. প্রতিটি ইটের দৈর্ঘ্য 25 সে. মি , প্রস্থ $12\frac{1}{2}$ সে. মি. এবং বেধ $7\frac{1}{2}$ সে. মি.। প্রতি হাজার ইটের মূল্য টা. 62·50 হইলে 15 মিটার দীর্ঘ, 1·80 মিটার উচ্চ এবং 37·5 সে. মি. বেধবিশিষ্ট একটি দেওয়াল নির্মাণ করিতে কত টাকার ইট লাগিবে ?

6. একটি আয়তিক ঘনবস্তুর আয়তন 15680 ঘন সে. মি.। উহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থের দ্বিগুণ এবং উচ্চতা 10 সে. মি.। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

7. এক ঘনমিটার লোহা পিটাইয়া 10 মিটার বর্গ পাত তৈয়ার করা হইল। পাতের বেধ কত ?

8. 40 মিটার দীর্ঘ ও 30 মিটার বিস্তৃত একটি আয়তাকার উদ্যানের বাহিরে চারিদিকে 2 মিটার উচ্চ এবং 37·5 সে. মি. পুরু প্রাচীর প্রস্তুত করিতে 25 সে. মি. দীর্ঘ, 12·5 সে. মি. প্রশস্ত ও $8\dot{3}$ সে. মি. পুরু কতগুলি ইট লাগিবে ?

9. প্রতিটি বাক্সের বহির্দেশের মাপ 1 মিটার, 75 সে. মি. এবং 50 সে. মি.। প্রতিটি বাক্স 2·5 সে. মি. পুরু কাষ্ঠনির্মিত হইলে, ঐরূপ চারিটি বাক্সে কত স্টেয়ার কাষ্ঠ আছে ?

10. 20 ঘন সে. মি., 40 ঘন সে. মি. এবং 65 ঘন সে. মি. আয়তনবিশিষ্ট তিনটি ধাতুখণ্ড একত্রে গলাইয়া একটি ঘনক প্রস্তুত করা হইল। ঐ ঘনকের ধার কত সেন্টিমিটার ?

*11. একটি লোহার সিন্দুকের বাহিরের দৈর্ঘ্য 1·5 মিটার, প্রস্থ 1 মিটার এবং উচ্চতা ·76 মিটার। সিন্দুকটি 2 সে. মি. পুরু পাতের তৈয়ারী। সিন্দুকের ভিতরের আয়তন কত ? প্রতি ঘন সেন্টিমিটার লোহার ওজন 7·8 গ্রাম হইলে সিন্দুকটির ওজন কত ?

12. 10 মিটার দীর্ঘ ও 9 মিটার বিস্তৃত একটি আয়তক্ষেত্রের চারিদিকে $3\dot{3}$ মিটার উচ্চ ও 5 মিটার পুরু একটি প্রাচীর নির্মাণ করিতে $\frac{1}{6}$ মিটার দীর্ঘ, $\frac{1}{8}$ মিটার বিস্তৃত ও $\frac{1}{12}$ মিটার পুরু কতগুলি ইট লাগিবে ?

তৃতীয় অধ্যায়

1. *ঐকিক নিয়ম*

(Unitary Method)

[পুনরালোচনা]

একজাতীয় কতিপয় দ্রব্যের মূল্য, ওজন ইত্যাদি হইতে এককের মূল্য, ওজন ইত্যাদি স্থির করিয়া তজ্জাতীয় কোন নির্দিষ্টসংখ্যক দ্রব্যের মূল্য, ওজন ইত্যাদি স্থির করিবার প্রণালীকে **ঐকিক নিয়ম** (Unitary Method) বলে।

ঐকিক নিয়মের অঙ্ক কষিবার সময় প্রদত্ত শর্তগুলিকে এমনভাবে সাজাইতে হয়, যেন নির্ণেয় রাশিটি উহার স্বজাতীয় রাশিটির সহিত সর্বদা ডানদিকে থাকে।

উদাহরণ 1. যদি 15 দিনে 16 জন শ্রমিক একটি রাস্তা তৈয়ারি করিতে পারে, তবে 20 জন শ্রমিক কতদিনে ঐ রাস্তা তৈয়ারি করিতে পারিবে ?

16 জন শ্রমিক রাস্তাটি তৈয়ারি করিতে পারে 15 দিনে

∴ 1 " " " " " " 15×16 "

∴ 20 " " " " " " $\frac{15 \times 16}{20}$ বা 12 দিনে।

[কার্যের ব্যাপারে লোক কমিলে দিন বাড়ে এবং লোক বাড়িলে দিন কমে।]

উদাহরণ 2. 8 কুইন্ট্যাল দ্রব্য 24 কিলোমিটার দূরে পাঠাইতে 6 টাকা খরচ হইলে, ঐ খরচে 16 কুইন্ট্যাল দ্রব্য কত দূরে পাঠান যাইবে ?

যে খরচে 8 কুইন্ট্যাল দ্রব্য পাঠান যায় 24 কি. মি.

সেই " 1 " " " " 24×8 " "

∴ " " 16 " " " " $\frac{24 \times 8}{16}$ বা 12 কিলোমিটার।

[মালের ওজন যত কম, দূরত্ব তত বেশী এবং মালের ওজন যত বেশী, দূরত্ব তত কম হইবে।]

উদাহরণ 3. যদি 12 জন লোক দৈনিক 9 ঘণ্টা খাটিয়া 30 দিনে একটি কাজ শেষ করিতে পারে, তবে কত জন লোক দৈনিক 5 ঘণ্টা খাটিয়া 24 দিনে ঐ কাজের 10 গুণ একটি কাজ শেষ করিতে পারিবে ? [C. U. 1948]

প্রতিদিন 9 ঘণ্টা হিসাবে 30 দিনে হয় (9×30) বা 270 ঘণ্টা এবং প্রতিদিন 5 ঘণ্টা হিসাবে 24 দিনে হয় (5×24) বা 120 ঘণ্টা।

∴ মোট 270 ঘণ্টা খাটিয়া কাজটি করে 12 জন লোক

∴ „ 1 „ „ „ „ 12×270 জন লোক

∴ „ 120 „ „ „ „ $\frac{12 \times 270}{120}$ „ „

∴ „ „ „ 10 গুণ কাজ „ $\frac{12 \times 270 \times 10}{120}$ বা 270 জন লোক।

উদাহরণ 4. এক কুইণ্ট্যাল গমের মূল্য 75 টাকা হইলে 600 গ্রাম রুটির মূল্য 50 ন. প.; 750 গ্রাম রুটির মূল্য 75 ন. প. হইলে প্রতি কুইণ্ট্যাল গমের মূল্য কত?

50 ন. প. দামের রুটি 600 গ্রাম হইলে প্রতি কুইণ্ট্যাল গম 75 টাকা

1 „ „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{75}{50}$ „

„ „ „ „ 1 „ „ „ „ „ $\frac{75 \times 600}{50}$ „

75 „ „ „ „ „ „ „ „ „ $\frac{75 \times 75 \times 600}{50}$ „

„ „ „ „ 750 „ „ „ „ „ $\frac{75 \times 75 \times 600}{50 \times 750}$

বা 90 টাকা।

[গমের দাম যত বেশী, রুটির ওজন তত কম এবং গমের দাম যত কম, রুটির ওজন তত বেশী হইবে।]

উদাহরণ 5. একটি দুর্গে 750 জন লোকের 20 সপ্তাহের খাদ্য ছিল; 4 সপ্তাহ পরে ঐ দুর্গে আরও 450 জন লোক উপস্থিত হইল। ঐ খাদ্যে মোট কতদিন চলিয়াছিল? [C. U. 1927]

4 সপ্তাহ পরে 750 জন লোকের খাদ্য রহিল $(20-4)$ বা 16 সপ্তাহের এবং ঐ সময়ে আরও 450 জন লোক আসায় মোট লোকসংখ্যা হইল $(750+450)$ বা 1200.

∴ 750 জন লোক যে খাদ্য খায় 16 সপ্তাহে

1 „ „ সেই „ „ 16×750 সপ্তাহে

1200 „ „ „ „ $\frac{16 \times 750}{1200} = 10$ সপ্তাহে।

∴ নির্ণেয় সময় = পূর্বের 4 সপ্তাহ + 10 সপ্তাহ = 14 সপ্তাহ।

খাদ্যের ব্যাপারে লোক কমিলে সময় বাড়ে এবং লোক বাড়িলে সময় কমে।]

উদাহরণ 6. যদি 8 জন পুরুষ অথবা 17 জন বালক 26 দিনে একটি কার্য সম্পন্ন করিতে পারে, তাহা হইলে 4 জন পুরুষ এবং 24 জন বালক কত দিনে ঐ কার্যের $50 \times 0\cdot0\dot{9}$ গুণ একটি কার্য সম্পন্ন করিতে পারিবে ? [C. U. 1937]

$50 \times 0\cdot0\dot{9} = 50 \times \frac{9}{90} = 5$

এস্থলে, 8 জন পুরুষ = 17 জন বালক, ∴ 4 জন পুরুষ = $\frac{17}{2}$ জন বালক ;

অতএব, 4 জন পুরুষ + 24 জন বালক = $(\frac{17}{2} + 24)$ বা $\frac{65}{2}$ জন বালক।

এখন, 17 জন বালক একটি কার্য করিতে পারে 26 দিনে

∴ 1 " " " " " " 26×17 দিনে

∴ $\frac{65}{2}$ " " " " " " $26 \times 17 \times \frac{2}{65}$ দিনে

∴ " " " 5 গুণ " " " $26 \times 17 \times \frac{2}{65} \times 5$ বা 68 দিনে।

[বিভিন্ন জাতীয় শর্তকে একজাতীয় শর্তে পরিণত করিয়া লইতে হয়।]

উদাহরণ 7. একজন ঠিকাদার 21 দিনে একটি বাড়ী নির্মাণ করাইয়া দিবার চুক্তিতে রাজী হইয়া ঐ কার্যে 15 জন লোক নিযুক্ত করিল। 15 দিন পরে আবশ্যক মনে করিয়া, সে ঐ কার্যে আরও 9 জন অতিরিক্ত লোক নিযুক্ত করিল। ইহাতে নির্দিষ্ট সময়ের একদিন পূর্বেই কাজটি শেষ হইল। অতিরিক্ত লোক নিযুক্ত না করিলে ঐ কাজটি শেষ করাইতে ঠিকাদারের কতদিন বিলম্ব হইত ? [B. C. S. 1938]

প্রশ্নানুসারে সমগ্র কাজটি $(21-1)$ বা 20 দিনে শেষ হইয়াছে এবং প্রথমে 15 জন ঐ 20 দিন এবং অতিরিক্ত 9 জন মাত্র $(20-15)$ বা 5 দিন কাজ করিয়াছে।

এখন 15 জনে যে কাজ 20 দিনে করে, 1 জনে সেই কাজ (15×20) বা 300 দিনে করে ; এবং 9 জনে যে কাজ 5 দিনে করে, 1 জনে সেই কাজ (9×5) বা 45 দিনে করে।

∴ 1 জনের সমস্ত কাজটি করিতে সময় লাগে $(300+45)$ বা 345 দিন

∴ 15 " " " " " " $\frac{345}{15}$ বা 23 দিন

∴ অতিরিক্ত লোক নিযুক্ত না করিলে বিলম্ব হইত $(23-21)$ বা 2 দিন।

প্রশ্নমালা 7

1. 15-টি গরুর মূল্য 630 টাকা হইলে 1050 টাকায় ঐরূপ কতগুলি গরু পাওয়া যাইবে ?

2. $17\frac{1}{2}$ মিটার কাপড়ের মূল্য টা. 87·50 হইলে $7\frac{1}{2}$ মিটার কাপড়ের মূল্য কত ?

3. প্রতি কিলোগ্রাম গমের মূল্য 60 ন. প. হইলে 500 গ্রাম রুটির মূল্য 75 ন. প.। প্রতি কিলোগ্রাম গমের মূল্য 80 ন. প. হইলে 250 গ্রাম ওজনের 12 খানা রুটির মূল্য কত ?

4. যদি 50 জন লোক প্রত্যহ 8 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 12 দিনে একটি কাজ সম্পন্ন করিতে পারে, তবে প্রত্যহ কত ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 60 জন লোক 16 দিনে ঐ কাজের দ্বিগুণ একটি কাজ সম্পন্ন করিতে পারে ? [D. B. 1930]

*5. দৈনিক 9 ঘণ্টা বিশ্রাম গ্রহণ করিয়া এক ব্যক্তি 35 দিনে 120 কি. মি. হাঁটিতে পারে। দৈনিক 10 ঘণ্টা বিশ্রাম গ্রহণ করিয়া এবং পূর্বাপেক্ষা $1\frac{1}{2}$ গুণ জোরে হাঁটিয়া, কতদিনে সে 750 কি. মি. হাঁটিতে পারিবে ?

6. একটি দুর্গে 800 লোকের 40 দিনের খাদ্য আছে। 20 দিন পরে ঐ দুর্গে আরও 200 নূতন লোক আসিলে অবশিষ্ট খাদ্যে আর কতদিন চলিবে ?

7. শত্রুবেষ্টিত এক সৈন্যবাহিনীর 4000 লোকের 56 দিনের খাদ্য ছিল। এক সপ্তাহ পরে হঠাৎ 500 সৈন্য শত্রুব্যূহ ভেদ করিয়া পলায়ন করিল। অবশিষ্ট খাদ্যে অবশিষ্ট লোকের কতদিন চলিবে ? [D. B. 1939]

*8. কোন একটি দুর্গে 1500 সৈন্যের 100 দিনের খাদ্য মজুত ছিল। 40 দিন পরে কিছু সৈন্য অন্যত্র চলিয়া যাওয়ায় অবশিষ্ট সৈন্যের অবশিষ্ট খাদ্যে 90 দিন চলিল। কতজন সৈন্য চলিয়া গিয়াছিল ?

9. 8 জন পুরুষ অথবা 12 জন স্ত্রীলোক একটি কাজ 10 দিনে করিতে পারে। 4 জন পুরুষ এবং 16 জন স্ত্রীলোক কতদিনে ঐ কাজ সমাধা করিতে পারিবে ?

10. যদি 8 জন পুরুষ অথবা 15 জন স্ত্রীলোক 30 দিনে 120 টাকা উপার্জন করে, তবে 21 জন পুরুষ এবং 24 জন স্ত্রীলোক 45 দিনে কত উপার্জন করিবে ?

11. যদি 6টি কামানের সাহায্যে প্রতি 10 মিনিটে 3 বার গোলা ছুঁড়িয়া 60 ঘণ্টায় একটি ধ্বংসকার্য সমাধা করিতে পারা যায়, তবে কতগুলি কামানের সাহায্যে প্রতি 5 মিনিটে 2 বার গোলা ছুঁড়িয়া 15 ঘণ্টায় সেই ধ্বংসকার্য সমাধা করিতে পারা যাইবে ? [D. B. 1941]

12. জনৈক ঠিকাদার 200 দিনে 6 কি. মি. দীর্ঘ একটি রেলপথ নির্মাণ করিয়া দিতে চুক্তিবদ্ধ হইল। ঐ কার্যে 140 জন লোক নিযুক্ত করিয়া 60 দিন পর সে দেখিতে পাইল যে মাত্র $1\frac{1}{2}$ কি. মি. রেলপথ তৈয়ারী হইয়াছে। নির্দিষ্ট সময়ে কাজটি সমাধা করিতে হইলে ঠিকাদারকে আর কতজন লোক নিযুক্ত করিতে হইবে ?

13. একজন ঠিকাদার কোন নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে একটি কাজ শেষ করিয়া দিবার চুক্তিতে ঐ কাজে 55 জন লোক নিযুক্ত করিল এবং উহারা দৈনিক 9 ঘণ্টা করিয়া কাজ করিতে লাগিল; কিন্তু নির্দিষ্ট সময়ের $\frac{3}{4}$ অংশ পরে দেখা গেল, ঐ কাজের $\frac{3}{7}$ অংশ সমাধা হইয়াছে। এখন দৈনিক 11 ঘণ্টা করিয়া কাজ করিবে, এইরূপ শর্তে কতজন লোক নিযুক্ত করিলে নির্দিষ্ট সময়ের মধ্যে কাজটি শেষ করা যাইবে? [C. U. 1911 ; B. C. S. 1934]

*14 40 জন লোক একটি কাজ যতদিনে করিতে পারে, 30 জন লোকের সেই কাজ করিতে তদপেক্ষা আরও 6 দিন বেশী সময় লাগে। 60 জন লোক ঐ কাজ কত দিনে করিতে পারিবে? [W. B. S. B. 1956]

15. 10ই মার্চ সোমবার সন্ধ্যাকালে জনৈক ঠিকাদার 31শে মার্চ সন্ধ্যার পূর্বে একটি জলাধার নির্মাণ করিয়া দিবার চুক্তি করিল। সে 11ই মার্চ সকালে ঐ কার্যে 9 জন লোক নিযুক্ত করিল। তাহারা 25শে মার্চ সন্ধ্যায় ঐ কার্যের $\frac{3}{8}$ অংশ সম্পন্ন করিল। যথাসময়ে কার্যটি সম্পন্ন করিতে ঠিকাদারকে আর কতজন লোক নিযুক্ত করিতে হইয়াছিল? শ্রমিকরা কেহ রবিবার কাজ করে নাই এবং শনিবার অর্ধেক সময় কাজ করিয়াছে।

2. সময়-কার্য

(Time and Work)

[পুনরালোচনা]

সময়-কার্য মূলতঃ ঐকিক নিয়মের অঙ্ক। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর :—

উদাহরণ 1. A, B ও C যথাক্রমে 10, 12 ও 15 দিনে একটি কাজ করিতে পারে; তাহারা একত্রে ঐ কাজ কতদিনে সম্পন্ন করিতে পারে? ঐ সময়ে প্রত্যেকে কাজের কত অংশ করিবে? [U. P. 1922]

A কাজটি করে 10 দিনে; ∴ সে 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{10}$ অংশ,

B " " 12 দিনে; ∴ সে 1 " " " $\frac{1}{12}$ "

এবং C " " 15 দিনে; ∴ সে 1 " " " $\frac{1}{15}$ "

$\therefore$ তাহারা একত্রে 1 দিনে করে কাজটির $(\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15})$ বা $\frac{1}{4}$ অংশ ;

$\therefore$ তাহারা একত্রে সমস্ত কাজটি করে $(1\div\frac{1}{4})$ বা 4 দিনে।

A এই 4 দিনে করে কাজটির $(\frac{1}{10}\times 4)$ বা $\frac{2}{5}$ অংশ
B " " " " " $(\frac{1}{12}\times 4)$ বা $\frac{1}{3}$ "
এবং C " " " " " $(\frac{1}{15}\times 4)$ বা $\frac{4}{15}$ "

উদাহরণ 2. A একা একটি কাজ 12 দিনে এবং B একা 6 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে কাজ আরম্ভ করিবার 2 দিন পরে B চলিয়া গেল। A একা অবশিষ্ট কাজ কতদিনে করিবে? [C. U. 1931]

A ও B 1 দিনে কাজটির $(\frac{1}{12}+\frac{1}{6})$ বা $\frac{1}{4}$ অংশ করে ;

$\therefore$ " " " 2 " " $\frac{1}{4}\times 2$ বা $\frac{1}{2}$ " "

এখন, B চলিয়া গেলে কাজটির বাকি $(1-\frac{1}{2})$ বা $\frac{1}{2}$ অংশ A একা করিবে।

A একা 1 দিনে করে $\frac{1}{12}$ অংশ ;

$\therefore$ A একা $\frac{1}{2}$ অংশ করিবে $(\frac{1}{2}\div\frac{1}{12})$ বা 6 দিনে।

উদাহরণ 3. একটি চৌবাচ্চা দুইটি নল দ্বারা যথাক্রমে 20 ও 30 মিনিটে পূর্ণ হয়। নল দুইটি একত্রে খুলিয়া দেওয়ার কতক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি আর 10 মিনিটে পূর্ণ হইবে? [C. U. 1926]

দ্বিতীয় নলটি আগাগোড়া খোলা থাকিবে। শুধু দ্বিতীয় নলটির দ্বারা শেষের 10 মিনিটে চৌবাচ্চাটির $(\frac{1}{30}\times 10)$ বা $\frac{1}{3}$ অংশ পূর্ণ হইবে।

$\therefore$ প্রথম ও দ্বিতীয় নল একত্রে চৌবাচ্চাটির বাকি $(1-\frac{1}{3})$ বা $\frac{2}{3}$ অংশ পূর্ণ করিবে।

তাহারা 1 মিনিটে পূর্ণ করে চৌবাচ্চাটির $(\frac{1}{20}+\frac{1}{30})$ বা $\frac{1}{12}$ অংশ।

$\therefore$ তাহারা একত্রে চৌবাচ্চার $\frac{2}{3}$ অংশ পূর্ণ করিবে $(\frac{2}{3}\div\frac{1}{12})$ বা 8 মিনিটে।

অতএব, 8 মিনিট পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিতে হইবে।

উদাহরণ 4. A, B এবং C-কে একটি কার্যে নিযুক্ত করা হইল। A একা $12\frac{1}{2}$ দিনে, B একা 10 দিনে এবং C একা 12 দিনে কাজটি করিতে পারে। তাহারা একত্রে কাজটি আরম্ভ করিল ; কিন্তু 1 দিন পরেই A ও C চলিয়া গেল এবং B একাই কাজটি করিতে লাগিল। C চলিয়া যাইবার $3\frac{1}{2}$ দিন পরে D-কে সঙ্গে লইয়া ফিরিয়া

আসিল এবং পুনর্বার কার্যে যোগদান করিল। অবশিষ্ট কাজ তাহারা তিনজনে মাত্র 2 দিনে শেষ করিল। D একা কাজটি কতদিনে সমাধা করিতে পারিত ?

A একা 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{12\frac{1}{2}}$ বা $\frac{2}{25}$ অংশ,

B একা 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{10}$ অংশ

এবং C একা 1 দিনে করে কাজটির $\frac{1}{12}$ অংশ।

∴ তাহারা একত্রে 1 দিনে করে কাজটির $(\frac{2}{25}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12})$ বা $\frac{79}{300}$ অংশ।

A ও C চলিয়া গেলে B একা $3\frac{1}{2}$ দিনে কাজটির $(\frac{1}{10}\times 3\frac{1}{2})$ বা $\frac{7}{20}$ অংশ করিয়াছিল।

∴ তখন বাকি ছিল কাজটির $\{1-(\frac{79}{300}+\frac{7}{20})\}$ বা $\frac{29}{75}$ অংশ।

B, C ও D 2 দিনে এই বাকি অংশটুকু করিয়াছিল।

∴ B, C ও D একত্রে 1 দিনে কাজটির $(\frac{29}{75}\div 2)$ বা $\frac{29}{150}$ অংশ করিয়াছিল।

আবার B ও C একত্রে 1 দিনে কাজটির $(\frac{1}{10}+\frac{1}{12})$ বা $\frac{11}{60}$ অংশ করে।

∴ D একা 1 দিনে কাজটির $(\frac{29}{150}-\frac{11}{60})$ বা $\frac{1}{100}$ অংশ করে।

∴ D একা সম্পূর্ণ কাজটি করিতে পারিত $(1\div\frac{1}{100})$ বা 100 দিনে।

উদাহরণ 5. 33 ডেসি. মি. উচ্চ একটি খুঁটি বাহিয়া উপরে উঠিবার কালে এক শামুক প্রতি মিনিটে পালাক্রমে 7 ডেসি. মি. উপরে উঠে এবং 4 ডেসি. মি. নিম্নে নামিয়া যায়। এইভাবে কতক্ষণে শামুকটি খুঁটির শীর্ষে উঠিতে পারিবে ?

শামুক প্রথম মিনিটে 7 ডেসি. মি. ওঠে এবং দ্বিতীয় মিনিটে 4 ডেসি. মি. নামিয়া যায়। এইভাবে প্রতি 2 মিনিটে সে (7−4) বা 3 ডেসি. মি. উপরে উঠিতে পারে।

এইভাবে উঠা-নামা করিতে করিতে শামুক শেষ সময়ে 7 ডেসি. মি. বা তাহার কিছু কম উঠিয়া খুঁটির শীর্ষে পৌছে। যদি শেষ 1 মিনিটে শামুক 7 ডেসি. মি. উঠিয়া থাকে, তবে তাহাকে (33−7) বা 26 ডেসি. মি.-এর মধ্যে উঠ-নামা করিতে হয়। 26, 3 দ্বারা বিভাজ্য নহে। সুতরাং শামুক শেষ সময়ে 7 ডেসি. মি.-এর কম উঠিয়াছিল। 26-এর পরবর্তী সংখ্যা 27-ই 3 দ্বারা বিভাজ্য। সুতরাং এই 27 ডেসি. মি.-এর মধ্যেই শামুক ওঠা-নামা করিয়াছিল।

শামুক ওঠা-নামা করিয়া 3 ডেসি. মি. উপরে ওঠে 2 মিনিটে,

∴ " " " 27 " " " 2×9 বা 18 মিনিটে।

শামুক 27 ডেসি. মি. উঠিবার পর খুঁটির বাকি থাকে $(33-27)$ বা 6 ডেসি. মি.।

1 মিনিটে 7 ডেসি. মি. উঠিলে শামুক এই 6 ডেসি. মি. উঠে $\frac{6}{7}$ মিনিটে।

∴ শামুক খুঁটির শীর্ষে আরোহণ করে $(18+\frac{6}{7})$ বা $18\frac{6}{7}$ মিনিটে।

প্রশ্নমালা 8

1. A, B এবং C একটি কার্য যথাক্রমে 6, 10 ও 15 দিনে করিতে পারে। তাহারা একসঙ্গে কাজটি কতদিনে শেষ করিবে? [W. B. S. B. 1952]

2. একটি চৌবাচ্চা A ও B নলদ্বারা যথাক্রমে 3 ঘণ্টা ও 5 ঘণ্টায় পূর্ণ হয় এবং C নল দ্বারা $7\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় খালি হয়। তিনটি নল একসঙ্গে খুলিয়া দিলে কতক্ষণে শূন্য চৌবাচ্চা পূর্ণ হইবে?

3. A একটি কার্যের $\frac{7}{10}$ অংশ 14 দিনে সম্পন্ন করিয়া অবশিষ্ট কার্য B-এর সহিত 2 দিনে সমাধা করিল। B একা সম্পূর্ণ কার্যটি কতদিনে করিতে পারিবে?

4. A ও B একটি কার্য 12 দিনে, B ও C উহা 15 দিনে এবং C ও A উহা 20 দিনে করিতে পারে। A একা কাজটি কতদিনে শেষ করিবে? [C. U. 1939]

5. একটি কার্য A একা 12 দিনে এবং B একা 6 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে 2 দিন কার্য করিবার পর B চলিয়া গেল। A একা আর কতদিনে কার্যটি শেষ করিতে পারিবে? [C. U. 1931]

6. A ও B একত্রে একটি কার্যের $\frac{3}{4}$ অংশ 9 দিনে করিতে পারে। যদি A একা B-এর 3 গুণ কার্য করিতে পারে, তবে কে কতদিনে কার্যটি করিতে পারিবে?

7. A ও B একত্রে একটি কাজ 12 দিনে এবং B ও C একত্রে ঐ কাজ 16 দিনে করিতে পারে। A ঐ কাজ 5 দিন এবং B 7 দিন করিবার পর অবশিষ্ট কাজ C 13 দিনে শেষ করিল। প্রত্যেকে পৃথক পৃথকভাবে ঐ কাজ কতদিনে করিতে পারিবে?

8. A ও B 10 দিনে, B ও C 15 দিনে এবং A ও C 25 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। তাহারা একত্রে 4 দিন কাজ করিবার পর A চলিয়া গেল। ইহার পর B ও C একত্রে 5 দিন কাজ করিবার পর B চলিয়া গেল। C একা আর কতদিনে কাজটি শেষ করিবে? [C. U. 1941]

9. A ও B একত্রে একটি কার্য 12 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে 2 দিন কার্য করিবার পর C আসিয়া তাহাদের সহিত যোগদান করিল এবং আর $6\frac{1}{4}$ দিনে কার্যটি সম্পন্ন হইল। C এবং A-র কর্মক্ষমতা যদি সমান হয়, তবে B একা কতদিনে কার্যটি সম্পন্ন করিতে পারিবে? [A. U. 1903]

10. একই সময়ে A একা যে পরিমাণে কার্য করিতে পারে, B ও C একত্রে সেই পরিমাণ কার্য করিতে পারে। A ও B একত্রে একটি কার্য 9 ঘণ্টা 36 মিনিটে এবং C একা উহা 48 ঘণ্টায় করিতে পারে। B একা ঐ কার্য কতক্ষণে করিবে?

11. A $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় একটি কার্যের $\frac{1}{2}$, B $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় অবশিষ্টের $\frac{1}{4}$ এবং C $5\frac{1}{4}$ ঘণ্টায় কার্যটির অবশিষ্টাংশ সম্পন্ন করে। তাহারা একত্রে কার্যটি কতক্ষণে সম্পন্ন করিবে? [P. U. 1903]

12. 40 জন লোক 40 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। যদি প্রতি দশম দিনে 5 জন করিয়া লোক কাজ ছাড়িয়া চলিয়া যায়, তবে কত সময়ে সম্পূর্ণ কাজটি সম্পন্ন হইবে? [A. U. 1892 ; D. B. 1940 (Addl.)]

13. যদি 12 জন লোক ও 10 জন বালক একত্রে 3 দিনে একটি কাজের $\frac{2}{9}$ অংশ করিতে পারে এবং 4 জন লোক ও 5 জন বালক একত্রে 7 দিনে ঐ কাজের $\frac{1}{27}$ অংশ করিতে পারে, তবে 7 জন লোক ঐ কাজটি কতদিনে করিবে? [C. U. 1942]

***14.** 3 জন পুরুষ এবং 8 জন স্ত্রীলোক 24 দিনে একটি রাস্তা তৈয়ারি করিতে পারে। 5 জন পুরুষ এবং 14 জন স্ত্রীলোক ঐ রাস্তা 14 দিনে তৈয়ারি করিতে পারে। 7 জন পুরুষ এবং 10 জন স্ত্রীলোক ঐ কার্যটি আরম্ভ করিয়া 3 দিন পর চলিয়া গেল। এখন 8 জন পুরুষ এবং 6 জন স্ত্রীলোক অবশিষ্ট কার্য কতদিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে? [D. B. 1924]

15. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। প্রথমটি দ্বারা চৌবাচ্চাটি 40 মিনিটে পূর্ণ হয় এবং দ্বিতীয়টি দ্বারা উহা এক ঘণ্টায় খালি হয়। নল দুইটি যদি পালাক্রমে এক মিনিট করিয়া খুলিয়া দেওয়া হয়, তবে কতক্ষণে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে?

16. একটি চৌবাচ্চা দুইটি নল দ্বারা পৃথক পৃথক ভাবে 12 মিনিট ও 16 মিনিটে পূর্ণ হইতে পারে ; কিন্তু জল নিষ্কাশনের নলটি খোলা থাকিলে তিনটি নল 15 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করে। অপর দুইটি নল বন্ধ-থাকা অবস্থায় জল নিষ্কাশনের নলটি কতক্ষণে জলপূর্ণ চৌবাচ্চা জলশূন্য করিবে? [C. U. 1938, 1951]

চতুর্থ অধ্যায়

সময় ও দূরত্ব
(Time and Distance)

[পুনরালোচনা]

বেগ : কোন ধাবমান বস্তু একক সময়ে যতখানি পথ অতিক্রম করে তাহার দৈর্ঘ্যকে উহার **বেগ** (Speed) বলে।

উদাহরণ। এক ব্যক্তি সাইকেলে 2 ঘণ্টায় 30 কিলোমিটার যায়। এক্ষেত্রে তাহার বেগ ঘণ্টায় $\frac{30}{2}$ বা 15 কিলোমিটার বলা হয়।

এই সম্পর্কে নিম্নলিখিত সূত্রগুলি মনে রাখা কর্তব্য :—

(i) দূরত্ব = বেগ × সময়, (ii) বেগ = দূরত্ব ÷ সময়, (iii) সময় = দূরত্ব ÷ বেগ

আপেক্ষিক বেগ (Relative Velocity) :

দুইটি গতিশীল বস্তু যখন পরস্পরের দিকে অগ্রসর হয় অথবা উহারা যখন এক দিকে বিভিন্ন গতিতে অগ্রসর হয়, তখন সেই গতিবেগকে **আপেক্ষিক গতিবেগ** (Relative Velocity) বলে এবং দুইটি ধাবমান বস্তুর মধ্যের দূরত্বকে **আপেক্ষিক দূরত্ব** (Relative Distance) বলে।

যখন দুইটি বস্তু বিপরীত দিকে অগ্রসর হয়, তখন উহাদের আপেক্ষিক বেগ হয় ধাবমান বস্তু দুইটির প্রকৃত গতিবেগের সমষ্টি। কিন্তু যখন দুইটি বস্তু একই দিকে অগ্রসর হয়, তখন তাহাদের আপেক্ষিক গতিবেগ হয় ধাবমান বস্তু দুইটির প্রকৃত গতিবেগের অন্তরফল। আপেক্ষিক দূরত্বকে আপেক্ষিক গতিবেগ দ্বারা ভাগ করিলে ধাবমান বস্তু দুইটি কত সময় পরে মিলিত হইবে, তাহা পাওয়া যায়।

সময় ও দূরত্ব বিষয়ক অঙ্ক কষিবার সময় নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখা একান্ত প্রয়োজন।

(i) দুইটি ট্রেন যদি বিপরীত দিকে অগ্রসর হয়, তাহা হইলে পরস্পর পরস্পরকে

$$\text{অতিক্রম করিবার সময়} = \frac{\text{ট্রেন দুইটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি}}{\text{ট্রেন দুইটির গতিবেগের সমষ্টি}}$$

(ii) দুইটি ট্রেন যদি একই দিকে অগ্রসর হয়, তাহা হইলে পরস্পর পরস্পরকে

$$\text{অতিক্রম করিবার সময়} = \frac{\text{ট্রেন দুইটির দৈর্ঘ্যের সমষ্টি}}{\text{ট্রেন দুইটির গতিবেগের অন্তরফল}}$$

(iii) কোনও ট্রেন বা ট্রাম যখন দৈর্ঘ্যবিহীন কোনও বস্তুকে অতিক্রম করে তখন সে নিজ দৈর্ঘ্যের সমান পথ অতিক্রম করে। আসলে ট্রেন বা ট্রামের নিজ দৈর্ঘ্যের সমান দূরত্বে যাইতে যে সময় লাগে, ট্রেনটির বা ট্রামটির দৈর্ঘ্যবিহীন বস্তুটিকে অতিক্রম করিতেও সেই সময় লাগে।

(iv) কোন সেতু বা প্ল্যাটফর্ম অতিক্রম করিতে হইলে ট্রেনটিকে সেতু বা প্ল্যাটফর্ম এবং ট্রেনের দৈর্ঘ্যদ্বয়ের সমষ্টির সমান দূরত্ব অতিক্রম করিতে হয়; অর্থাৎ, সেতু বা প্ল্যাটফর্মকে অতিক্রম করিবার সময়

$$=\frac{\text{ট্রেনটির দৈর্ঘ্য}+\text{প্লাটফর্মের বা সেতুর দৈর্ঘ্য}}{\text{ট্রেনটির গতিবেগ}}$$

(v) যদি দুইটি ট্রেন একই দিকে বা বিপরীত দিকে অগ্রসর হয় তাহা হইলে প্রথম ট্রেনের আরোহীকে দ্বিতীয় ট্রেনের অতিক্রম করিবার সময়

$$=\frac{\text{দ্বিতীয় ট্রেনের দৈর্ঘ্য}}{\text{উভয় ট্রেনের আপেক্ষিক গতিবেগ}}$$

(vi) নৌকা বা জাহাজ বা সাঁতারু যখন স্রোতের অনুকূলে যায় তখন স্রোতের ফলে গতি হইবে, তাহার নিজের গতি এবং স্রোতের গতির সমষ্টি; কিন্তু যদি স্রোতের প্রতিকূলে যায় তখন তাহার গতি হইবে, নিজের গতি এবং স্রোতের অন্তরফল।

(vii) দুই ব্যক্তি যদি কোন বৃত্তাকার পথের একই স্থান হইতে একসঙ্গে রওনা হইয়া একই দিকে বিভিন্ন গতিবেগে চলিতে থাকে, তবে যখন তাহাদের অতিক্রান্ত পথের অন্তর বৃত্তের পরিধির সমান হইবে, তখন তাহারা পরস্পর পুনরায় মিলিত হইবে; আর যদি তাহারা বিপরীত দিকে চলিতে থাকে, তাহা হইলে যখন তাহাদের অতিক্রান্ত পথের সমষ্টি বৃত্তের পরিধির সমান হইবে, তখন তাহারা পরস্পর পুনরায় মিলিত হইবে।

উদাহরণ 1. A এবং B-এর মধ্যে দূরত্ব 45 কি.মি.। বেলা 12টার সময় তাহারা দুজনেই পরস্পরের দিকে রওনা হইল। A ঘণ্টায় 6 কি.মি. ও B ঘণ্টায় 4 কি.মি. পথ চলিতে পারে। কখন এবং কোথায় তাহারা পরস্পরের সহিত মিলিত হইবে?

A এবং B-এর মধ্যে দূরত্ব 45 কি.মি.। তাহারা যখন মিলিত হইবে, তখন তাহাদের মধ্যে কোন দূরত্ব থাকিবে না, অর্থাৎ এই 45 কি.মি. দূরত্ব হ্রাসপ্রাপ্ত হইবে।

A এবং B-এর মধ্যে $(6+4)$ বা 10 কি.মি. দূরত্ব কমে প্রতি 1 ঘণ্টায়

∴ " " " " মোট 45 " " কমিয়া যায় $\frac{1}{10} \times 45$ "

বা $4\frac{1}{2}$ "

∴ তাহারা $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরে মিলিত হয়।

আবার, তাহারা রওনা হইয়াছিল বেলা 12 টায় ;

∴ তাহারা যখন মিলিত হইবে, তখন বেলা 12টা $+4\frac{1}{2}$ ঘণ্টা বা বেলা $4\frac{1}{2}$টা।

∴ A, $6 \times 4\frac{1}{2}$ বা 27 কি.মি. দূরে যাইয়া B-এর সহিত মিলিত হইবে।

উদাহরণ 2. দুই পথিকের মধ্যে দূরত্ব 12 কি.মি.। অগ্রবর্তী পথিক ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ কি মি. ও পশ্চাদ্বর্তী পথিক ঘণ্টায় $5\frac{1}{2}$ কি মি. হাঁটে। পশ্চাদ্বর্তী পথিক কতদূরে যাইয়া অগ্রবর্তী পথিককে অতিক্রম করিবে ?

পশ্চাদ্বর্তী পথিক 12 কি.মি. পশ্চাতে রহিয়াছে। সুতরাং সে যখন অগ্রবর্তী পথিককে অতিক্রম করিবে, তখন তাহাকে অগ্রবর্তী পথিক অপেক্ষা 12 কি.মি. পথ বেশী হাঁটিতে হইবে।

পশ্চাদ্বর্তী পথিক অগ্রবর্তী পথিক অপেক্ষা $(5\frac{1}{2}-3\frac{1}{2})$ বা 2 কি.মি. বেশী হাঁটে 1 ঘণ্টায়।

∴ পশ্চাদ্বর্তী পথিক অগ্রবর্তী পথিক অপেক্ষা 12 কি. মি. বেশী হাঁটিবে $\frac{12}{2}$ বা 6 ঘণ্টায়।

এই 6 ঘণ্টায় পশ্চাদ্বর্তী পথিক যাইবে $6 \times 5\frac{1}{2}$ বা 33 কি. মি.।

∴ নির্ণেয় দূরত্ব $=33$ কি. মি.।

উদাহরণ 3. কোন ব্যক্তিকে নির্দিষ্ট সময়ে পথ অতিক্রম করিতে হইবে। যদি সে ঘণ্টায় 5 কি. মি. হাঁটে তবে তাহার পৌঁছিতে 5 মিনিট বিলম্ব হয় ; যদি সে ঘণ্টায় 6 কি. মি. হাঁটে তবে সে 10 মিনিট পূর্বে পৌঁছায়। গন্তব্য পথের দূরত্ব কত ?

ঘণ্টায় 5 কি. মি. বেগে গেলে 1 কি.মি. যাইতে সময় লাগে $\frac{1}{5}$ ঘ. $=12$ মিনিট

এবং " 6 " " " 1 " " " " $\frac{1}{6}$ ঘ. $=10$ মিনিট।

∴ গতিবেগ বৃদ্ধি করিলে ব্যক্তিটির কিলোমিটারে সময় কম লাগে $(12-10)$ বা 2 মিনিট এবং মোট সময় কম লাগে $(5+10)$ বা 15 মিনিট।

এখন 2 মিনিট সময় কম লাগে 1 কি. মি. যাইতে

∴ 15 " " " " $\frac{15}{2}$ বা $7\frac{1}{2}$ কি. মি. যাইতে।

∴ গন্তব্য পথের দূরত্ব $=7\frac{1}{2}$ কি. মি।

উদাহরণ 4. 110 মিটার এবং 88 মিটার দীর্ঘ দুইখানি ট্রেনের গতিবেগ যথাক্রমে ঘণ্টায় 35·2 কি. মি. এবং 44 কি. মি.। তাহাদের পরস্পরকে অতিক্রম করিতে কত সময় লাগিবে (i) যখন তাহারা একই দিকে যায় এবং (ii) যখন তাহারা পরস্পর বিপরীত দিকে যায় ?

(i) ট্রেন দুইটির গতিবেগ একই দিকে হইলে তাহাদের আপেক্ষিক গতিবেগ হয় ঘণ্টায় (44 − 35·2) বা 8·8 কি. মি.। এই গতিবেগে তাহাদের দৈর্ঘ্যসমষ্টি বা (110 + 88) বা 198 মিটার অতিক্রম করিতে যে সময় লাগে, সেই সময়ে তাহারা পরস্পরকে অতিক্রম করিবে।

8·8 কি. মি. বা 8800 মিটার অতিক্রম করে 60×60 সেকেণ্ডে

∴ 198 " " " $\frac{60 \times 60 \times 198}{8800}$ বা 81 সেকেণ্ডে।

∴ নির্ণেয় সময় = 81 সেকেণ্ড বা 1 মি. 21 সে.।

(ii) ট্রেন দুইটির গতিবেগ পরস্পর বিপরীত দিকে হইলে আপেক্ষিক গতিবেগ হয় ঘণ্টায় (44 + 35·2) বা 79·2 কি. মি.। এই গতিবেগে ট্রেন দুইটির দৈর্ঘ্যসমষ্টি (110 + 88) বা 198 মিটার অতিক্রম করিতে যে সময় লাগে, সেই সময়ে তাহারা পরস্পরকে অতিক্রম করিবে।

79·2 কি.মি. বা 79200 মি. অতিক্রম করে উহারা 60×60 সেকেণ্ডে

∴ 198 " " " " $\frac{60 \times 60 \times 198}{79200}$ বা 9 সেকেণ্ডে।

∴ নির্ণেয় সময় = 9 সেকেণ্ড।

উদাহরণ 5. এক মাঝি স্রোতের অনুকূলে দাঁড় বাহিয়া ঘণ্টায় 6 কি. মি. যায়। যদি স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 2 কি. মি. হয়, তাহা হইলে স্রোতের অনুকূলে 20 কি. মি. যাইয়া প্রতিকূলে ফিরিয়া আসিতে ঐ মাঝির কত সময় লাগিবে ?

মাঝি স্রোতের অনুকূলে 1 ঘণ্টায় যায় 6 কি. মি.।

∴ তাহার স্রোতের অনুকূলে 20 কি. মি. যাইতে সময় লাগে ($\frac{1}{6} \times 20$) বা $3\frac{1}{3}$ ঘণ্টা।

আবার, নৌকার বেগ + স্রোতের বেগ = ঘণ্টায় 6 কি. মি.

এবং স্রোতের বেগ = ঘণ্টায় 2 কি. মি.।

সুতরাং, নৌকার নিজস্ব বেগ = ঘণ্টায় (6 − 2) বা 4 কি. মি.।

∴ স্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ = নৌকার নিজস্ব বেগ − স্রোতের বেগ
= ঘণ্টায় (4−2) বা 2 কি. মি.।

∴ মাঝির স্রোতের প্রতিকূলে 20 কি. মি. ফিরিয়া আসিতে সময় লাগে $(\frac{1}{2} \times 20)$ বা 10 ঘণ্টা।

∴ নির্ণেয় সময় = $(3\frac{1}{3}+10)$ বা $13\frac{1}{3}$ ঘণ্টা = 13 ঘ. 20 মি.।

উদাহরণ 6. একখানি ট্রেন 400 মি. দীর্ঘ এবং 708 মি. দীর্ঘ দুইটি সেতু যথাক্রমে 24 সেকেণ্ডে এবং 38 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিয়া গেল। ট্রেনখানির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ নির্ণয় কর।

ট্রেনটি 38 সেকেণ্ডে যায় ট্রেনের দৈর্ঘ্য + 708 মিটার

আবার, 24 " " " " + 400 মিটার

∴ ট্রেনটি 14 সেকেণ্ডে যায় 308 মিটার

∴ " 1 " " $\frac{308}{14}$ বা 22 মিটার

∴ " 24 " " 24×22 বা 528 মিটার।

এখন, ট্রেনের দৈর্ঘ্য + 400 মিটার = 528 মিটার

∴ ট্রেনের দৈর্ঘ্য = (528 − 400) বা 128 মিটার।

আবার, ট্রেনটি 1 সেকেণ্ডে যায় 22 মিটার

∴ " 1 ঘণ্টায় যায় $22 \times 60 \times 60$ মিটার বা 79·2 কি. মি.।

∴ ট্রেনটির গতিবেগ ঘণ্টায় 79·2 কি. মি.।

উদাহরণ 7. A ও B 18 কি. মি. পরিধিবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার পথের একই স্থান হইতে একই সময়ে রওনা হইল। A ঘণ্টায় $3\frac{3}{4}$ কি. মি. এবং B ঘণ্টায় $2\frac{1}{4}$ কি.মি. হাঁটে। তাহারা পুনরায় কখন্ মিলিত হইবে (i) যদি তাহারা একই দিকে হাঁটে; এবং (ii) যদি তাহারা বিপরীত দিকে হাঁটে ?

(i) একই দিকে হাঁটিলে প্রতি ঘণ্টায় A, B অপেক্ষা বেশী যায় $(3\frac{3}{4}-2\frac{1}{4})$ বা $1\frac{1}{2}$ কি. মি.।

∴ A, B অপেক্ষা 18 কি. মি. বেশী যাইবে $(18 \div 1\frac{1}{2})$ বা 12 ঘণ্টায়।

∴ একই দিকে হাঁটিলে A ও B পুনরায় 12 ঘণ্টা পর পরস্পর মিলিত হইবে।

(ii) বিপরীত দিকে হাঁটিলে প্রতি ঘণ্টায় A ও B-এর মধ্যে দূরত্ব কমে $(3\frac{3}{4}+2\frac{1}{4})$ বা 6 কি. মি.।

∴ তাহাদের মধ্যে 18 কি. মি. দূরত্ব কমিবে $\frac{18}{6}$ বা 3 ঘণ্টায়।

∴ বিপরীত দিকে হাঁটিলে A ও B পুনরায় 3 ঘণ্টা পর পরস্পর মিলিত হইবে।

উদাহরণ 8. সকাল 7টায় কলিকাতা হইতে একটি ট্রেন যাত্রা করিয়া বেলা 11টায় বর্ধমান পৌঁছিল এবং সকাল 8টায় বর্ধমান হইতে অপর একটি ট্রেন যাত্রা করিয়া বেলা 10-30 মিনিটে কলিকাতা পৌঁছিল। পথিমধ্যে কখন্ তাহারা পরস্পর মিলিত হইয়াছিল? [D. B 1940]

কলিকাতা-ত্যাগী ট্রেনের বর্ধমান যাইতে সময় লাগে $(11-7)$ বা 4 ঘণ্টা।

∴ 1 ঘণ্টায় উহা গন্তব্য পথের $\frac{1}{4}$ অংশ যায়।

বর্ধমান-ত্যাগী ট্রেনের কলিকাতা যাইতে সময় লাগে $(10\frac{1}{2}-8)$ বা $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা।

∴ 1 ঘণ্টায় উহা গন্তব্য পথের $(1\div 2\frac{1}{2})$ বা $\frac{2}{5}$ অংশ যায়।

8টার সময় বর্ধমান-ত্যাগী ট্রেন যখন কলিকাতা যাত্রা করে, তখন $(8-7)$ 1 ঘণ্টায় কলিকাতা-ত্যাগী ট্রেন গন্তব্য পথের $\frac{1}{4}$ অংশ অতিক্রম করিয়াছে।

∴ তখন উভয় ট্রেনের মধ্যে দূরত্ব = মোট পথের $(1-\frac{1}{4})$ বা $\frac{3}{4}$ অংশ।

এখন, মোট পথের $(\frac{1}{4}+\frac{2}{5})$ বা $\frac{13}{20}$ অংশ তাহারা অতিক্রম করে 1 ঘণ্টায়,

∴ মোট পথের $\frac{3}{4}$ অংশ তাহারা অতিক্রম করে $\frac{20}{13}\times\frac{3}{4}$ বা $1\frac{2}{13}$ ঘণ্টায়।

∴ তাহারা মিলিত হয় বেলা 8টা বাজিবার $1\frac{2}{13}$ ঘণ্টা বা 1 ঘ. $9\frac{3}{13}$ মি. পরে, অর্থাৎ সকাল (8+1 ঘ $9\frac{3}{13}$ মি.) বা সকাল 9টা $9\frac{3}{13}$ মিনিটে।

***উদাহরণ 9.** ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার বেগে কোনও এক স্থান অভিমুখে আসিতেছে, এমন একজন লোকের সহিত সাক্ষাৎ করিবার জন্য সেই স্থান হইতে 10 মিনিট পর পর ঘণ্টায় 15 কিলোমিটার-গামী দূত প্রেরণ করা হইতেছে। কতক্ষণ পর পর দূতগণের সহিত সেই লোকটির সাক্ষাৎ হইবে?

দূতদিগকে 10 মিনিট পর পর পাঠানো হইতেছে।

দূত 1 ঘণ্টায় যায় 15 কি. মি.; সুতরাং 10 মিনিটে যায় $\frac{15}{60}\times 10$ বা $\frac{5}{2}$ কি. মি.।

∴ প্রথম দূতের সহিত লোকটির যখন সাক্ষাৎ হয়, তখন দ্বিতীয় দূত এবং লোকটির মধ্যে দূরত্ব $\frac{5}{2}$ কি. মি.।

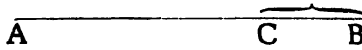
দ্বিতীয় দূত ও লোকটি যখন পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইবে, তখন প্রতি ঘণ্টায় তাহাদের মধ্যে দূরত্ব কমিবে (10+15) বা 25 কি. ম.।

তাহাদের মধ্যে 1 কি. মি. দূরত্ব কমিবে $\frac{1}{25}$ ঘণ্টায় ;

∴ তাহাদের মধ্যে 1 কি. মি. দূরত্ব কমিবে $\frac{1}{25}\times\frac{5}{2}$ ঘণ্টায় বা 6 মিনিটে।

∴ নির্ণেয় সময় = 6 মিনিট।

***উদাহরণ 10.** একটি দুর্গ হইতে 2 মিনিট পর পর কামান দাগানো হইতেছিল এবং দুর্গাভিমুখী একজন শকটারোহী $1\frac{14}{15}$ মিনিট পর পর সেই শব্দ শুনিতেছিল। শব্দের গতিবেগ প্রতি সেকেণ্ডে 338 মিটার হইলে শকটটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার ছিল ?

A C B

মনে কর, A বিন্দু হইতে 2 মিনিট পর পর কামান দাগানো হইতেছিল। শকটারোহী B বিন্দুতে থাকিলে, AB-এর দূরত্ব যাহাই হউক-না-কেন, সে 2 মিনিট পর পরই কামানের শব্দ শুনিতে পাইত। কিন্তু শকটারোহী A-র দিকে অগ্রসর হইতেছিল বলিয়া, মনে কর C বিন্দুতে আসিয়া দ্বিতীয়বার শব্দ শুনিল।

∴ শকটারোহী $1\frac{14}{15}$ মিনিটে BC পথ গেল এবং $(2-1\frac{14}{15})$ মিনিট বা 4 সেকেণ্ড পূর্বেই দ্বিতীয়বার শব্দ শুনিল ; কারণ তখন শব্দ CB পথ কম গিয়াছিল।

∴ শব্দ CB পথ গেল 4 সেকেণ্ডে।

এখন, শকটারোহী $1\frac{14}{15}$ মিনিট বা 116 সেকেণ্ডে যে পথ গেল, শব্দ 4 সেকেণ্ডে সেই পথ গেল।

∴ শকটারোহীর গতিবেগ × তাহার সময় = শব্দের গতিবেগ × তাহার সময়

∴ শকটারোহীর গতিবেগ × 116 সেকেণ্ড = (338 × 4) মিটার

∴ শকটারোহীর গতিবেগ = $\frac{338\times4}{116}$ মিটার প্রতি সেকেণ্ডে

$=\frac{338\times4\times60\times60}{116\times1000}$ বা $41\frac{139}{145}$ কি. মি. প্রতি ঘণ্টায়।

প্রশ্নমালা 9

1. A এবং B দুইজনে 72 কি. মি. দূরবর্তী স্থান হইতে একই সময় পরস্পরের দিকে রওনা হইল। যদি তাহাদের গতিবেগ ঘণ্টায় যথাক্রমে $10\frac{1}{2}$ কি. মি ও $13\frac{1}{2}$ কি. মি. হয়, তবে কতক্ষণ পরে তাহারা মিলিত হইবে ?

2. দুইটি শহর হইতে দুইটি ট্রেন একই সময়ে রওনা হইয়া পরস্পরের দিকে ধাবিত হইল। তাহাদের গতিবেগ যথাক্রমে 45 কি. মি. ও 75 কি. মি.। যখ তাহারা পরস্পর মিলিত হয়, তখন একটি ট্রেন, অপর ট্রেন অপেক্ষা 150 কি. মি. অধি পথ অতিক্রম করে। স্থান দুইটির দূরত্ব কত ?

3. সকাল 6টা 15 মিনিটে এক ব্যক্তি ঘণ্টায় $5\frac{1}{4}$ কি. মি. বেগে একস্থান হইতে হাঁটিতে আরম্ভ করিল। সকাল 7টা 25 মিনিটে একটি ঘোড়ার গাড়ী সেই স্থা হইতে যাত্রা করিয়া ঘণ্টায় $13\frac{1}{2}$ কি. মি. বেগে লোকটির অনুসরণ করিতে লাগিল কয়টার সময় ঘোড়ার গাড়ী লোকটিকে অতিক্রম করিবে ?

4. এক শিকারী কুকুর যখন এক খরগোসকে তাড়া করে, তখন খরগোস তাহ নিজের লাফের 60 লাফ দূরে আছে। যে সময়ে খরগোস 5 লাফ দেয়, কুকুর সে সময়ে 4 লাফ দেয়। এক লাফে খরগোস 4 মিটার এবং কুকুর 3 মিটার অতিক্র করে। কুকুর কত লাফে খরগোসকে ধরিবে ?

5. একটি ট্রেন উহার স্বাভাবিক বেগের $\frac{4}{5}$ বেগে চলিয়া $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা বিল গন্তব্যস্থলে পৌছায়। ট্রেনটি স্বাভাবিক বেগে চলিলে কতক্ষণে গন্তব্যস্থ পৌছিবে ?

6. 25 মিটার দীর্ঘ একটি ট্রাম ঘণ্টায় 30 কি. মি. যায়। ট্রামটি কতক্ষণে রাস্ত দণ্ডায়মান এক ব্যক্তিকে অতিক্রম করিবে ?

7. 300 মিটার লম্বা একটি প্ল্যাটফর্মের উপর দাঁড়াইয়া এক ব্যক্তি দেখিল একখানি ট্রেন তাহাকে এবং প্ল্যাটফর্মটিকে যথাক্রমে 9 সেকেণ্ডে ও 27 সেকেণ্ডে অতিক্র করিল। ট্রেনটির দৈর্ঘ্য ও গতিবেগ কত ?

8. A এবং B একটি বৃত্তাকার পথের এক স্থান হইতে একসঙ্গে যাত্রা আর করিল। A 30 মিনিটে এবং B 40 মিনিটে পথটি অতিক্রম করিতে পারে কখন্ তাহারা মিলিত হইবে (i) যদি তাহারা একই দিকে হাঁটে, (ii) যদি তাহা বিপরীত দিকে হাঁটে ?

9. একটি ট্রেন হাওড়া হইতে সকাল 8টায় রওনা হইয়া বেলা 10টা 30 মিনিটে বর্ধমান পৌছিল। অপর একটি ট্রেন বর্ধমান হইতে সকাল 8টা 30 মিনিটে রওনা হইয়া বেলা 10টায় হাওড়া পৌছিল। উহারা কখন্ মিলিত হইয়াছিল ?

10. দুইটি ট্রেনের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 90 মিটার ও 135 মিটার। তাহারা যথাক্রমে 105·6 কি. মি. এবং 84·48 কি. মি. বেগে পরস্পর বিপরীত দিকে যাইতেছে। তাহাদের মধ্যে সাক্ষাৎ হইবার কতক্ষণ পরে একে অন্যকে অতিক্রম করিবে ?

*11. এক ব্যক্তি কোন বাসের পথ ধরিয়া চলিতেছিল। ঐ পথে একই দিকে 10 মিনিট পর পর বাস ছাড়ে। বাসের গতিবেগ ঘণ্টায় 14 কি. মি. 80 মি. এবং এক-একখানি বাস লোকটিকে 15 মিনিট পর পর অতিক্রম করিতেছিল। (i) লোকটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত ? (ii) সে যদি বিপরীত দিকে চলিত, তবে কতক্ষণ পর পর বাসগুলির সহিত তাহার সাক্ষাৎ হইত ?

12. A, B ও C 1·76 কি. মি. পরিধিবিশিষ্ট বৃত্তাকার পথে একই স্থান হইতে একই দিকে চলিতে লাগিল। A মিনিটে 126 মিটার, B 141 মিটার ও C 166 মিটার যায়। এক সময়ে দেখা গেল যে B, C-এর 975 মিটার ও C, A-র 200 মিটার পশ্চাতে আছে। (i) কতক্ষণ পূর্বে তাহারা একত্র ছিল ? (iii) কতক্ষণ পরে তাহারা প্রথম একত্র হইবে ? (iii) ঐ পথে তাহাদের মিলনস্থল কয়টি ?

13. নৌকায় দাঁড় বাহিয়া এক মাঝি স্রোতের অনুকূলে 3 ঘণ্টায় 30 কি. মি. যাইয়া 9 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। দাঁড়ের বেগ ও স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

14. নদীতে স্রোত থাকিলে একটি নৌকা দাঁড় বাহিয়া ঘণ্টায় ৬ কি. মি. যায় ; আর যদি নদীতে ভাটা থাকে, তবে দাঁড় বাহিয়া যে সময়ে সমুদ্রের দিকে যাওয়া যায়, উজান আসিতে তাহার দ্বিগুণ সময় লাগে। নদীর স্রোতের বেগ কত ?

*15. কোন স্থান হইতে 10 মিনিট পর পর তোপধ্বনি করা হইতেছিল। এক শকটারোহী ঘণ্টায় 35 কি. মি. বেগে ঐ স্থানাভিমুখে আসিতেছিল। শব্দের গতি সেকেণ্ডে $216\frac{18}{88}$ মিটার হইলে ঐ ব্যক্তি কতক্ষণ অন্তর তোপধ্বনি শুনিতেছিল ?

16. রেল লাইনের পাশ দিয়া এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 6 কি. মি. বেগে কোন ষ্টেশনের দিকে যাইতেছিল। পশ্চাৎ দিক হইতে আসিয়া 250 মিটার দীর্ঘ একটি ট্রেন লোকটিকে 30 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিল এবং উহার 15 মিনিট পর ষ্টেশনে পৌছিল। লোকটি কতক্ষণ পর ষ্টেশনে পৌছিয়াছিল ?

পঞ্চম অধ্যায়

1. শতকরা হিসাব

(Percentage)

[পুনরালোচনা]

'শতকরা' (Percent) কথাটির অর্থ হইতেছে 'প্রতি শ'তে'। শতকরা বুঝাইতে '%'—এই চিহ্ন ব্যবহার করা হয়।

শতকরা হিসাব দ্বারা সামান্য ভগ্নাংশের ন্যায় কোন বস্তুর অংশ প্রকাশিত হয়। যেমন, কোন বস্তুর $\frac{17}{100}$ ও 17% একই কথা।

আবার, কোন বস্তুর $\frac{1}{8}$ বা $\frac{1\times\frac{100}{8}}{8\times\frac{100}{8}}$ বা $\frac{12\frac{1}{2}}{100}$ একই কথা ;

স্বতরাং, $\frac{1}{8}$ ও $12\frac{1}{2}$% একই কথা।

শতকরা হারের সংখ্যাটিকে "লব" এবং 100-কে "হর" হিসাবে লিখিলেই শতকরা হারটি তুল্যমান ভগ্নাংশে রূপান্তরিত হয়। কোন সংখ্যার 100% বলিলে উহা পুরা সংখ্যাকে নির্দেশ করে।

শতকরা হিসাবের অঙ্ক কষিতে হইলে নিম্নলিখিত সূত্রগুলি মনে রাখা কর্তব্য :—

(1) কোন সংখ্যার 30% বলিলে উহার $\frac{30}{100}$ বা $\frac{3}{10}$ অংশ বুঝায় ;

কিন্তু 30% বৃদ্ধি হইলে, বর্ধিত সংখ্যা, সংখ্যাটির (100+30) বা 130% বা $\frac{130}{100}$ বা $1\frac{3}{10}$ হইবে।

(2) কোন সংখ্যার 30% হ্রাস পাইলে, হ্রাসপ্রাপ্ত সংখ্যা, পূর্বসংখ্যার (100 − 30) বা 70% বা $\frac{70}{100}$ বা $\frac{7}{10}$ হইবে।

(3) যাহা অপেক্ষা বেশী বা যাহা অপেক্ষা কম, তাহার উপর 100 ধরিয়া শতকরা হিসাব করিতে হয়।

উদাহরণ 1. এক ব্যবসায়ী 240 টাকা মূলধন লইয়া 18 টাকা লাভ করিল। সে (i) মূলধনের কত অংশ লাভ করিল ? (ii) সে শতকরা কত লাভ করিল ?

(i) এস্থলে, 240 টাকায় 18 টাকা লাভ হইল।

∴ লাভ = মূলধনের $\frac{18}{240}$ বা $\frac{3}{40}$

(ii) $\frac{3}{40}=\frac{3\times\frac{100}{40}}{40\times\frac{100}{40}}=\frac{\frac{15}{2}}{100}=\frac{7\frac{1}{2}}{100}$

∴ লাভ $=7\frac{1}{2}\%$

উদাহরণ 2. কোন শহরের লোকসংখ্যা 16% বৃদ্ধি পাইয়া 10440 হইল। পূর্বে ঐ শহরের লোকসংখ্যা কত ছিল?

(100+16) বা 116 বর্তমান লোকসংখ্যা হইলে পূর্বের লোকসংখ্যা = 100

∴ 10440 „ „ „ „ „ $=\frac{100\times10440}{116}$

$=9000$

∴ নির্ণেয় লোকসংখ্যা = 9000

উদাহরণ 3. কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীর 34% পাটীগণিতে এবং 42% বীজগণিতে অকৃতকার্য হইল। উভয় বিষয়ে 20% অকৃতকার্য হইলে শতকরা কতজন পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে পাশ করিয়াছিল? [C. U. 1944]

100 জনের মধ্যে পাটীগণিতে অকৃতকার্য 34 জন। এই 34 জনের মধ্যে উভয় বিষয়ে অকৃতকার্য 20 জনও আছে। সুতরাং কেবলমাত্র পাটীগণিতে অকৃতকার্য (34−20) বা 14 জন। অনুরূপভাবে কেবলমাত্র বীজগণিতে অকৃতকার্য (42−20) বা 22 জন।

∴ এক বিষয়ে এবং উভয় বিষয়ে মোট (14+22+20) বা 56 জন অকৃতকার্য হইয়াছিল; অবশিষ্ট ছাত্র উভয় বিষয়ে পাশ করিয়াছিল।

∴ 100 জনের মধ্যে উভয় বিষয়ে পাশ (100−56) বা 44 জন।

∴ উভয় বিষয়ে 44% ছাত্র পাশ করিয়াছিল।

উদাহরণ 4. যদি কয়লার দর 10% বৃদ্ধি পায়, গৃহস্থকে ব্যয়বৃদ্ধি এড়াইতে হইলে ঐ দ্রব্যের ব্যবহার শতকরা কত হারে কমাইতে হইবে? [P. U. 1948]

যে পরিমাণ কয়লার মূল্য পূর্বে 100 টাকা ছিল, বর্তমানে তাহার বর্ধিত মূল্য (100+10) বা 110 টাকা।

∴ গৃহস্থকে 110 টাকা মূল্যের কয়লায় (110−100) বা 10 টাকা মূল্যের ব্যয় কমাইতে হইবে; অর্থাৎ $\frac{10}{110}$ অংশ কয়লার ব্যবহার কমাইতে হইবে।

নির্ণেয় হার $=\frac{10}{110}\times100=9\frac{1}{11}\%$

উদাহরণ 5. আমের দর 15% হ্রাস পাওয়ায় ক্রেতা বর্তমানে টাকায় 6টি আম বেশী পায়। আমের পূর্ব-দর কত ছিল ? [Utkal U. 1947]

100 টাকায় ব্যয়ের হ্রাস 15 টাকা,

∴ 1 " " " $\frac{15}{100}$ বা $\frac{3}{20}$ টাকা।

এই $\frac{3}{20}$ টাকায় বর্তমান মূল্যে 6টি আম পাওয়া যায়।

∴ 1টি আমের বর্তমান মূল্য $\frac{3}{20 \times 6}$ বা $\frac{1}{40}$ টাকা।

কিন্তু (100 – 15) বা 85 টাকা বর্তমান মূল্য হইলে পূর্বমূল্য 100 টাকা ;

∴ $\frac{1}{40}$ " " " " $\frac{100}{85 \times 40}$ বা $\frac{1}{34}$ টাকা।

∴ 1টি আমের পূর্বমূল্য $\frac{1}{34}$ টাকা।

∴ পূর্বে 1 টাকায় $(1 \div \frac{1}{34})$ বা 34টি আম পাওয়া যাইত।

উদাহরণ 6. A-র আয়, B-এর আয় অপেক্ষা 30% অধিক হইলে, B-এর আয়, A-র আয় অপেক্ষা শতকরা কত কম ?

B-এর আয় 100 টাকা হইলে, A-এর আয় (100 + 30) বা 130 টাকা।

এখন A-র আয় 100 টাকা হইলে, B-এর আয়, A-র আয় অপেক্ষা শতকরা কত কম তাহাই নির্ণয় করিতে হইবে।

A-র আয় 130 টাকা হইলে B-এর আয় 100 টাকা ;

$\frac{100}{130}$ "

100 $\frac{100}{130} \times 100$ টাকা

$= \frac{1000}{13}$ টাকা।

∴ B-এর আয়, A-র আয় অপেক্ষা $(100 - \frac{1000}{13})\%$ বা $\frac{300}{13}\%$ বা $23\frac{1}{13}\%$ কম।

উদাহরণ 7. লবণের মূল্য $12\frac{1}{2}\%$ কমিয়া যাওয়ায় ক্রেতা বর্তমানে 168 ন.প.-তে 2 কি. গ্রা. লবণ বেশী পায়। প্রতি কিলোগ্রাম লবণের পূর্বমূল্য কত ?

লবণের মূল্য $12\frac{1}{2}\%$ বা $\frac{25}{200}$ বা $\frac{1}{8}$ অংশ কমিয়া যাওয়ায় পূর্বদরে 168 ন. প.-এর লবণ বর্তমানে $168 \times \frac{1}{8}$ বা 21 ন. প. কম মূল্যে পাওয়া যায়। মূল্যের হ্রাস 21 ন.প. হওয়ায় 2 কি. গ্রা. লবণ বেশী পাওয়া যায়।

∴ 2 কি. গ্রা. লবণের বর্তমান মূল্য 21 ন. প.

বর্তমান দরে $\frac{21}{2}$ ন. প.-তে 1 কি. গ্রা. লবণ পাওয়া যায়।

$\therefore$ „ „ 168 „ $\frac{2}{21} \times 168$ বা 16 কি. গ্রা. লবণ পাওয়া যায়।

পূর্বমূল্যে 168 ন. প.-তে (16—2) বা 14 কি. গ্রা. লবণ পাওয়া যাইত;

14 কি. গ্রা. লবণের পূর্বমূল্য = 168 ন. প.

$\therefore$ 1 „ „ „ $= \frac{168}{14}$ বা 12 ন. প.

$\therefore$ নির্ণেয় পূর্বমূল্য = প্রতি কিলোগ্রাম 12 ন. প.।

প্রশ্নমালা 10

1. এক কর্মচারীর মাসিক বেতন 170 টাকা হইতে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইয়া 220 টাকা হইল। ঐ কর্মচারীর বেতন শতকরা কত টাকা বৃদ্ধি পাইল?

2. এক ব্যবসায়ী কিছু লেবু কিনিল। উহার 2% পচিয়া গেল। অবশিষ্টের 95% বিক্রয় করিয়া দেওয়ায় ব্যবসায়ীর নিকট আর ৯8টি লেবু রহিল। ব্যবসায়ী কতগুলি লেবু কিনিয়াছিল?

3. কোন বিদ্যালয়ের ছাত্রসংখ্যার 80% হিন্দু এবং অবশিষ্ট মুসলমান। একদিন হিন্দু ছাত্রদের $\frac{7}{8}$ এবং মুসলমান ছাত্রদের $\frac{3}{4}$ বিদ্যালয়ে উপস্থিত হইল। ঐদিন বিদ্যালয়ে শতকরা কতজন অনুপস্থিত ছিল?

4. কোন গ্রামের লোকসংখ্যা প্রতি 10 বৎসরে 20% হিসাবে বৃদ্ধি পাওয়ায় 20 বৎসরে 2016 হইল। লোকসংখ্যা প্রথমে কত ছিল?

5. A-র ব্যয় অপেক্ষা B-এর ব্যয় 25% অধিক। B-এর ব্যয় অপেক্ষা A-র ব্যয় শতকরা কত কম?

6. কোন এক পরীক্ষায় পাশ করিতে হইলে মোট নম্বরের 35% পাইতে হইবে। একটি বালক মোট 43 নম্বর পাইল। তাহাকে বলা হইল যে, সে 2 নম্বর কম পাইলে ফেল করিয়া যাইত। পরীক্ষায় মোট নম্বর কত?

7. কোন এক পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের এক-পঞ্চমাংশ বালিকা এবং অবশিষ্ট বালক। বালকদের 5% এবং বালিকাদের 40% পরীক্ষায় অকৃতকার্য হইল। পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা 2500 হইলে শতকরা কতজন পাশ করিল? [M. U. 1926]

8. কোন পরীক্ষায় 80% ইংরাজীতে, 85% অঙ্কে এবং 73% উভয় বিষয়ে পাশ করিল। উভয় বিষয়ে শতকরা কতজন ফেল করিল? [W. B. S. B. 1954]

9. কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 80% ইংরাজীতে, 85% অঙ্কে এবং 75% উভয় বিষয়ে পাশ করিল। যদি 45 জন পরীক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করে, তবে মোট কতজন পরীক্ষার্থী ছিল? [C. U. 1938]

10. এক ভদ্রলোকের মাসিক আয়ের 20% পুত্রদের শিক্ষার জন্য, অবশিষ্টের 25% জীবনবীমার প্রিমিয়াম দিতে এবং শেষ অবশিষ্টাংশের 75% সংসার-খরচ করিবার পর 60 টাকা থাকে। তাঁহার মাসিক আয় কত?

11. কোন একটি শহরের জন্মহার 9% এবং মৃত্যুহার 4%; বর্তমান লোকসংখ্যা 16000 হইলে, তিনবৎসর পরে লোকসংখ্যা কত হইবে?

12. এক ব্যক্তি তাঁহার আয়ের 8% সঞ্চয় করেন। তাঁহার আয় 15% বর্ধিত হওয়ায়, তাঁহার সঞ্চয় পূর্ববৎ রহিল। শতকরা কত হারে তাঁহার খরচ বর্ধিত হইয়াছে নির্ণয় কর।

13. কোন একটি বিদ্যালয়ের ছাত্রসংখ্যা 9% কমিয়া যাওয়ায়, ছাত্রসংখ্যা 728 দাঁড়াইল। পূর্বের ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর।

14. প্রবেশিকা পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীরা কেহ কেহ অতিরিক্ত গণিত, কেহ কেহ ইতিহাস, আবার কেহ কেহ উভয় বিষয় লইয়াছিল। পরীক্ষার্থীদের 65·3% অতিরিক্ত গণিত এবং 61·7% ইতিহাস লইয়াছিল। পরীক্ষার্থীদের সংখ্যা 20000 হইলে কতজন উভয় বিষয় লইয়াছিল? [C. U. 1936]

15. যদি কাপড়ের মূল্য 75% বৃদ্ধি পায়, তবে গৃহস্থকে মোট ব্যয় ঠিক রাখিতে হইলে ঐ দ্রব্যের ব্যবহার শতকরা কত ভাগ কমাইতে হইবে?

16. চিনির মূল্য 20% বৃদ্ধি পাওয়ায় কোন গৃহস্থ চিনির খরচ এমনভাবে কমাইলেন যে, এজন্য তাহার আর অতিরিক্ত ব্যয় হইল না। গৃহস্থ শতকরা কত ভাগ চিনির খরচ কমাইয়াছিলেন?

17. চাউলের দাম 4% কমিয়া গেল। পূর্বে যে দামে 48 কিলোগ্রাম চাউল পাওয়া যাইত, এখন সেই দামে কত চাউল পাওয়া যাইবে?

18. তৈলের মূল্য 25% কমিয়া যাওয়ায় 30 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 4 কিলোগ্রাম তৈল বেশী পাওয়া গেল। প্রতি কিলোগ্রাম তৈলের মূল্য পূর্বে কত ছিল?

19. আমের দর শতকরা $12\frac{1}{2}$ টাকা বাড়িয়া যাওয়ায় 5 টাকায় পূর্বাপেক্ষা 15টি আম কম পাওয়া যায়। (i) বর্তমান দরে প্রতি টাকায় কতগুলি আম পাওয়া যায়? (ii) পূর্ব-দরে প্রতি টাকায় কতগুলি আম পাওয়া যাইত?

*20. কোন এক শহরের লোকসংখ্যা পূর্বে 20000 ছিল। যদি পুরুষের সংখ্যা 10% বাড়িত এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা 6% কমিয়া যাইত, তবে মোট লোকসংখ্যার কোন পরিবর্তন হইত না। ঐ শহরে পুরুষের সংখ্যা ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা পূর্বে কত ছিল? [C. U. 1937]

2: সরল সুদকষা
(Simple Interest)

সুদ-কষা অঙ্ক করিবার সময় নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখিও :

(i) সুদ + আসল = সুদ-আসল বা সবৃদ্ধিমূল, (ii) সুদ = সবৃদ্ধিমূল − আসল এবং (iii) আসল = সবৃদ্ধিমূল − সুদ।

সুদের হার বলিতে সাধারণতঃ 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ বুঝিতে হয়।

A. সুদ ও সবৃদ্ধিমূল (Interest and Amount) নির্ণয় :

আসল, সময় ও সুদের হার দেওয়া থাকিলে সুদ ও সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় করা যায়। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদাহরণ 1. বার্ষিক $3\frac{1}{5}\%$ হারে 427 টাকা 50 নয়া পয়সার 12 বৎসর 6 মাসের সুদ ও সবৃদ্ধিমূল নির্ণয় কর।

$3\frac{1}{5}\% = \frac{16}{5}\%$; 427 টা. 50 ন. প. = টা. $427\frac{1}{2}$; 12 ব. 6 মা. = $12\frac{1}{2}$ বৎসর।

এখন, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = $\frac{16}{5}$ টাকা

1 " " " " = $\frac{16}{5\times 100}$ টাকা

∴ $427\frac{1}{2}$ " $12\frac{1}{2}$ " " = $\frac{16\times 427\frac{1}{2}\times 12\frac{1}{2}}{5\times 100}$ টাকা = 171 টাকা

∴ নির্ণেয় সুদ = 171 টাকা,

এবং সবৃদ্ধিমূল = 427 টা. 50 ন. প. + 171 টা. = 598 টা. 50 ন. প.।

উদাহরণ 2. শতকরা বার্ষিক $5\frac{1}{4}$ টাকা হার সুদে 1961 খৃষ্টাব্দের 1লা জানুয়ারী হইতে 15ই মার্চ পর্যন্ত 500 টাকার সুদ কত হইবে?

1লা জানুয়ারী হইতে 14ই মার্চ পর্যন্ত (1লা জানুয়ারীকে বাদ দিয়া) দিন-সংখ্যা = 30 + 28 + 15 বা 73 দিন = $\frac{73}{365}$ বা $\frac{1}{5}$ বৎসর।

এখন, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $= 5\frac{1}{4}$ টাকা

1 " " " " $= \frac{21}{4 \times 100}$ টাকা

$\therefore$ 500 " $\frac{1}{5}$ " " $= \frac{21 \times 500 \times 1}{4 \times 100 \times 5}$ টাকা

$= 5\frac{1}{4}$ টা. বা 5 টা. 25 ন. প.।

দ্রষ্টব্য : (i) 'বৎসর, মাস ও দিনে' কিংবা 'মাস ও দিনে' সময় দেওয়া থাকিলে 30 দিনে মাস এবং 12 মাসে বৎসর ধরিতে হয়।

(ii) 'বৎসর ও দিনে' অথবা শুধু 'দিনে' সময় দেওয়া থাকিলে 365 দিনে বৎসর ধরিতে হয়; কিন্তু লিপ-ইয়ার হইলে দিনসংখ্যা হিসাব করিবার সময় 366 দিনে বৎসর ধরিতে হয়।

স্মরণ রাখিবে যে, 5 এবং 73 ব্যতীত 365-এর আর কোন উৎপাদক নাই।

(iii) কোন একটি নিদিষ্ট তারিখ হইতে অপর একটি নির্দিষ্ট তারিখ পর্যন্ত সময়ের সুদ নির্ণয় করিতে হইলে মোট দিনসংখ্যা হইতে 1 দিন বাদ দিতে হয়, অর্থাৎ উল্লিখিত তারিখ দুইটির মধ্যে একটিকে পরিত্যাগ করিতে হয়। প্রথম ও শেষ দিনের মধ্যে লিপ-ইয়ার বৎসরের ফেব্রুয়ারী মাস পড়িলে দিনসংখ্যা হিসাব করিবার সময় ফেব্রুয়ারী মাসে 29 দিন ধরিতে হয়।

সুদ নির্ণয়ের সূত্র :

শতকরা বার্ষিক সুদের হার জানা থাকিলে মোট সুদ নিম্নলিখিত সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায় :

$$\text{সুদ} = \frac{\text{মূলধন} \times \text{সুদের হার} \times \text{সময়}}{100}$$

[এক্ষেত্রে সময়কে সর্বদা বৎসরে পরিবর্তিত করিয়া লইবে।]

প্রশ্নমালা 11

1. বার্ষিক শতকরা 6 টা. হারে 500 টাকার 4 বৎসরের সুদ ও সবৃদ্ধিমূল কত ?

2. বার্ষিক শতকরা টা. 6·25 হারে 892 টাকার 8 বৎসরের সুদ ও সুদ-আসল কত ?

3. শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হারে 3 বৎসরে 450 টাকার সবৃদ্ধিমূল কত হইবে ? [C. U. 1947]

4. শতকরা মাসিক $3\frac{3}{4}$ টাকা হারে টা. 762·50-এর 5 বৎসর 4 মাসের সুদ নির্ণয় কর।

5. সুদের হার বার্ষিক 6% হইলে 3500 টাকার সুদ 1954 সালের 5ই জানুয়ারী হইতে 31শে মে পর্যন্ত কত হইবে ?

6. শতকরা বার্ষিক 4 টা. 25 ন. প. হারে 2187 টা. 50 ন. প -এর 219 দিনের সুদ কত ?

7. শতকরা 3 টাকা হারে 250 টাকার সুদ 1957 খৃষ্টাব্দের 1লা এপ্রিল হইতে 13ই জুন পর্যন্ত কত ?

8. 1935 খৃষ্টাব্দের 4ঠা এপ্রিল 1450 টাকা $3\frac{1}{2}$% হারে ধার করিয়া ঐ খৃষ্টাব্দের 28শে আগস্ট ধার পরিশোধ করা হইল। কত টাকা দিতে হইয়াছিল ?

[Pat. U. 1945]

B. আসল (Principal) নির্ণয় :

সুদ, সুদের হার ও সময় দেওয়া থাকিলে আসল বা মূলধন নির্ণয় করা যায়। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদাহরণ 1. বার্ষিক 5% হারে 3 বৎসরে কত টাকার সবৃদ্ধিমূল 690 টাকা হইবে ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 5 টাকা

" " 3 " " = (5 × 3) বা 15 টাকা।

∴ 100 টাকার 3 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল = (100 + 15) বা 115 টাকা।

এখন, 3 বৎসরে সবৃদ্ধিমূল 115 টাকা হইলে আসল = 100 টাকা।

∴ " " " 690 " " " $\frac{100 \times 690}{115}$ "

= 600 টাকা।

∴ নির্ণেয় আসল = 600 টাকা।

উদাহরণ 2. 8% হারে কত মূলধনের 1 দিনের সুদ 1 টাকা হইবে ?

1 দিনের সুদ = 1 টাকা ; ∴ 1 বৎসরের সুদ = 365 টাকা।

যখন বার্ষিক সুদ 8 টাকা, তখন মূলধন = 100 টাকা

∴ " " 365 " " " = $\frac{100 \times 365}{8}$ বা $4562\frac{1}{2}$ টাকা।

∴ নির্ণেয় মূলধন = টা. 4562·50

উদাহরণ 3. কত টাকা সুদে খাটাইলে ঐ টাকার বার্ষিক $2\frac{1}{2}\%$ হারে যে সুদ পাওয়া যাইবে, তাহা হইতে 125 টাকা মূল্যের একটি এবং 60 টাকা মূল্যের অপর একটি মেডেল প্রতি বৎসর দেওয়া যাইবে? [W. B. S. B. 1958]

প্রত্যেক বৎসর মেডেল দিবার জন্য (125+60) বা 185 টাকার প্রয়োজন। সুতরাং প্রত্যেক বৎসর 185 টাকা সুদ পাইতে হইলে কত টাকা মূলধনের প্রয়োজন, তাহাই নির্ণয় করিতে হইবে।

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=\frac{5}{2}$ টাকা;

অর্থাৎ, সুদ $\frac{5}{2}$ টাকা হইলে, মূলধন হইবে 100 টাকা

$\therefore$ „ 1 „ „ „ „ $\frac{100\times2}{5}$ বা 40 টাকা

$\therefore$ „ 185 „ „ „ 185×40 বা 7400 টাকা।

মূলধন নির্ণয়ের সূত্র

(i) $\text{মূলধন}=\dfrac{\text{সুদ}\times100}{\text{হার}\times\text{বৎসর}}$ (ii) $\text{মূলধন}=\dfrac{\text{সবৃদ্ধিমূল}\times100}{100+(\text{হার}\times\text{বৎসর})}$

প্রশ্নমালা 12

1. শতকরা বার্ষিক 6 টাকা হার সুদে কত টাকার সুদ 10 বৎসরে 360 টাকা হইবে?

2. কিছু পরিমাণ টাকা $4\frac{1}{18}\%$ হারে খাটাইলে দৈনিক সুদ হয় 1 টাকা। ঐ টাকার পরিমাণ কত? [C. U. 1935, 1937]

3. কত টাকা 10 বৎসরে $3\frac{1}{2}\%$ হারে মোট 126 টাকা সুদ উৎপন্ন করিবে?

4. বার্ষিক $2\frac{6}{7}\%$ হারে কত টাকার $3\frac{1}{3}$ বৎসরের সুদ 25 টাকা হইবে?

5. বার্ষিক সুদের হার শতকরা 4 টাকা হইতে কমিয়া শতকরা 3 টা. 75 ন. প. হইলে এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 60 টাকা কমিয়া যায়। ঐ ব্যক্তির মূলধন কত?

6. বার্ষিক সুদের হার $6\frac{1}{4}\%$ হইলে কত টাকা 3 বৎসর 73 দিনে সুদে-মূলে 193 টা. 80 ন. প. হইবে?

7. শতকরা বার্ষিক 3 টাকা হার সুদে 5 বৎসর পূর্বে এক ব্যক্তি কিছু টাকা ব্যাঙ্কে রাখিয়াছিল। বর্তমানে উহা সুদে-মূলে যদি 638 টা. 25 ন. প. হয়, তবে ঐ ব্যক্তি কত টাকা ব্যাঙ্কে রাখিয়াছিল?

8. 11ই জুন হইতে 4ঠা নভেম্বর পর্যন্ত 5% হারে কত টাকার সবৃদ্ধিমূল টা. 5151 হইবে? [P. U. 1930]

C. সুদের হার (Rate of Interest) নির্ণয় :

মূলধন, সুদ ও সময় দেওয়া থাকিলে সুদের হার নির্ণয় করা যায়। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদাহরণ 1. শতকরা বার্ষিক কত টাকা হার সুদে 650 টাকা 8 বৎসরে সুদে-মূলে 962 টাকা হইবে?

650 টাকার 8 বৎসরের সুদ $=(962-650)$ বা 312 টাকা;

$\therefore$ 1 „ 1 „ „ $=\frac{312}{650\times8}$ টাকা

$\therefore$ 100 „ „ „ „ $=\frac{312\times100}{650\times8}$ বা 6 টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় বার্ষিক সুদের হার $=6\%$

উদাহরণ 2. $6\frac{1}{4}$ বৎসর পরে কিছু টাকার সুদ আসলের $\frac{3}{8}$ অংশ হয়। সুদের হার কত? [C. U. 1949]

মনে কর, আসল $=8$ টাকা। $\therefore$ সুদ $=8$ টা. এর $\frac{3}{8}=3$ টাকা।

এখন, 8 টাকার $6\frac{1}{4}$ বা $\frac{25}{4}$ বৎসরের সুদ $=3$ টাকা

$\therefore$ 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=\dfrac{3\times100}{8\times6\frac{1}{4}}$ বা 6 টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় হার $=6\%$

সুদের হার নির্ণয়ের সূত্র :

$$\text{সুদের হার} = \frac{\text{সুদ}\times100}{\text{মূলধন}\times\text{বৎসর}}$$

প্রশ্নমালা 13

1. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে 4250 টাকা 3 বৎসরে সুদে-মূলে 4760 টাকা হইবে? [C. U. 1948]

2. বার্ষিক সুদের হার কত হইলে 750 টাকা 5 বৎসর 6 মাসে সুদে-মূলে 873 টা. 75 ন. প. হইবে?

3. শতকরা বার্ষিক কত হার সুদে যে-কোন মূলধনের সুদ $6\frac{1}{4}$ বৎসরে মূলধনের $\frac{5}{16}$ হইবে? [C. U. 1946]

4. শতকরা কত হার সুদে যে-কোন মূলধন 25 বৎসরে উহার তিনগুণ হইবে? [C. U. 1936]

5. 5 বৎসরে কোন মূলধন সুদে-মূলে 1100 টাকা হইল। সুদ মূলধনের $\frac{3}{8}$ অংশ হইলে, মূলধন ও শতকরা সুদের হার কত? [C. U. 1934]

D. সময় (Time) নির্ণয়:

মূলধন, সুদ ও সুদের হার দেওয়া থাকিলে সময় নির্ণয় করা যায়। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদাহরণ 1. শতকরা বার্ষিক $12\frac{1}{2}$ টাকা হার সুদে কত বৎসরে 1440 টাকা সুদে-মূলে 1800 টাকা হইবে?

1440 টাকার নির্ণেয় সময়ের সুদ $=(1800-1440)$ বা 360 টাকা।

এখন, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=12\frac{1}{2}$ বা $\frac{25}{2}$ টাকা

∴ 1440 " " " " $=\frac{25\times1440}{2\times100}$ বা 180 টাকা।

এখন, 180 টাকা সুদ হয় 1 বৎসরে

∴ 360 " " " $\frac{360}{180}$ বা 2 বৎসরে।

∴ নির্ণেয় সময় $=2$ বৎসর।

উদাহরণ 2. বার্ষিক 5% হার সুদে কত বৎসরে যে-কোন টাকার সুদ সবৃদ্ধিমূলের $\frac{2}{5}$ হইবে?

মনে কর, সবৃদ্ধিমূল $=100$ টাকা; ∴ সুদ $=100$ টা. এর $\frac{2}{5}$ বা 40 টাকা।

∴ আসল $=(100-40)$ বা 60 টাকা।

এখন, 100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=5$ টাকা

∴ 60 " " " " $=\frac{5\times60}{100}$ বা 3 টাকা।

এখন, 3 টাকা সুদ হয় 1 বৎসরে

∴ 40 " " " $\frac{1\times40}{3}$ বা $13\frac{1}{3}$ বৎসরে।

∴ নির্ণেয় সময় $=13$ বৎসর 4 মাস।

সময় নির্ণয়ের সূত্র:

$$\text{বৎসর}=\frac{\text{সুদ}\times100}{\text{আসল}\times\text{হার}}$$

প্রশ্নমালা 14

1. শতকরা বার্ষিক 3 টাকা হার সুদে কত দিনে 375 টাকার সুদ 4 টা. 50 ন. প. হইবে ?

2. বার্ষিক 4% হার সুদে কত সময়ে 1250 টাকা সুদে-মূলে 1625 টাকা হইবে ?

3. শতকরা বার্ষিক $3\frac{1}{3}$ টাকা হার সুদে 1350 টাকার সবৃদ্ধিমূল কত সময়ে 1620 টাকা হইবে ? [C. U. 1947]

4. কিছু টাকা 20 বৎসরে সুদে-মূলে দ্বিগুণ হয় ; কত বৎসরে উহা তিনগুণ হইবে ? [Utkal U. 1949]

5. শতকরা বার্ষিক $6\frac{2}{3}$ টাকা সুদের হারে কত সময়ে যে-কোন পরিমাণ মূলধন সুদে-মূলে উহার $1\frac{1}{2}$ গুণ হইবে ?

সুদকষা সংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্ন

উদাহরণ 1. বার্ষিক শতকরা সুদের হার কত হইলে 800 টাকার 40 বৎসরের সুদ, বার্ষিক শতকরা 4 টাকা হারে 625 টাকার 8 বৎসরের সুদের সমান হইবে ?
[C. U. 1927]

শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হারে 625 টাকার 8 বৎসরের সুদ

$=\frac{4\times625\times8}{100}$ বা 200 টাকা।

এখন, প্রশ্নানুসারে, 800 টাকার 4 বৎসরের সুদ = 200 টাকা

$\therefore$ 100 „ 1 „ „ $=\frac{200\times100}{800\times4}$ বা $6\frac{1}{4}$ টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার $=6\frac{1}{4}\%$

উদাহরণ 2. সমহার সুদে 500 টাকার 4 বৎসরের সুদ এবং 400 টাকার 6 বৎসরের সুদ একত্রে 132 টাকা হইলে, সুদের হার কত ?

500 টাকার 5 বৎসরের সুদ $=500\times4$ বা 2000 টাকার 1 বৎসরের সুদ,

এবং 400 টাকার 6 বৎসরের সুদ $=400\times6$ বা 2400 টাকার 1 বৎসরের সুদ।

$\therefore$ 500 টাকার 4 বৎসরের সুদ + 400 টাকার 6 বৎসরের সুদ

$=(2000+2400)$ বা 4400 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 132 টাকা

$\therefore$ 100 „ „ „ „ $=\frac{132\times100}{4400}$ বা 3 টাকা।

$\therefore$ নির্ণেয় সুদের হার $=3\%$

উদাহরণ 3. কিছু মূলধন 3 বৎসরে সুদে-মূলে 560 টাকা এবং 5 বৎসরে সুদে-মূলে 600 টাকা হয়। মূলধন ও সুদের হার নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, মূলধন + 5 বৎসরের সুদ = 600 টাকা,

এবং মূলধন + 3 বৎসরের সুদ = 560 „

∴ (বিয়োগ করিয়া) 2 বৎসরের সুদ = 40 টাকা

∴ 1 বৎসরের সুদ = $\frac{40}{2}$ বা 20 টাকা

∴ 3 বৎসরের সুদ = 20×3 বা 60 টাকা।

∴ নির্ণেয় মূলধন = $(560 - 60)$ বা 500 টাকা।

এখন, 500 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 20 টাকা

∴ 100 „ „ „ „ = $\frac{20 \times 100}{500}$ বা 4 টাকা।

∴ নির্ণেয় সুদের হার = 4%

উদাহরণ 4. কোন ব্যাঙ্ক হইতে একই সময়ে বার্ষিক 4% হার সুদে A 1000 টাকা এবং B কিছু টাকা ধার করিল। যদি তাহারা উভয়ে 8 বৎসর পরে ঋণ পরিশোধের সময়ে 420 টাকা সুদ দিয়া থাকে, তবে B কত টাকা ধার করিয়াছিল ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ = 4 টাকা।

∴ A-র 1000 „ 8 „ „ = $\frac{4 \times 8 \times 1000}{100}$ বা 320 টাকা।

∴ B-এর 8 বৎসরের মোট সুদ = $(420 - 320)$ বা 100 টাকা।

এক্ষণে, B-এর 4 টাকা সুদ হয় 1 বৎসরে 100 টাকায়

∴ „ 100 „ „ „ 8 „ $\frac{100 \times 100}{4 \times 8}$ বা $312\frac{1}{2}$ টাকায়।

∴ B-এর ঋণ = $312\frac{1}{2}$ টাকা বা 312 টা. 50 ন. প.

প্রশ্নমালা 15

1. 6% হার সুদে 8 বৎসরে 950 টাকা হইতে যে সুদ হইবে, কত টাকা হইতে $7\frac{1}{2}$% হারে 19 বৎসরে সেই সুদ হইবে ? [D. B. 1934]

2. বার্ষিক সুদের হার কত হইলে 3000 টাকার 3 বৎসরের সুদ, 8000 টাকার 9% হারে 6 মাসের সুদের সমান হইবে ?

3. কোন আসল 3 বৎসরে সুদে-মূলে 632 টা. 50 ন. প. এবং 4 বৎসর 6 মাসে সুদে-মূলে 673 টা. 75 ন. প. হয়। আসল এবং বার্ষিক সুদের হার কর।

4. কত বৎসরে 6% হার সুদে 4000 টাকার সবৃদ্ধিমূল এবং 4% হার সুদে 5000 টাকার সবৃদ্ধিমূল পরস্পর সমান হইবে ?

5. যদি 4 বৎসরে 450 টাকার সবৃদ্ধিমূল 540 টাকা হয়, তবে একই হারে 5 বৎসরে কত টাকা সুদে-মূলে 637 টা. 50 ন. প. হইবে ?

6. A, B-কে 1000 টাকা এবং C-কে 1100 টাকা ধার দিল এবং মোট বার্ষিক সুদ পাইল টা. 110·50 ; C-এর সুদের হার যদি B-এর হার অপেক্ষা $\frac{1}{2}\%$ বেশী হয়, তবে উভয়ের সুদের হার নির্ণয় কর।

7. A কিছু টাকা B-কে এবং B অপেক্ষা 800 টাকা বেশী C-কে ধার দিল। B বার্ষিক 5% এবং C 7% হারে সুদ দিতে স্বীকৃত হইল। 5 বৎসর পরে উভয়ে সুদে-মূলে সমস্ত টাকা পরিশোধ করিল। যদি B অপেক্ষা C মোট 1240 টাকা বেশী দিয়া থাকে, তাহা হইলে প্রত্যেকে কত টাকা ধার করিয়াছিল ? [W. B. S. B. 1956]

8. বার্ষিক $1\frac{1}{2}\%$ হারে এক ব্যক্তি কোন বৎসরের প্রথম দিনে সেভিংস্ ব্যাঙ্কে 350 টাকা জমা দিল। 4 মাস পরে সে 50 টাকা তুলিয়া লইল এবং আরও 3 মাস পরে পুনরায় 160 টাকা জমা দিল। পূর্ণ এক বৎসর পরে ঐ ব্যক্তি মোট কত সুদ পাইল ? [W. B. S. B. 1954]

9 এক ব্যক্তি বাড়ী তৈয়ারি করার টাকা মিটাইবার জন্য 5% হারে 8,000 টাকা ধার করিল। তারপর সে ঐ বাড়ী মাসিক 100 টাকা হিসাবে ভাড়া দিল। এই ভাড়ার টাকা জমাইয়া সে কত বৎসরে সুদে-মূলে তাহার ধার শোধ করিতে পারিবে ?

10. এক ব্যক্তি বার্ষিক 6% হার সুদে কিছু টাকা ধার করিলেন এবং 3 মাস পরে তিনি 4% হারে আরও 200 টাকা ধার করিলের। দ্বিতীয়বার ধার করার 6 মাস পরে দেখা গেল যে তাঁহার দুই ঋণের জন্য মোট সুদ হইয়াছে 17 টাকা 50 ন. প.। তিনি প্রথমবার কত ধার করিয়াছিলেন ?

11. 5% হারে 6 বৎসরে কোন আসলের সবৃদ্ধিমূল 1326 টাকা হইলে, কত বৎসরে উহার সবৃদ্ধিমূল 1530 টাকা হইবে ?

12. কোন সুদের হারে কিছু টাকা 10 বৎসরে দ্বিগুণ হয় ; সমহারে কত টাকা 7 বৎসরে সুদে-আসলে 400 টাকা হইবে ?

*13. প্রতি দুই মাসে 500 টাকা করিয়া শোধ দিবার চুক্তিতে এক ব্যক্তি 1লা জুলাই 2000 টাকা ঋণ করিলেন। যদি দেয় টাকার উপর সুদের হার $3\frac{1}{2}\%$ হয়, তাহা হইলে, পরবর্তী 1লা জানুয়ারী তারিখে কত ঋণ বাকী থাকিবে ?

*14. সেভিংস ব্যাঙ্কে টাকা গচ্ছিত রাখিয়া এক ব্যক্তি প্রতি মাসে 10 টাকায় 2 ন. প. হিসাবে সুদ পাইয়া থাকেন। সম পরিমাণ (equivalent) শতকরা সুদের হার কত হইবে ?

ষষ্ঠ অধ্যায়

আসন্ন মান

(Approximation)

[পুনরালোচনা]

বাস্তব ক্ষেত্রে আমরা কখনও কখনও দেখিতে পাই যে অনেক জিনিসের মূল্য, ওজন, পরিমাপ, দুইটি বিন্দুর দূরত্ব এবং সময় প্রভৃতি সঠিক ভাবে নির্ণয় করা যায় না। যে সকল যন্ত্রের সাহায্যে ইহাদিগকে মাপা হয়, তাহারা যে নিখুঁত—একথাও বলা যায় না ; তবে এগুলিকে নির্ভুল করিতে চেষ্টা করা হয়।

যথাসম্ভব নির্ভুল মান নির্ণয় করাকে **আসন্ন মান** (Approximate value or Approximation) বলা হয়। যেমন,—

উদাহরণ 1. 7টি বস্তুর মূল্য 34 টাকা হইলে একটি বস্তুর মূল্য কত ?

34 টাকা $\div$ 7 = 4 টা. $85\frac{5}{7}$ ন. প.।

এখন দোকানদারকে প্রকৃত মূল্য, (4টা. $85\frac{5}{7}$ ন.প.) কখনও দেওয়া যায় না ; হয় তাহাকে 4 টা. 85 ন. প., নতুবা 4 টা. 86 ন. প. দিতে হইবে। দোকানদারকে 4 টা. 86 ন. প. দিলে সে প্রকৃত মূল্য অপেক্ষা (4 টা. $85\frac{5}{7}$ ন. প. − 4 টা. 85 ন. প.) বা $\frac{5}{7}$ ন. প. কম পায়। আবার, 4 টা. 86 ন. প. দিলে সে প্রকৃত মূল্য অপেক্ষা (4 টা. 86 ন. প. − 4 টা. $85\frac{5}{7}$ ন. প.) বা $\frac{2}{7}$ ন. প. বেশী পায়। এক্ষেত্রে 4 টা. 86 ন. প. প্রকৃত মূল্যের অধিকতর নিকটবর্তী। সুতরাং, 4 টা. $85\frac{5}{7}$ ন.প.-এর আসন্ন মান 4 টা. 86 ন.প.।

উদাহরণ 2. 7টি বস্তুর মূল্য 12 টাকা হইলে একটি বস্তুর মূল্য কত ?

12 টাকা $\div$ 7 = 1 টা. $71\frac{3}{7}$ ন. প.।

এখন দোকানদারকে প্রকৃত মূল্য, (1 টা. $71\frac{3}{7}$ ন.প.) কখনও দেওয়া যায় না ; হয় তাহাকে 1 টা. 71 ন.প., নতুবা 1 টা. 72 ন.প. দিতে হইবে। দোকানদারকে 1 টা. 71 ন. প. দিলে সে প্রকৃত মূল্য অপেক্ষা (1 টা. $71\frac{3}{7}$ ন.প. − 1 টা. 71 ন.প.) বা $\frac{3}{7}$ ন.প. কম পায়। আবার 1 টা. 72 ন.প. দিলে সে প্রকৃত মূল্য অপেক্ষা (1 টা. 72 ন.প. − 1 টা. $71\frac{3}{7}$ ন.প.) বা $\frac{4}{7}$ ন.প. বেশী পায়। এক্ষেত্রে 1 টা. 71 ন.প. প্রকৃত মূল্যের অধিকতর নিকটবর্তী। সুতরাং। 1 টা. $71\frac{3}{7}$ ন.প.-এর আসন্ন মান টা. 71 ন.প.।

আসন্ন মান নির্ণয়ের পদ্ধতি : কোন রাশির আসন্ন মান নির্ণয় করিতে হইলে রাশিটির শেষে যে ভগ্নাংশ থাকে তাহা $\frac{1}{2}$ অথবা $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে উহা ত্যাগ করিয়া শেষ এককের সহিত 1 যোগ করিতে হয় ; আর ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে উহা একেবারেই ত্যাগ করিতে হয়।

দশমিকের আসন্ন মান : 3·746-এর স্থলে 3·74 লিখিলে (3·746 − 3·74) বা ·006 কম লেখা হয় এবং 3·75 লিখিলে (3·75 − 3·746) বা ·004 অধিক লেখা হয়। সুতরাং 3·74 এবং 3·75-এর মধ্যে দ্বিতীয়টি 3·746-এর অধিকতর নিকটবর্তী। অতএব, দুই দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত 3·746-এর আসন্ন মান 3·75.

আবার, 3·746-এর স্থলে 3·7 লিখিলে (3·746 − 3·7) বা ·046 কম লেখা হয় এবং 3·8 লিখিলে (3·8 − 3·746) বা ·054 অধিক লেখা হয়। সুতরাং 3·7 এবং 3·8-এর মধ্যে প্রথমটি 3·746-এর অধিকতর নিকটবর্তী। অতএব, এক দশমিক অঙ্ক পর্যন্ত 3·746-এর আসন্ন মান 3·7.

কোন দশমিকের আসন্ন মান নির্দিষ্ট সংখ্যক দশমিক পর্যন্ত নির্ণয় করিতে হইলে দশমিক বিন্দুর পর তত সংখ্যক অঙ্ক রাখিয়া তাহার ডান দিকস্থ অঙ্কগুলি পরিত্যাগ করিতে হয় এবং পরিত্যক্ত অঙ্কগুলির সর্ববাম দিকস্থ অঙ্ক যদি 5 বা 5-এর বেশী হয়, তবে উহার অব্যবহিত বামদিকের অঙ্কটির সহিত 1 যোগ করিতে হয়। যথা, 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত 3·8723689-এর আসন্ন মান 3·8724 ; কিন্তু 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত উক্ত দশমিকের আসন্ন মান 3·87.

মন্তব্য : আসন্ন মান এবং **শুদ্ধমান** একার্থক। 3·746-এর দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত মান 3·74 ; কিন্তু দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন বা শুদ্ধমান হইতেছে 3·75.

সার্থক অঙ্ক (Significant Figures) : যে-কোন রাশির মান ও অর্থ জ্ঞাপনের জন্য যে সকল অঙ্কের একান্ত প্রয়োজন, তাহাদিগকে **সার্থক অঙ্ক** বলে। যথা, 400387 অঙ্কের প্রথম সার্থক অঙ্ক 4, প্রথম দুইটি সার্থক অঙ্ক 40, প্রথম তিনটি সার্থক অঙ্ক 400 ইত্যাদি। সুতরাং সংখ্যাটির মধ্যে অবস্থিত শূন্যগুলিও সার্থক অঙ্ক। আবার, পূর্ণসংখ্যাবিহীন দশমিক ভগ্নাংশের বিন্দুর পরের শূন্য বা শূন্যসমূহ সার্থক নহে এবং দশমিক ভগ্নাংশের শূন্য ছাড়া প্রথমে যে অঙ্ক থাকে, তাহাকেই **প্রথম সার্থক অঙ্ক** (First significant figure) বলে। যেমন, 4·25-এর প্রথম সার্থক অঙ্ক 4 ; ·0035-এর প্রথম সার্থক অঙ্ক 3 ; 24·703-এর দশমাংশ পর্যন্ত সার্থক অঙ্ক 24·7. আবার, 15·203879-এর পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান 15·204 ; কিন্তু পাঁচ দশমিক পর্যন্ত আসন্ন মান 15·20388.

ভুল (Error) **:** কোন রাশির প্রকৃত মান ও আসন্ন মানের অন্তরকে **প্রকৃত ভুল** (Absolute error) বলা হয়।

প্রকৃত ভুলকে লব এবং প্রকৃত মানকে হর ধরিলে যে ভগ্নাংশটি হয়, তাহাকে আসন্ন মানের **আপেক্ষিক ভুল** (Relative error) বলা হয়।

আপেক্ষিক ভুলকে 100 দ্বারা গুণ করিলে আসন্ন মানের **শতকরা ভুল** (Percentage of error) পাওয়া যায়। যেমন,—

যদি 2·3416-কে নির্ভুল 2 দশমিক স্থান পর্যন্ত লেখা হয়, তাহা হইলে প্রকৃত ভুল = 2·3416 − 2·34 = ·0016 ;

সুতরাং আপেক্ষিক ভুল $= \frac{\text{প্রকৃত ভুল}}{\text{প্রকৃত মান}} = \frac{\cdot 0016}{2\cdot 3416} = \cdot 00068\cdots$

এবং শতকরা ভুল = 100 × আপেক্ষিক ভুল = 100 × ·00068··· = ·068···

প্রশ্নমালা 16

1. দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর :
   (i) $\frac{4}{7}$ (ii) $1\frac{3}{11}$ (iii) $\frac{5}{12}$

2. তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর :
   (i) $\frac{6}{17}$ (ii) $\frac{3}{19}$ (iii) $\frac{11}{21}$

3. চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর :
   (i) 12·738 + 6·07348 + ·00573 + ·23461
   (ii) ·0433 − ·000237 (iii) ·0724 × ·208 (iv) 1 ÷ ·023

4. (i) 10·304859-এর পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান এবং পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান কত ?

   (ii) ·10304859-এর পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান এবং পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান কত ?

   (iii) ·0010304859-এর পাঁচটি সার্থক অঙ্ক পর্যন্ত আসন্ন মান এবং পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান কত ?

5. এমন একটি দশমিক ভগ্নাংশ নির্ণয় কর যাহা $\frac{355}{113}$-এর $\frac{1}{1000000}$-এর মধ্যে থাকিবে। [C. U. 1911]

6. (i) দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর এবং প্রকৃত ভুল, আপেক্ষিক ভুল ও শতকরা ভুল স্থির কর : 3·1825.

   (ii) চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় কর এবং প্রকৃতভুল, আপেক্ষিক ভুল ও শতকরা ভুল স্থির কর : ·571428.

সপ্তম অধ্যায়

চক্রবৃদ্ধি

(Compound Interest)

অধমর্ণ যদি নির্দিষ্ট সময়ের (1 বৎসর, 6 মাস, 3 মাস ইত্যাদি) মধ্যে সুদের টাকা পরিশোধ করিতে না পারে, এবং পূর্বে যদি সর্ত থাকে, তাহা হইলে উত্তমর্ণ সেই সুদের টাকা আসলের সহিত যুক্ত করিয়া লয় এবং নির্দিষ্ট সময়ান্তে এই সবৃদ্ধিমূলকেই আসল বলিয়া গণ্য করিয়া উহার উপর সুদ চলিতে থাকে। এইরূপে প্রতি নির্দিষ্ট সময়ান্তে আসল বৃদ্ধি পাইতে থাকে এবং প্রতিবারই এইরূপে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত আসলের উপর সুদ ধরা হয়। এইরূপ সুদকে **চক্রবৃদ্ধি** (Compound Interest) বলে।

মনে কর, বার্ষিক 10% চক্রবৃদ্ধি সুদে এক ব্যক্তি 1000 টাকা ধার করিল। তাহা হইলে 1 বৎসরান্তে সুদের 100 টাকা আসল 1000 টাকার সহিত যুক্ত হইয়া 1100 টাকা দ্বিতীয় বৎসরের আসল বলিয়া গৃহীত হইবে। দ্বিতীয় বৎসরে এই 1100 টাকার সুদ 110 টাকা হইবে। ইহা দ্বিতীয় বৎসরের আসল 1100 টাকার সহিত যুক্ত হইয়া 1210 টাকা তৃতীয় বৎসরের আসল বলিয়া গৃহীত হইবে। যতদিন অধমর্ণ ঋণ পরিশোধ করিতে না পারে, ততদিন প্রতি বৎসরের জন্য এই নিয়ম চলিবে।

কয়েকটি উদাহরণের সাহায্যে চক্রবৃদ্ধি নির্ণয়ের প্রণালী দেখানো যাইতেছে।

উদাহরণ 1. বার্ষিক 5% হারে 10000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর। [C. U. 1940 ; G. U. 1949]

টাকা	
10000	= প্রথম বৎসরের আসল
500	= ,, ,, সুদ
10500	= দ্বিতীয় বৎসরে আসল
525	= ,, ,, সুদ
11025	= তৃতীয় বৎসরের আসল
551·25	= ,, ,, সুদ
11576·25	= তৃতীয় বৎসরে সমূলচক্রবৃদ্ধি।

∴ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি = টা. 11575·25 − টা. 10000

= টা. 1576·25

উদাহরণ 2. প্রতি 6 মাস অন্তর সুদ দেয় হইলে 5% হারে 200 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় কর।

প্রশ্নটিকে একটু ঘুরাইয়া এইভাবে বলা চলে যে, (2×2) বা 4 অর্ধ বৎসরে বার্ষিক (5÷2) বা 2·5% হারে চক্রবৃদ্ধি নির্ণয় করিতে হইবে। আলোচ্য ক্ষেত্রে সময়ের একক 6 মাস ধরা হইয়াছে।

টাকা	
1	= প্রথম 6 মাসের আসল
·025	= ,, ,, ,, সুদ
1·025	= দ্বিতীয় ,, ,, আসল
·025625	= ,, ,, ,, সুদ
1·050625	= তৃতীয় ,, ,, আসল
·026265625	= ,, ,, ,, সুদ
1·076890625	= চতুর্থ ,, ,, আসল
·026922266	= ,, ,, ,, সুদ
1·103812891	= 2 বৎসর পর সমূলচক্রবৃদ্ধি

∴ 1 টাকার চক্রবৃদ্ধি = (1·103812891 − 1) টাকা
= ·103812891 টাকা।

∴ 200 টাকার চক্রবৃদ্ধি = 200 × ·103812891 টাকা
= 20 টা. 76 ন. প. (আসন্ন)।

উদাহরণ 3. শতকরা বার্ষিক $2\frac{1}{2}$ টাকা হার সুদে 2 বৎসরে টা. 321·50-এর চক্রবৃদ্ধি করিতে হইবে?

$2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2 + 2$-এর $\frac{1}{4}$

টাকা	
321·50	= প্রথম বৎসরের আসল
6·43 } 1·6075 }	= ,, ,, সুদ
329·5375	= দ্বিতীয় ,, আসল
6·5907 } 1·6477 }	= ,, ,, সুদ
337·7759	= ,, ,, সমূলচক্রবৃদ্ধি।

নির্ণেয় সুদ = টা. (337·7759 − 321·50)
= টা. 16·28 (আসন্ন)।

চক্রবৃদ্ধি নির্ণয়ের সূত্র ঃ

নিম্নলিখিত প্রক্রিয়ায় সমূলচক্রবৃদ্ধি এবং তাহা হইতে চক্রবৃদ্ধি সহজেই নির্ণীত হইতে পারে।

উদাহরণ 4. শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হার সুদে 3 বৎসরে 500 টাকার সমূল-চক্রবৃদ্ধি এবং চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

1 বৎসরে 100 টাকার সবৃদ্ধিমূল $=(100+4)$ বা 104 টাকা

$\therefore$ „ „ 1 „ „ $=\frac{104}{100}$ টাকা

$\therefore$ „ „ আসলের „ $=$ আসলের $\frac{104}{100}$

$\therefore$ কোন আসলের 2 বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি $=1$ বৎসরের সবৃদ্ধিমূলের $\frac{104}{100}$

$=$ আসলের $\frac{104}{100}$ এর $\frac{104}{100}$

$=$ আসলের $(\frac{104}{100})^2$

অনুরূপভাবে, কোন আসলের 3 বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি $=$ আসলের $(\frac{104}{100})^3$

এবং কোন আসলের 4 বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি $=$ আসলের $(\frac{104}{100})^4$

ইহা হইতে নিম্নলিখিত সূত্রটি পাওয়া যায়,—

(i) $\text{সমূলচক্রবৃদ্ধি}=\text{আসল}\times\left(1+\frac{\text{সুদের হার}}{100}\right)^{\text{বৎসর}}$

এবং (ii) চক্রবৃদ্ধি $=$ সমূলচক্রবৃদ্ধি $-$ আসল।

$\therefore$ শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হার সুদে 3 বৎসরে 500 টাকার সমূলচক্রবৃদ্ধি

$=500\times\left(1+\frac{4}{100}\right)^3$ টাকা

$=(500\times\frac{26}{25}\times\frac{26}{25}\times\frac{26}{25})$ টাকা

$=\frac{70304}{125}$ টাকা $=$ টা. 562·432

$\therefore$ নির্ণেয় সমূলচক্রবৃদ্ধি $=562$ টা. 43 ন. প. (আসন্ন)

এবং নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধি $=(562$ টা. 43 ন. প. -500 টা.)

বা 62 টা. 43 ন. প. (আসন্ন)।

উদাহরণ 5. প্রতি 6 মাস অন্তর দেয়, শতকরা বার্ষিক 6 টাকা হার সুদে 300 টাকার $2\frac{1}{2}$ বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?

100 টাকার 1 বৎসরের সুদ $=6$ টাকা

$\therefore$ 100 টাকার 6 মাসের সুদ $=\frac{6}{2}$ বা 3 টাকা।

এক্ষেত্রে প্রতি 6 মাস অন্তর সুদ আসলের সহিত যুক্ত হইতেছে। $2\frac{1}{2}$ বৎসে 5টি '6 মাস'।

$\therefore$ সমূলচক্রবৃদ্ধি $=300\times\left(1+\frac{3}{100}\right)^5$ টাকা $=300\times(1\cdot03)^5$ টাকা

$=300\times1\cdot1592740743$ টাকা

$=347\cdot78$ টাকা (আসন্ন)।

[যদি 6 মাস পর পর সুদ দেয় হয়, তবে অর্ধ সুদের হারে দ্বিগুণ বৎসরের সুদ : এবং যদি 3 মাস পর পর সুদ দেয় হয়, তবে এক-চতুর্থাংশ সুদের হারে 4 গু বৎসরের সুদ নির্ণয় করিতে হয়।]

উদাহরণ 6. কোন দেশের লোকসংখ্যা 24000 এবং উহা প্রতি বৎসরান্তে 5% হারে বৃদ্ধি পায়। 3 বৎসর অন্তে লোকসংখ্যা কত হইবে ?

বৃদ্ধির হার $=5\%$, বৎসর $=3$ এবং বর্তমান লোকসংখ্যা $=24000$.

অতএব, সূত্রানুযায়ী,

নির্ণেয় লোকসংখ্যা = বর্তমান লোকসংখ্যা $\times\left(1+\frac{5}{100}\right)$

$=24000\times(1\cdot05)^3$

$=27783.$

মন্তব্য ঃ যে সকল অঙ্কে জনসংখ্যা, আয় প্রভৃতি যদি প্রতি বৎসর একটি নির্দিষ্ট শতকরা হারে বৃদ্ধি পাইতে থাকে, তবে সেই সকল অঙ্কও চক্রবৃদ্ধি অঙ্কের সূত্রের সাহায্যে করা যাইতে পারে।

প্রশ্নমালা 17

1. বার্ষিক 5% হারে 200 টাকার 2 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
2. বার্ষিক 5% হারে 500 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
3. বার্ষিক 4% হারে 1000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
4. বার্ষিক 4% হারে 5000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
5. বার্ষিক 6% হারে 1000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
6. বার্ষিক 3% হারে 100000 টাকার 4 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?
7. বার্ষিক 5% হারে 1000 টাকার 3 বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি কত ?
8. বার্ষিক 8% হারে 1000 টাকার 6 বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি কত ?

9. বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ হারে 1750 টাকার 3 বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি কত ?

10. বার্ষিক 6% হারে 5 লক্ষ টাকার 3 বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি কত ?
[C. U. 1943]

11. 6 মাস অন্তর সুদ দেয় হইলে, শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সুদে $2\frac{1}{2}$ বৎসরের 2560 টাকার চক্রবৃদ্ধি কত ?

12. 3 মাস অন্তর সুদ দেয় হইলে, শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সুদে 1000 টাকার 1 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি কত ?

13. 6 মাস অন্তর সুদ দেয় হইলে ও শতকরা বার্ষিক 4 টাকা হার সুদে 250 টাকার 2 বৎসরান্তে চক্রবৃদ্ধি কত হইবে ?

14. কোন সমিতিতে প্রতি বৎসর সভ্যসংখ্যা 10% হিসাবে বৃদ্ধি পায়। প্রথম বৎসর 4000 সভ্য থাকিলে তৃতীয় বৎসরান্তে সভ্যসংখ্যা কত হইবে ?

15. কোন দেশের লোকসংখ্যা প্রতি বৎসরে 4% বৃদ্ধি পায়। বর্তমান লোকসংখ্যা 3125000 হইলে 4 বৎসর পরে সেখানে লোকসংখ্যা কত হইবে ?

16. বার্ষিক 5% হারে 1000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের অন্তর কত ?
[C. U. 1948]

17. 5000 টাকার 5% হারে 4 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি ও সরল সুদের অন্তর নির্ণয় কর।
[C. U. 1949]

18. A ও B শতকরা 5 টাকা হার সুদে প্রত্যেকে 380 টাকা ধার করিল। A সরল সুদের হিসাবে এবং B চক্রবৃদ্ধি হিসাবে সুদ দেয়। 3 বৎসর পরে তাহাদের প্রদত্ত সুদের অন্তর কত ?

*19. A 5% চক্রবৃদ্ধি হারে 5000 টাকা ধার দিল এবং B তত টাকা $5\frac{1}{4}\%$ সরল সুদে ধার দিল। 3 বৎসরান্তে কে অধিক লাভবান হইবে এবং কত অধিক লাভবান হইবে ?
[G. U. 1953]

*20. শতকরা 5 টাকা হারে 2 বৎসরে সরল সুদ ও চক্রবৃদ্ধির পার্থক্য 2 টাকা 25 ন.প. হইলে, আসল কত টাকা ?

অষ্টম অধ্যায়

লাভ-ক্ষতি

(Profit and Loss)

যে মূল্যে কোন দ্রব্য ক্রয় করা হয়, তাহাকে উহার **ক্রয়মূল্য** (Cost Price) এবং যে মূল্যে উহা বিক্রয় করা হয়, তাহাকে উহার **বিক্রয়মূল্য** (Selling Price) বলা হয়। ক্রয়মূল্য অপেক্ষা বিক্রয়মূল্য বেশী হইলে **লাভ** (Profit) এবং ক্রয়মূল্য অপেক্ষা বিক্রয়মূল্য কম হইলে **ক্ষতি** (Loss) হয়। লাভ-ক্ষতি সর্বদা দ্রব্যের ক্রয়মূল্যের উপর হিসাব করিতে হয়।

কোন দ্রব্য বিক্রয় করিয়া 6% লাভ হইয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, 100 টাকা যদি দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য হয় তবে উহার বিক্রয়মূল্য $=(100+6)$ বা 106 টাকা; সুতরাং বিক্রয়মূল্য $=\frac{106}{100}\times$ ক্রয়মূল্য।

আবার, কোন দ্রব্য বিক্রয় করিয়া 6% ক্ষতি হইয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, 100 টাকা যদি দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য হয় তবে উহার বিক্রয়মূল্য $=(100-6)$ বা 94 টাকা; সুতরাং বিক্রয়মূল্য $=\frac{94}{100}\times$ ক্রয়মূল্য।

উদাহরণ 1. 10 টাকা 50 নয়া পয়সায় একটি **কলম** বিক্রয় করায় 5% লাভ হইল। কলমটির ক্রয়মূল্য কত ?

কলমটি বিক্রয় করিয়া 5% লাভ হইয়াছে ;

সুতরাং $(100+5)$ বা 105 টাকা বিক্রয়মূল্য হইলে ক্রয়মূল্য = 100 টাকা

∴ 1 " " " " $=\frac{100}{105}$ "

∴ টা. 10·50 " " " $=\frac{100}{105}\times$ টা. 10·50

= 10 টাকা।

∴ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য = 10 টাকা।

উদাহরণ 2. 875 টাকায় একটি গরু ক্রয় করিয়া কত মূল্যে বিক্রয় করিলে শতকরা 8 টাকা লাভ হইবে ?

8% লাভ করিবার জন্য,

100 টাকা ক্রয়মূল্য হইলে বিক্রয়মূল্য হইবে $(100+8)$ বা 108 টাকা

1 " " " " " $\frac{108}{100}$ টাকা

∴ 875 " " " " " $\frac{108}{100}\times 875$ টাকা = 945 টাকা।

∴ নির্ণেয় বিক্রয়মূল্য = 945 টাকা।

উদাহরণ 3. 240 টাকায় পণ্য বিক্রয় করিয়া এক বণিকের 25% লাভ হইল। 216 টাকায় উহা বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা কত লাভ হইত? [C. U. 1917]

240 টাকা $= \frac{125}{100} \times$ ক্রয়মূল্য

∴ ক্রয়মূল্য $= \frac{240 \times 100}{125}$ টাকা $= 192$ টাকা।

∵ পণ্য 216 টাকায় বিক্রয় করিলে লাভ হয় $(216 - 192)$ টাকা $= 24$ টাকা।

∴ 192 টাকায় লাভ হয় 24 টাকা

∴ 100 টাকায় লাভ হয় $\frac{24 \times 100}{192}$ বা $12\frac{1}{2}$ টাকা।

∴ নির্ণেয় লাভ $= 12\frac{1}{2}\%$

উদাহরণ 4. 10 টাকায় 11টি হিসাবে কাঁঠাল ক্রয় করিয়া 11 টাকায় 10টি হিসাবে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হইবে?

11টি কাঁঠালের ক্রয়মূল্য $= 10$ টাকা

∴ 1টি কাঁঠালের ক্রয়মূল্য $= \frac{10}{11}$ টাকা।

10টি কাঁঠালের বিক্রয়মূল্য $= 11$ টাকা

∴ 1টি কাঁঠালের বিক্রয়মূল্য $= \frac{11}{10}$ টাকা।

∴ লাভ $= (\frac{11}{10} - \frac{10}{11})$ বা $\frac{21}{110}$ টাকা।

অতএব, $\frac{10}{11}$ টাকায় লাভ $= \frac{21}{110}$ টাকা

∴ 1 „ „ $= (\frac{21}{110} \times \frac{11}{10})$ টাকা

∴ 100 „ „ $= \frac{21 \times 11 \times 100}{110 \times 10}$ বা 21 টাকা।

∴ নির্ণেয় লাভ $= 21\%$

[লাভ ও ক্ষতি সর্বদা ক্রয়মূল্যের উপর নির্ণয় করিতে হয়। এখানে 11টি কাঁঠালের উপর শতকরা হার ধরিয়া অঙ্ক কষিলে ভুল হইবে।]

উদাহরণ 5. টাকায় 12টি লেবু বিক্রয় করিলে 4% ক্ষতি হয়। টাকায় কয়টি লেবু বিক্রয় করিলে 44% লাভ হয়? [P. U. 1934]

12টি লেবুর বিক্রয়মূল্য $= 1$ টাকা; ∴ 1টির বিক্রয়মূল্য $= \frac{1}{12}$ টাকা

∴ ক্রয়মূল্যের $(100 - 4)$ বা $96\% = \frac{1}{12}$ টাকা

∴ „ $(100 + 44)$ বা $144\% = \frac{1 \times 144}{12 \times 96}$ বা $\frac{1}{8}$ টাকা।

∴ প্রতিটি লেবুর বিক্রয়মূল্য $\frac{1}{8}$ টাকা;

সুতরাং, টাকায় $(1 \div \frac{1}{8})$ বা 8টি লেবু বিক্রয় করিতে হইবে।

উদাহরণ 6. কোন অসাধু ব্যবসায়ী পণ্য ক্রয় করিবার কালে বিক্রেতাকে 5% ঠকায় এবং বিক্রয় করিবার কালে ক্রেতাকে 5% ঠকায়। ইহাতে সেই অসাধু ব্যবসায়ীর শতকরা কত লাভ হয়?

ব্যবসায়ী বিক্রেতাকে 5% ঠকায়;

সুতরাং, সে 100 টাকায় (100+5) বা 105 টাকার পণ্য ক্রয় করে।

আবার, ব্যবসায়ী ক্রেতাকে 5% ঠকায়,

∴ সে 100 টাকার পণ্য বিক্রয় করে (100+5) বা 105 টাকায়

∴ সে ক্রীত 105 „ „ „ „ $\frac{105 \times 105}{100}$ বা $110\frac{1}{4}$ টাকায়;

অর্থাৎ, যে পণ্য সে 100 টাকায় ক্রয় করে তাহা সে $110\frac{1}{4}$ টাকায় বিক্রয় করে।

∴ ব্যবসায়ীর লাভ $=(110\frac{1}{4}-100)$ বা $10\frac{1}{4}\%$

উদাহরণ 7. এক ব্যক্তি একটি দ্রব্য ক্রয় করিয়া 6% লাভে বিক্রয় করিল। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য 4% কম এবং বিক্রয়মূল্য $2\frac{3}{8}$ টাকা বেশী হইলে, তাহার 12% লাভ হইত। সে কত মূল্যে দ্রব্যটি ক্রয় করিয়াছিল? [C. U. 1944]

দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য 100 টাকা হইলে, 6% লাভে উহার বিক্রয়মূল্য $=(100+6)$ বা 106 টাকা হয়।

4% কমে দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য হইলে, ক্রয়মূল্য হইত $(100-4)$ বা 96 টাকা।

12% লাভে 96 টাকা মূল্যের দ্রব্যটির বিক্রয়মূল্য হইত $(\frac{96 \times 112}{100})$
বা $\frac{2688}{25}$ টাকা।

∴ পূর্বাপেক্ষা বিক্রয়মূল্য বেশী হইত $(\frac{2688}{25}-106)$ বা $\frac{38}{25}$ টাকা।

সুতরাং, বিক্রয়মূল্য $\frac{38}{25}$ টাকা বেশী হয়, ক্রয়মূল্য যখন 100 টাকা

∴ „ $2\frac{3}{8}$ বা $\frac{19}{8}$ টাকা „ „ „ $\frac{100 \times 25 \times 19}{38 \times 8}$ টাকা
$=156\frac{1}{4}$ টাকা।

∴ দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য $=156$ টা. 25 ন. প.।

উদাহরণ 8. এক ব্যক্তি 760 টাকায় একটি ঘোড়া এবং একটি গরু কিনিয়া উহাদিগকে 864 টাকায় বিক্রয় করিল। উহাতে তাহার ঘোড়ার মূল্যের উপর 20% লাভ এবং গরুর মূল্যের উপর 10% ক্ষতি হইল। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত?

ঘোড়া এবং গরু উভয়েই 20% লাভ হইলে বিক্রয়মূল্য হইত $(\frac{100+20}{100})$ এর 760 বা 912 টাকা এবং তখন বিক্রয়মূল্য $(912-864)$ বা 48 টাকা বেশী হইত।

∴ গরুর মূল্য $(10+20)$ বা 30% বেশী ধরায়, বিক্রয়মূল্য 48 টাকা বেশী হইয়াছে।

∴ গরুর মূল্যের 30% বা $\frac{30}{100}$ = 48 টাকা ;

∴ গরুর মূল্য = $48 \times \frac{100}{30}$ বা 160 টাকা।

∴ ঘোড়ার নির্ণেয় মূল্য = (760 – 160) বা 600 টাকা।

উদাহরণ 9. জনৈক ব্যবসায়ী ক্রেতাকে বিক্রয়মূল্যের উপর 10% কমিশন দিয়াও দ্রব্যটির ক্রয়মূল্যের উপর মোট 20% লাভ করে। ঐ দ্রব্যের ধার্য-মূল্য উহার ক্রয়মূল্য অপেক্ষা শতকরা কত বেশী লিখা হইয়াছিল ? [D. B. 1940]

দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য 100 টাকা হইলে উহার ধার্য-মূল্য এমন হওয়া চাই, যাহার (100 – 10)% বা 90% = (100 + 20) বা 120 টাকা হয় ; কারণ ধার্য-মূল্যের 10% কমিশন বাদ দিয়া ক্রেতার নিকট হইতে মূল্য লওয়া হইয়াছিল।

এখন ধার্য-মূল্যের 90% বা $\frac{9}{10}$ = 120 টাকা

∴ ধার্য-মূল্য = $(120 \times \frac{10}{9})$ বা $133\frac{1}{3}$ টাকা ;

অর্থাৎ 100 টাকা মূল্যের দ্রব্যের ধার্য-মূল্য হয় $133\frac{1}{3}$ টাকা।

∴ ক্রয়মূল্যের উপর $(133\frac{1}{3} - 100)$ বা $33\frac{1}{3}$% বেশী ধার্য-মূল্য লিখা হইয়াছিল।

উদাহরণ 10. একটি কলম বিক্রয় করিয়া প্রস্তুতকারক 25%, পাইকারী-বিক্রেতা 40% এবং খুচরা-বিক্রেতা 75% লাভ করে। কলমটির খুচরা বিক্রয়মূল্য 25 টাকা হইলে, উহার উৎপাদন খরচ কত হইবে ? [C. U. 1950]

কলমটির উৎপাদন-খরচ 100 টাকা হইলে, পাইকারী-বিক্রেতার ক্রয়মূল্য = (100 + 25) বা 125 টাকা। অতএব, তাহার বিক্রয়মূল্য = $\frac{140}{100} \times 125$ টাকা = 175 টাকা এবং ইহাই খুচরা-বিক্রেতার ক্রয়মূল্য।

খুচরা-বিক্রেতা 75% লাভে বিক্রয় করায়,

কলমটির খুচরা বিক্রয়মূল্য = $\frac{175}{100} \times 175$ টাকা = $\frac{175 \times 7}{4}$ টাকা।

$\frac{175 \times 7}{4}$ টাকা খুচরা বিক্রয়মূল্য হইলে, উৎপাদন-খরচ 100 টাকা

∴ 25 „ „ „ „ „ „ $\frac{100 \times 4 \times 25}{175 \times 7}$ টাকা

= $\frac{400}{49}$ টাকা = 8·16 টাকা।

∴ নির্ণেয় উৎপাদন খরচ = টা. 8·16

[এইরূপ অঙ্কের সমাধান শেষ হইতেও করা যায়।]

প্রশ্নমালা 18

1. 87·50 টাকার জিনিস কত টাকায় বিক্রয় করিলে 8% লাভ হইবে ?

2. 600 টাকার জিনিষ 450 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত ক্ষতি হয় ?

3. একটি ঘোড়া 138 টাকায় বিক্রয় করিলে 8% ক্ষতি হয়। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত ?

4. 4500 টাকায় একটি জমি বিক্রয় করিলে $12\frac{1}{2}\%$ লাভ হয়। উহা 3800 টাকায় বিক্রয় করিলে শতকরা কত ক্ষতি হইবে? [C. U. 1924]

5. 13 টাকা 75 ন. প.-তে একটি দ্রব্য বিক্রয় করিলে বিক্রেতার 10% লাভ হয়। দ্রব্যটির ক্রয়মূল্য কত?

6 এক ব্যক্তি 960 টাকায় একটি ঘোড়া বিক্রয় করিয়া শতকরা 25 টাকা লাভ করিল। উহা 864 টাকায় বিক্রয় করিলে তাহার শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইত? [E. B. S. B. 1951]

*7. একটি দ্রব্য বিক্রয় করিয়া $2\frac{1}{2}\%$ ক্ষতি হইল। উহা 6 টাকা অধিক মূল্যে বিক্রয় করিলে 5% লাভ হইত। উহার ক্রয়মূল্য কত? [C. U. 1934]

*8. একখানি পুস্তক বিক্রয় করিয়া 13% ক্ষতি হইল। উহা 9 টাকা 75 ন. প. অধিক মূল্যে বিক্রয় করিলে 25% লাভ হইত। উহার ক্রয়মূল্য কত?

9. 5 টাকায় 6টি আনারস কিনিয়া 6 টাকায় 5টি আনারস বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ হয়?

10. টাকায় 4টি হিসাবে কতকগুলি এবং টাকায় 3টি হিসাবে ঠিক ততগুলি আম ক্রয় করিয়া সমস্ত আম 7টি 2 টাকা হিসাবে বিক্রয় করা হইল। মোটের উপর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল?

11. প্রতিটি 6450 টাকা হিসাবে এক ব্যক্তি দুইটি বাড়ী ক্রয় করিল। একটি বাড়ী 10% লাভে এবং অপরটি 6% ক্ষতিতে বিক্রয় করিলে তাহার মোটের উপর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল? [W. B. S. B. 1957]

*12. এক ব্যক্তি 1750 টাকায় 20টি ঘোড়া বিক্রয় করায়, তাহার 6টি ঘোড়ার ক্রয়মূল্যের সমান ক্ষতি হইল। প্রতিটি ঘোড়ার ক্রয়মূল্য এবং শতকরা ক্ষতির পরিমাণ নির্ণয় কর।

13. এক ব্যক্তি 16টি গরু বিক্রয় করিয়া 4টি গরুর বিক্রয়মূল্যের সমান লাভ করিল। তাহার শতকরা কত লাভ হইল?

14. কোন ব্যবসায়ী 100 কুইন্ট্যাল শস্য খরিদ করিয়া 36 টাকা কুইন্ট্যাল দরে 50 কুইন্ট্যাল বিক্রয় করায় তাহার $7\frac{1}{2}\%$ ক্ষতি হইল। অবশিষ্ট শস্য প্রতি কুইন্ট্যাল কি দরে বিক্রয় করিলে তাহার মোটের উপর 10% লাভ হইবে?

15. 824 টাকায় একটি বাড়ী বিক্রয় করা হইল। উহা 840 টাকায় বিক্রয় করা হইলে আরও 2% অধিক লাভ হইত। বাড়ীটির ক্রয়মূল্য কত? [G. U. 1950]

16. একটি বাড়ী 456 টাকায় বিক্রয় করিয়া কিছু লাভ হইল। উহা 465 টাকায় বিক্রয় করিলে আরও 2% লাভ হইত। বাড়ীটি শতকরা কত লাভে বিক্রয় করা হইয়াছিল? [G. U. 1954]

17. একটি বাড়ী 4000 টাকায় বিক্রয় করায় কিছু ক্ষতি হইল। উহা 5000 টাকায় বিক্রয় করা হইলে পূর্ব ক্ষতির $66\frac{2}{3}$% অংশ লাভ হইত। বাড়ীটির ক্রয়মূল্য কত? [D. B. 1924 ; C. U. 1949]

18. A 20% ক্ষতিতে B-কে একটি দ্রব্য বিক্রয় করে। B 20% লাভে উহা C-কে বিক্রয় করে। C-এর ক্রয়মূল্যে যদি A দ্রব্যটি বিক্রয় করে তবে তাহার মোটের উপর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হয়? [C. U. 1942]

19. এক শঠ ব্যবসায়ী দ্রব্য ক্রয় করিবার সময় মহাজনকে 10% এবং উহা বিক্রয় করিবার সময় ক্রেতাকে 10% ঠকায়। ব্যবসায়ীর শতকরা লাভ কত?

20. এক ব্যবসায়ী 50% লাভে মাল বিক্রয় করিয়া ক্রেতার নিকট হইতে টাকা প্রতি মাত্র 50 ন. প. আদায় করিতে পারিল। ইহাতে ব্যবসায়ীর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইল?

*21. 15% লাভে একটি ঘড়ি বিক্রয় করা হইল। যদি ঘড়িটির ক্রয়মূল্য 5% কম হইত এবং উহা 21 টাকা কম মূল্যে বিক্রয় করা হইত, তাহা হইলে মোটের উপর 10% লাভ হইত। ঘড়িটির ক্রয়মূল্য কত?

22. এক কৃষক 2400 টাকায় 96টি বলদ ক্রয় করিল। সে 36টি বলদ 15% লাভে, 48টি বলদ $12\frac{1}{2}$% লাভে বিক্রয় করিল। দুইটি বলদ মরিয়া গেল এবং অবশিষ্টগুলি সে ক্রয়মূল্যেই বিক্রয় করিল। তাহার মোটের উপর কত লাভ হইল?

23. এক ব্যবসায়ী 20% লাভে বিক্রয়মূল্য নির্ধারিত করিয়া ক্রেতাকে $12\frac{1}{2}$% কমিশন দেয়। তাহার মোটের উপর কত লাভ হয়? [W. B. S. B. 1955]

24. কোন ব্যবসায়ী পণ্যের ধার্য-মূল্যের উপর ক্রেতাকে 5% কমিশন দেয়। যে পণ্যের প্রকৃত মূল্য 712 টা. 50 ন. প. তাহা বিক্রয় করিয়া $33\frac{1}{3}$% লাভ করিতে হইলে তাহাকে ধার্য-মূল্য কত টাকা লিখিতে হইবে?

*25. এক ব্যক্তি মোট 500 টাকায় একটি ঘোড়া ও একটি গাড়ী ক্রয় করিল। সে ঘোড়াটি 20% লাভে এবং গাড়ীটি 10% ক্ষতিতে বিক্রয় করিয়া মোটের উপর 2% লাভ করিল। ঘোড়ার ক্রয়মূল্য কত? [D. B. 1936]

*26. একটি দ্রব্য বিক্রয় করিয়া উৎপাদনকারী 30%, পাইকারী-বিক্রেতা 20% এবং খুচরা-বিক্রেতা 50% লাভ করে। দ্রব্যটির খুচরা বিক্রয়-মূল্য 936 টাকা হইলে, উৎপাদন-খরচ কত হইবে? [B. U. 1962]

নবম অধ্যায়

বিভিন্ন জাতীয় মিশ্ররাশি

ভারত সরকার কর্তৃক ওজন, দৈর্ঘ্য, ঘনত্ব প্রভৃতি মাপের মেট্রিক প্রণালী প্রবর্তনের পূর্বে আমাদের দেশে দৈর্ঘ্য ও ঘনত্ব মাপিতে বৃটিশ পদ্ধতি প্রচলিত ছিল। বর্তমানে যাবতীয় সরকারী কাজে মেট্রিক পদ্ধতি প্রচলিত থাকিলেও, বিভিন্ন ক্ষেত্রে জনসাধারণ দৈর্ঘ্য ও ঘনত্ব প্রভৃতি মাপিতে এখনও বৃটিশ পদ্ধতির ব্যবহার করিয়া থাকে। অধিকন্তু আন্তর্জাতিক লেন-দেনের জন্য বৃটিশ, ফরাসী ও আমেরিকার মুদ্রাগুলির সহিত পরিচয় থাকা প্রয়োজন। আলোচ্য অধ্যায়ে বিদেশীয় মুদ্রা, ওজন, দৈর্ঘ্য এবং ঘনত্ব মাপিবার প্রণালী সম্পর্কে আলোচনা করা হইবে।

এককাবলী :

মুদ্রা পরিমাণ

বৃটিশ পদ্ধতি

4 ফার্দিং (ফা.) = 1 পেনি (পে.)
12 পেনি = 1 শিলিং (শি.)
20 শিলিং = 1 পাউণ্ড (পা.)
2 শিলিং = 1 ফ্লোরিণ্
5 শিলিং = 1 ক্রাউন
21 শিলিং = 1 গিনি
27 শিলিং = 1 ময়ডোর

আমেরিকান পদ্ধতি

10 সেণ্ট = 1 ডাইম্
10 ডাইম্ = 1 ডলার

ফরাসী পদ্ধতি

10 সেন্টিম্ = 1 ডেসিম্
10 ডেসিম্ = 1 ফ্রাঙ্ক
20 ফ্রাঙ্ক = 1 নেপোলিয়ান

বৃটিশ ওজন পরিমাণ

16 ড্রাম (ড্রা.) = 1 আউন্স (আ.)
16 আউন্স = 1 পাউণ্ড (পা.)
28 পাউণ্ড = 1 কোয়ার্টার (কো.)
4 কোয়ার্টার = 1 হন্দর (হ.)
20 হন্দর = 1 টন (ট.)

বৃটিশ দৈর্ঘ্য পরিমাণ

12 ইঞ্চি (ই.) = 1 ফুট (ফু.)
3 ফুট = 1 গজ (গ.)
1760 গজ = 1 মাইল (মা.)
220 গজ = 1 ফার্ল (ফা.)
8 ফার্লং = 1 মাইল (মা.)

বৃটিশ বর্গ পরিমাণ

144 ব. ই. = 1 ব. ফু.
9 ব. ফু. = 1 ব. গ.
4840 ব. গ. = 1 একর

বৃটিশ ঘন পরিমাণ

1728 ঘ. ই. = 1 ঘ. ফু.
27 ঘ. ফু. = 1 ঘ. গ.

বৃটিশ তরল-পদার্থের মাপ

2 পাইণ্ট (পা.) = 1 কোয়ার্ট (কো.) 1 গ্যালন জলের আয়তন = প্রায় 277 ঘনইঞ্চি
4 কোয়ার্ট = 1 গ্যালন (গ্যা.) 1 ঘনফুট জলের ওজন = 62·5 পাউণ্ড

শিক্ষার্থীদের সুবিধার জন্য এখানে বিভিন্ন এককাবলীর কতিপয় অঙ্ক কষিয়া দেওয়া হইতেছে।

উদাহরণ 1. সরল কর :

$\frac{3\frac{1}{4}}{15\frac{3}{5}}$ এর 1 পা. 10 শি. + $\frac{3}{4}$ এর 105 পা. 10 শি. 6 পে. + $\frac{3}{5}$ এর 21 শি. 8 পে.

[W. B. C. S. 1951]

রাশিমালা = $\frac{\frac{13}{4}}{\frac{78}{5}}$ এর $1\frac{10}{20}$ পা. + $\frac{3}{4}$ এর 105 পা. $10\frac{6}{12}$ শি. + $\frac{3}{5}$ এর 21 $\frac{8}{12}$ শি.

$= (\frac{13}{4} \times \frac{5}{78})$ এর $1\frac{1}{2}$ পা. + $\frac{3}{4}$ এর $105\frac{10\frac{1}{2}}{20}$ পা. + $\frac{3}{5}$ এর $\frac{\frac{65}{3}}{20}$ পা.

$= \frac{5}{24}$ এর $1\frac{1}{2}$ পা. + $\frac{3}{4}$ এর $105\frac{21}{40}$ পা. + $\frac{3}{5}$ এর $\frac{65}{60}$ পা.

$= \frac{5}{24}$ এর $\frac{3}{2}$ পা. + $\frac{3}{4}$ এর $\frac{4221}{40}$ পা. + $\frac{3}{5}$ এর $\frac{13}{12}$ পা.

$= \frac{5}{16}$ পা. + $\frac{12663}{160}$ পা. + $\frac{13}{20}$ পা. = $\frac{12817}{160}$ পা. = 80 পা. 2 শি. 1 পে. 2 ফা.

উদাহরণ 2. 1 পা. 5 শি. এর $\frac{(3{\cdot}47)^2-(2{\cdot}53)^2}{{\cdot}94}$-এর মান নির্ণয় কর এবং যদি 1 টাকা = 1 শি. 6 পে. হয় তাহা হইলে লব্ধমানকে টাকায় প্রকাশ কর।

রাশিমালা = 1 পা. 5 শি. এর $\frac{(3{\cdot}47)^2-(2{\cdot}53)^2}{{\cdot}94}$

= 1 পা. 5 শি. এর $\frac{(3{\cdot}47+2{\cdot}53)(3{\cdot}47-2{\cdot}53)}{{\cdot}94}$

= 1 পা. 5 শি. এর $\frac{6\times{\cdot}94}{{\cdot}94}$ = 1পা. 5 শি × 6 = 7 পা. 10 শি.

এখন, 1 টাকা = 1 শি. 6 পে. = $1\frac{6}{12}$ শি. = $\frac{3}{2}$ শি.

∴ 7 পা. 10 শি. = (7 পা. 10 শি ÷ $\frac{3}{2}$ শি.) টাকা

= {(7 × 20 + 10) শি. ÷ $\frac{3}{2}$ শি } টাকা

= 150 × $\frac{2}{3}$ টাকা = 100 টাকা।

উদাহরণ 3. 18 ফু. 9 ই. দীর্ঘ এবং 13 ফু. 4 ই. বিস্তৃত একটি ঘর কার্পেট দিয়া মুড়িতে হইবে। ঘরটির দৈর্ঘ্য যদি 3 ফুট অধিক হইত, তবে খরচ 30 ডলার বেশী লা[illegible]। ঘরটি মুড়িতে কত খরচ পড়িবে ?

18 ফু 9 ই. = $18\frac{9}{12}$ বা $18\frac{3}{4}$ ফুট ; 13 ফু. 4 ই. = $13\frac{4}{12}$ বা $13\frac{1}{3}$ ফুট

∴ ঘরটির ক্ষেত্রফল = $18\frac{3}{4}$ ফুট × $13\frac{1}{3}$ ফুট = 250 বর্গফুট।

ঘরটি যদি দৈর্ঘ্যে 3 ফুট বেশী হইত, তবে অতিরিক্ত স্থানের ক্ষেত্রফল, 3 ফুট × $13\frac{1}{3}$ ফুট বা 40 বর্গফুটের জন্য 30 ডলার বেশী খরচ লাগিত।

∴ 1 বর্গফুট স্থানের জন্য খরচ $=30$ ডলার $\div 40=\frac{3}{4}$ ডলার।

∴ 250 বর্গফুট স্থানের জন্য খরচ $=(\frac{3}{4}\times 250)$ ডলার $=187\frac{1}{2}$ ডলার

$=187$ ডলার 50 সেণ্ট।

উদাহরণ 4. একটি আয়তাকার উদ্যানের চারিধারে 6 ফুট উচ্চ এবং 9 ইঞ্চি পুরু প্রাচীর আছে। যদি প্রাচীরের ভিতরের দিকে ঐ উদ্যানের দৈর্ঘ্য 120 ফুট এবং বিস্তার 90 ফুট হয়, তাহা হইলে ঐ প্রাচীর তৈয়ারি করিতে 9 ইঞ্চি লম্বা, $4\frac{1}{2}$ ইঞ্চি চওড়া এবং 3 ইঞ্চি পুরু কতগুলি ইট লাগিবে? [C. U. 1935]

প্রাচীরের ভিতরকার উদ্যানের ক্ষেত্রফল $=120\times 90$ বর্গফুট $=10800$ বর্গফুট ;

প্রাচীরসহ উদ্যানের ক্ষেত্রফল $=(120$ ফু. $+2\times 9$ ই. $)\times(90$ ফু. $+2\times 9$ ই. $)$

$=(120+1\frac{1}{2})$ ফু. $\times(90+1\frac{1}{2})$ ফু.

$=121\frac{1}{2}\times 91\frac{1}{2}$ বা $\frac{44469}{4}$ বর্গফুট।

অতএব প্রাচীর দ্বারা অধিকৃত জমির ক্ষেত্রফল $=(\frac{44469}{4}-10800)$ বর্গফুট

$=\frac{1269}{4}$ বর্গফুট।

∴ প্রাচীরের ঘনফল $=\frac{1269}{4}\times 6$ ঘনফুট।

আবার, প্রতিটি ইটের ঘনফল $=\left(\frac{9}{12}\times\frac{4\frac{1}{2}}{12}\times\frac{3}{12}\right)$ বা $\frac{9}{128}$ ঘনফুট।

∴ ইটের সংখ্যা $=\frac{1269\times 6}{4}\div\frac{9}{128}$ বা 27072

উদাহরণ 5. যখন গমের মূল্য প্রতি কোয়ার্টার 8 পাউণ্ড, তখন 1 পেনি মূল্যের রুটির ওজন 6 আউন্স। প্রতি কোয়ার্টার গমের মূল্য যখন 9 পা. 12 শি., তখন 1 শিলিং মূল্যের রুটির ওজন কত হইবে?

8 পা. $=8\times 20$ বা 160 শিলিং

9 পা. 12 শি. $=(9\times 20+12)$ বা 192 শিলিং

যখন 1 কো. গমের মূল্য 160 শি. তখন 1 পে. রুটির ওজন 6 আ.

∴ " " " " " 192 " " " " " " $\frac{6\times 160}{192}$ আ.

∴ " " " " " " " " 1 শি. " " $\frac{6\times 160\times 12}{192}$ আ.

$=60$ আউন্স $=3$ পা. 12 আ.

উদাহরণ 6. A, B ও C একটি চৌবাচ্চা জলপূর্ণ করিতে আরম্ভ করিল। A প্রতি 6 মিনিটে 1 পাইণ্ট করিয়া, B প্রতি 8 মিনিটে 1 কোয়ার্ট করিয়া এবং C প্রতি 10 মিনিটে 1 গ্যালন করিয়া জল আনিতে আরম্ভ করিল। যদি চৌবাচ্চায় 58 গ্যালন জল ধরে, তবে কতক্ষণে শূন্য চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হইবে ?

6 মিনিট, 8 মিনিট ও 10 মিনিট-এর ল. সা. গু. = 120 মিনিট।

∴ প্রতি 120 মিনিটে,

A আনয়ন করে (120÷6) বা 20 বারে 20 পাইণ্ট জল,

B ,, ,, (120÷8) বা 15 বারে 15×2 বা 30 পাইণ্ট জল

এবং C ,, ,, (120÷10) বা 12 বারে 12×8 বা 96 পাইণ্ট জল।

∴ প্রতি 120 মিনিটে তাহারা আনয়ন করে (20+30+96) বা 146 পাইণ্ট জল।

∴ তাহারা 3×120 মিনিটে বা 6 ঘণ্টায় আনয়ন করে 3×146 পাইণ্ট বা 54 গ্যালন 6 পাইণ্ট জল।

চৌবাচ্চায় ধরে 58 গ্যালন জল ;

∴ 6 ঘণ্টা জল আনিবার পরও চৌবাচ্চা পূর্ণ হইতে জল লাগিবে (58 গ্যালন −54 গ্যালন 6 পাইণ্ট) বা 26 পাইণ্ট।

পরের 24 মিনিটে, A আনয়ন করে (24÷6) বা 4 বারে 4 পাইণ্ট,

B ,, ,, (24÷8) বা 3 বারে 3×2 বা 6 পাইণ্ট

এবং 20 মিনিটে C আনয়ন করে (20÷10) বা 2 বারে 2 গ্যালন অর্থাৎ 16 পাইণ্ট।

∴ 24 মিনিটে চৌবাচ্চায় জল ঢালা হয় (16+6+4) বা 26 পাইণ্ট।

∴ 6 ঘণ্টা 24 মিনিটে চৌবাচ্চায় জল ঢালা হয় (54 গ্যালন 6 পাইণ্ট+26 পাইণ্ট) বা 58 গ্যালন।

∴ চৌবাচ্চা জলপূর্ণ হইবে 6 ঘণ্টা 24 মিনিটে।

উদাহরণ 7. এক অশ্বারোহী প্রতি মিনিটে 352 গজ পথ যায় এবং 6 মাইল অন্তর ঘোড়া বদলাইবার জন্য 6 মিনিট বিলম্ব করে। 108 মাইল পথ যাইতে তাহার কত সময় লাগিবে ? [C. U. 1925]

108 মাইল = 108×1760 গজ

অশ্বারোহী 352 গজ পথ যায় 1 মিনিটে,

∴ ,, 108×1760 ,, ,, ,, $\frac{108\times1760}{352}$ বা 540 মিনিটে।

অশ্বারোহী 108 মাইল পথ যাইতে ঘোড়া বদলায় $(108 \div 6 - 1)$ বা 17 বার এবং তাহার জন্য সময় লাগিবে (17×6) বা 102 মিনিট।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= (540 + 102)$ মিনিট $= 642$ মিনিট $= 10$ ঘণ্টা 42 মিনিট।

[$108 \div 6 = 18$, $\therefore$ অশ্বারোহীর ঘোড়া বদলাইবার কথা 18 বার, কিন্তু শেষবার গন্তব্যস্থলে পৌঁছাইলে আর ঘোড়া বদলাইতে হইবে না। সুতরাং অশ্বারোহী ঘোড়া বদলায় $(18 - 1)$ বা 17 বার।]

উদাহরণ 8. ঘণ্টায় 40 মাইল বেগে ধাবমান 124 গজ দীর্ঘ একটি ট্রেন কতক্ষণে 404 গজ দীর্ঘ একটি প্ল্যাটফর্ম অতিক্রম করিবে ?

ট্রেনটি যখন প্ল্যাটফর্ম অতিক্রম করিবে, তখন সে নিজ দৈর্ঘ্য ও প্ল্যাটফর্মের দৈর্ঘ্যের সমান পথ অতিক্রম করিবে। অর্থাৎ তাহাকে $(124 + 404)$ বা 528 গজ পথ অতিক্রম করিতে হইবে।

ট্রেন 1 ঘণ্টায় গমন করে 40 মাইল

$\therefore$,, 1 সেকেণ্ডে ,, ,, $\frac{40 \times 1760}{60 \times 60}$ গজ।

এখন ট্রেন $\frac{40 \times 1760}{60 \times 60}$ গজ পথ যায় 1 সেকেণ্ডে,

$\therefore$,, 528 ,, ,, ,, $\frac{60 \times 60 \times 528}{40 \times 1760}$ বা 27 সেকেণ্ডে।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= 27$ সেকেণ্ড।

উদাহরণ 9. 90 গজ দীর্ঘ এবং 135 গজ দীর্ঘ দুইটি ট্রেন যথাক্রমে ঘণ্টায় 60 মাইল ও 48 মাইল বেগে পরস্পরের দিকে অগ্রসর হইতেছে। প্রথম ট্রেনে অবস্থিত একজন যাত্রীকে অতিক্রম করিতে দ্বিতীয় ট্রেনটির কত সময় লাগিবে ?

প্রথম ট্রেন 60×60 সেকেণ্ডে যায় 60 মাইল।

$\therefore$,, ,, 1 ,, ,, $\frac{60 \times 1760 \times 3}{60 \times 60}$ বা 88 ফুট।

দ্বিতীয় ট্রেন 60×60 সেকেণ্ডে যায় 48 মাইল

$\therefore$,, ,, 1 ,, ,, $\frac{48 \times 1760 \times 3}{60 \times 60}$ বা $70\frac{2}{5}$ ফুট।

$\therefore$ ট্রেন দুইটি একত্রে পরস্পরের দিকে প্রতি সেকেণ্ডে $(88 + 70\frac{2}{5})$ বা $158\frac{2}{5}$ ফুট গতিতে অগ্রসর হইতেছে।

$\therefore$ প্রথম ট্রেনে অবস্থিত একজন যাত্রীকে দ্বিতীয় ট্রেনটি প্রতি সেকেণ্ডে $158\frac{2}{5}$ ফুট বেগে ছাড়িয়া যাইতেছে। কিন্তু প্রথম ট্রেনে অবস্থিত যাত্রীটিকে অতিক্রম করিতে দ্বিতীয় ট্রেনের নিজ দৈর্ঘ্যের সমান পথ অতিক্রম করিতে হইবে, অর্থাৎ 135 গজ বা 405 ফুট পথ, প্রতি সেকেণ্ডে $158\frac{2}{5}$ ফুট গতিতে অতিক্রম করিতে হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $= \frac{405}{158\frac{2}{5}}$ বা $2\frac{49}{88}$ সেকেণ্ড।

• **উদাহরণ 10.** 1 মাইল পথ দৌড়াইতে A-র 5 মিনিট এবং B-এর 4 মি. 30 সে. সময় লাগে। ঐ দৌড়ে B, A-কে 176 গজ অগ্রে রাখিয়া দৌড়াইলে কে জিতিবে ? [E. B. S. B. 1950]

1 মাইল বা 1760 গজ দৌড়ে B, A-কে অগ্রে রাখিয়া দৌড়াইতেছিল।

∴ B-কে 1760 গজ এবং A-কে (1760 − 176) বা 1584 গজ দৌড়াইতে হইবে।

এখন, A 1760 গজ যায় 5 মিনিটে

∴ „ 1584 „ „ $\frac{5 \times 1584}{1760}$ বা $4\frac{1}{2}$ মিনিটে।

আবার B-ও 1760 গজ যায় $4\frac{1}{2}$ মিনিটে।

∴ কেহই জিতিবে না।

উদাহরণ 11. প্রতি পাউণ্ড 4 শিলিং দরের কিছু পরিমাণ চা-এর সহিত প্রতি পাউণ্ড 3 শি. 6 পে. দরের সমপরিমাণ চা মিশ্রিত করিয়া ঐ মিশ্রিত চা-এর প্রতি পাউণ্ড কি দরে বিক্রয় করিলে আমার মোট 20% লাভ হইবে ? [C. U. 1930]

প্রথম প্রকার 1 পাউণ্ড ও দ্বিতীয় প্রকার 1 পাউণ্ড চা-এর মোট ক্রয়মূল্য

= 4 শি. + 3 শি. 6 পে. = 7 শি. 6 পে.

∴ 2 পাউণ্ড মিশ্রিত চা-এর ক্রয়মূল্য = 7 শি. 6 পে. বা $7\frac{1}{2}$ শি.

∴ 1 „ „ „ „ $= \frac{15}{2} \times \frac{1}{2}$ বা $\frac{15}{4}$ শি.

20% লাভ অর্থাৎ,

100 শি. ক্রয়মূল্য হইলে বিক্রয়মূল্য = 100 + 20 বা 120 শি.

∴ $\frac{15}{4}$ „ „ „ „ $= \frac{120 \times 15}{100 \times 4}$ বা $4\frac{1}{2}$ শি.

∴ মিশ্রিত চা-এর প্রতি পাউণ্ডের বিক্রয়মূল্য = $4\frac{1}{2}$ শি. বা 4 শি. 6 পে.

উদাহরণ 12. বার্ষিক 5% হার সুদে কত নেপোলিয়ানের 3 বৎসরের সুদ ও চক্রবৃদ্ধির অন্তর 15 ফ্রাঙ্ক 25 সেন্টিম্ হইবে ?

আসলের 3 বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি = আসল × $\left(\frac{105}{100}\right)^3$

∴ আসলের 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি = আসল × $\left\{\left(\frac{105}{100}\right)^3 - 1\right\}$ = আসল × ·157625

বার্ষিক 5% হার সুদে আসলের 3 বৎসরের সুদ = আসল × ·15

∴ সুদ ও চক্রবৃদ্ধির অন্তর = আসল × (157625 − ·15) আসল × ·007625

কিন্তু প্রদত্ত অন্তর = 15 ফ্রাঙ্ক 25 সেন্টিম্ = 15·25 ফ্রাঙ্ক

∴ আসল × ·007625 = 15·25 ফ্রাঙ্ক

∴ নির্ণেয় আসল = $\frac{15 \cdot 25}{\cdot 007625}$ ফ্রাঙ্ক = 2000 ফ্রাঙ্ক = 100 নেপোলিয়ান।

প্রশ্নমালা 19

(বিবিধ প্রশ্ন)

1. মান নির্ণয় কর : 7 পা. 18 শি. 8 পে. এর $\dfrac{3 \text{ হ. } 3 \text{ কো. } 14 \text{ পা.}}{2 \text{ হ. } 1 \text{ কো. } 20 \text{ পা.}}$

[C. U. 1912]

2. 19 শি. 6 পে. এর $\frac{2}{4\frac{1}{2}}$ এর $\frac{2\frac{1}{2}}{13}$-কে 1 পা. 8 শি. 4 পে. এর $\frac{3}{10}$ এর $\frac{8}{17}$-এর ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ কর।

3. যদি কোন সম্পত্তির $(2\frac{3}{4} - 1\frac{5}{6})$ অংশের মূল্য 36 পা. 13 শি. 4 পে. হয়, তবে ঐ সম্পত্তির $2\frac{1}{2}$ এর $6\frac{5}{12}$ অংশের মূল্য কত ?

4. একজন শ্রমিককে এই শর্তে নিযুক্ত করা হইল যে, সে যতদিন কাজ করিবে, ততদিন 1 ডলার 25 সেণ্ট করিয়া পাইবে এবং যতদিন অনুপস্থিত থাকিবে, ততদিন 50 সেণ্ট করিয়া জরিমানা দিবে। ফেব্রুয়ারী মাসে সে মোট 26 ডলার 25 সেণ্ট পাইল। সে কতদিন কার্যে অনুপস্থিত ছিল ?

5. মান নির্ণয় কর :

1 ট. 6 হ. এর 2·5 + 2 কো. 16 পা. এর 3·125 + 448 আ. এর 3·75

6. সরল কর : $\dfrac{7\frac{6}{11}}{8\frac{7}{22}} \div \dfrac{2\frac{5}{6}}{7\frac{1}{2}}$ এর $\dfrac{81\frac{4}{11}}{5\frac{1}{12}} \times 60$ ফ্রাঙ্ক 86 সেণ্টিম্।

7. এক ব্যক্তি প্রতি পদক্ষেপে 2 ফু. 8 ই. গমন করিলে 4 মা. 1320 গ. যাইতে সে কতবার পদক্ষেপ করিবে ?

8. এক ব্যক্তির পুত্র লণ্ডনে থাকে। তাহাকে ঐ ব্যক্তি প্রতিমাসে 10 পাউণ্ড করিয়া পাঠান। যদি 1 শি. 2 পে. 2 ফা.-এ 1 টাকা হয় তবে ভদ্রলোক কত টাকা পাঠান ?

9. 1 ঘনগজ $- 101\frac{1}{4}$ ঘনইঞ্চি $\times$ 460-কে 1 ঘনগজের ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ কর।

10. কোন এক স্থানে 38 মি. 15 সে. অন্তর দুইটি কামান ছোড়া হইল। এক ব্যক্তি কামানের দিকে আসিবার সময় শব্দ দুইটি 38 মি. 4 সে. অন্তর শুনিতে পাইল। শব্দের গতিবেগ সেকেণ্ডে 1142 ফুট হইলে, ঐ ব্যক্তির গতিবেগ ঘণ্টায় কত ?

11. যদি 121 গজ কাপড় 26 পা. 11 শি. 10 পে. 3 ফা.-এ বিক্রয় করিলে $5\frac{1}{2}\%$ লাভ হয়, তবে প্রতি গজ কাপড় কত করিয়া বিক্রয় করিলে 12% লাভ হইবে ?

12. একটি পুস্তক লণ্ডন হইতে কলিকাতা আনাইতে ডাকমাশুল 1 শি. 6 পে. সহ 16 শি. 1 পে. ব্যয় হইল। পুস্তক-বিক্রেতা যদি $16\frac{2}{3}$% কমিশন দেয়, তবে ঐ পুস্তকের মূল্য কত ?

13. কোন ব্যাঙ্কে 20শে মার্চ তারিখ 720 পাউণ্ড জমা রাখা হইল এবং সেই বৎসরই 1লা জুন উহা সুদে-আসলে 725 পা. 8 শি. হইল। ব্যাঙ্কের সুদের হার কত ?

14. 20 ফু. 6 ই. দীর্ঘ, 15 ফু. 6 ই. প্রশস্ত এবং 16 ফুট উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ঘরে 2টি দরজা ও 3টি জানালা আছে। দরজাগুলি 8 ফুট উচ্চ ও 3 ফু. 9 ই. চওড়া। একটি জানালা 7 ফুট × 5 ফুট এবং অপর দুইটির প্রত্যেকটি 5 ফুট × 4 ফুট। প্রতি 10 গজ কাগজের মূল্য 2 শিলিং হইলে 2 ফুট চওড়া কাগজ দিয়া ঘরটি মুড়িতে কত ব্যয় হইবে?

15. বার্ষিক 5% হার সুদে: কত পাউণ্ডের 3 বৎসরের সুদ ও চক্রবৃদ্ধির অন্তর 6 পা. 2 শি. হইবে ?

16. একজাতীয় চা প্রতি পাউণ্ড 3 শি. দরে বিক্রয় করা হইল এবং তাহাতে 20% লাভ হইল। অন্য একজাতীয় চা-এর প্রতি পাউণ্ডের মূল্য 2 শি. 8 পে.। যদি প্রথম জাতীয় চা-এর 8 পাউণ্ডের সহিত শেষোক্ত জাতীয় চা-এর 10 পাউণ্ড মিশাইয়া মিশ্রিত চা প্রতি পাউণ্ড 3 শি. 4 পে. দরে বিক্রয় করা হয়, তবে শতকরা কত লাভ হইবে ?

17. এক ব্যক্তি দুই স্থানে সমপরিমাণ মূলধন নিয়োগ করিলেন। এক স্থানে বার্ষিক $2\frac{1}{2}$% এবং অপর স্থানে 3% সুদ পাইলেন। $5\frac{1}{2}$ বৎসর পরে শেষোক্ত স্থান হইতে 18 পা. 7 শি. $1\frac{1}{2}$ পে. বেশী সুদ পাইলেন। মূলধনের পরিমাণ কত ?

18. 8 ফুট দীর্ঘ ও 4 ফুট: বিস্তারবিশিষ্ট একটি চৌবাচ্চায় 400 গ্যালন জল ধরে। চৌবাচ্চার গভীরতা কত ?

***19.** একটি চৌবাচ্চায় 49·25 গ্যালন জল ধরে। A, B ও C একত্রে সেই চৌবাচ্চায় জল ভরিতে লাগিল। A প্রতি 3 মিনিটে 1 পাইণ্ট, B প্রতি 5 মিনিটে 1 কোয়ার্ট এবং C প্রতি 7 মিনিটে 1 গ্যালন করিয়া জল ভরে। চৌবাচ্চাটি কতক্ষণে জলপূর্ণ হইবে ?

20. A ঘণ্টায় 5 মাইল বেগে যায় এবং প্রতি ঘণ্টা শেষে 30 মিনিট করিয়া বিশ্রাম করে। B, A-র 2 ঘণ্টা পরে যাত্রা করিয়া A-কে 17 মা. 880 গ. দূরে গিয়া ধরিল। B কি গতিতে হাঁটিতেছিল ?

21. সরল কর : $\dfrac{44 \text{ পা.}}{11+\dfrac{1}{7+\dfrac{3}{8\frac{1}{4}}}} \div \frac{1}{3}$ এর 1 পা. 13 শি. 4 পে.

***22.** 5 ফুট দীর্ঘ, 4 ফুট বিস্তৃত ও $3\frac{2}{3}$ ফুট গভীর একটি চৌবাচ্চায় 30 ঘনফুট জল আছে। জলের মধ্যে 9 ইঞ্চি × 3 ইঞ্চি × $2\frac{2}{3}$ ইঞ্চি মাত্রাযুক্ত ইট:ফেলায় চৌবাচ্চা ঠিক

ভরিয়া গেল। যদি প্রত্যেক ইট নিজ আয়তনের $\frac{1}{17}$ অংশ জল শোষণ করে, তবে চৌবাচ্চায় কতগুলি ইট ফেলা হইয়াছিল? [C. U. 1939 (Addl.)]

23. রেল লাইনের পাশ দিয়া এক ব্যক্তি ঘণ্টায় 3 মাইল বেগে যাইতেছে; এমন সময় ঘণ্টায় 30 মাইল বেগে ধাবমান একটি ট্রেন তাহাকে 10 সেকেণ্ডে অতিক্রম করিয়া গেল। গাড়ীখানির দৈর্ঘ্য কত?

24. A, B ও C একটি কাজ 6 পা. 3 শি. 4 পে. ফুরণে লইল। A একা 20 দিনে, B একা 24 দিনে এবং C একা 16 দিনে কাজটি করিতে পারে। কে কত পাইবে?

25. এক সাইকেল-বিক্রেতা বিজ্ঞাপিত মূল্যের উপর 25% কমিশন দিয়াও একখানি সাইকেল 20% লাভে বিক্রয় করিল। ইহাতে তাহার 3 ডলার লাভ হইলে সাইকেলটির বিজ্ঞাপিত মূল্য কত?

26. কোন সম্পত্তির ($\cdot75-\cdot3\dot{6}$) অংশের মালিক A এবং $\cdot4\dot{7}\dot{2}$ অংশের মালিক B. যদি ঐ সম্পত্তির $\cdot0\dot{5}\dot{6}$ অংশের মূল্য 373·3 পাউণ্ড হয়, তবে উভয়ের অংশের মূল্যের অন্তর কত?

27. 5 ঘনগজ 13 ঘনফুট 72 ঘনইঞ্চি একখণ্ড লৌহকে পিটাইয়া কত পুরু পাত প্রস্তুত করিলে, ঐ পাতের দ্বারা $\frac{1}{4}$ একর স্থান আবৃত করা যাইবে?

*28. একটি হলঘরের দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের তিনগুণ। উহার ছাদ চূণকাম করিতে প্রতি বর্গগজে $5\cdot\dot{3}$ পে. হিসাবে মোট 4 পা. 12 শি. $7\cdot\dot{1}$ পে. এবং দেওয়ালগুলি কাগজ দিয়া মুড়িতে প্রতি বর্গগজ 1 শি. 9 পে. হিসাবে মোট 35 পাউণ্ড ব্যয় হইল। হলঘরটির উচ্চতা কত?

29. যদি 5টা ঘোড়া ও 49টা মেষকে খাওয়াইতে 9 দিনে 18 পা. 18 শি. 9 পে. ব্যয় হয়, তবে 90টা ঘোড়া ও 432টা মেষকে খাওয়াইতে 20 দিনে কত ব্যয় হইবে? (5টা ঘোড়া 76টা মেষের সমান খায়।)

30. A; B ও C তিনজনে একটি কাজ 22 পা. 10 পে.-তে ফুরণ করিয়া লইল। A, B ও C যে হিসাবে কাজ করিল তাহাতে A ও B-এর কাজ একত্রে সমস্ত কাজের $\frac{19}{23}$ অংশ এবং B ও C-এর কাজ একত্রে সমস্ত কাজের $\frac{8}{23}$ অংশ হইল। A কত পাইবে?

31. এক পুলিশ 100 গজ অগ্রগামী এক চোরকে তাড়া করিল। পুলিশ 6 মিনিটে ও চোর 10 মিনিটে 1 মাইল দৌড়ায়। চোর কতদূর গেলে পুলিশ কর্তৃক ধৃত হইবে?

32. $$1-\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{5-\cfrac{6}{7+\frac{8}{9}}}}\div\frac{2\text{ হ. }2\text{ কো. }21\text{ পা.}}{10\text{ হ. }2\text{ কো. }11\text{ পা.}}$$ এর $2\cdot08\dot{3}$-কে $1\cdot\dot{1}$-এর দশমিকে প্রকাশ কর।

পাটীগণিত

(দশম শ্রেণী)

দশম অধ্যায়

1. অনুপাত ও সমানুপাত

(Ratio and Proportion)

A. অনুপাত (Ratio) :

এক জাতীয় দুইটি রাশির মধ্যে তুলনায় একটি অপরটির কত গুণ বা কত অংশ, ইহা যদ্দারা প্রকাশিত হয়, তাহাকে রাশি দুইটির **অনুপাত** (Ratio) বলে।

দুইটি রাশির অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হয়। অনুপাতের প্রথম রাশিকে **পূর্ব রাশি** (Antecedent) ও দ্বিতীয় রাশিকে **উত্তর রাশি** (Consequent) বলে। অনুপাতের রাশি দুইটির প্রত্যেকটিকে **পদ** (Term) বলা হয়।

অতএব, অনুপাতকে ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ করা যায় ; আবার, রাশি দুইটির মধ্যে ':' এই প্রকার চিহ্ন দিয়াও অনুপাতকে প্রকাশ করা যায়।

অতএব, অনুপাত $= \frac{\text{পূর্ব রাশি}}{\text{উত্তর রাশি}} =$ পূর্ব রাশি : উত্তর রাশি।

দেখা যাইতেছে যে, অনুপাত সর্বদা শুদ্ধ সংখ্যা।

যেহেতু 4 ঘণ্টা ও 40 মিনিট উভয়ই সমজাতীয় রাশি এবং প্রথমটি দ্বিতীয়টি দ্বারা সূচিত সময়ের ছয় গুণ সময় জ্ঞাপন করে, অতএব 4 ঘণ্টা ও 40 মিনিটের অনুপাত হইতেছে 6 : 1.

6 : 1 অনুপাতে 6 হইতেছে পূর্ব রাশি এবং 1 হইতেছে উত্তর রাশি। আবার 4 ঘণ্টা ও 40 মিনিটের অনুপাত হইতেছে $\frac{\text{4 ঘণ্টা}}{\text{40 মিনিট}}$; এই ভগ্নাংশটির মান হইতেছে $\frac{6}{1}$, ইহা একটি শুদ্ধ সংখ্যা। সুতরাং, অনুপাত সর্বদা শুদ্ধ সংখ্যা।

আবার, যেহেতু 30 নয়া পয়সা, 1 টাকার (100 নয়া পয়সার) $\frac{3}{10}$ অংশ ; সুতরাং 30 নয়া পয়সা ও 1 টাকার অনুপাত হইতেছে $\frac{3}{10} = 3 : 10$

দ্রষ্টব্য : দুইটি রাশির অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে,

(i) রাশি দুইটি সমজাতীয় হওয়া প্রয়োজন,

(ii) রাশিদ্বয়কে একই এককে পরিণত করিয়া প্রথমটিকে দ্বিতীয়টি দ্বারা ভাগ করিতে হয়,

(iii) ভাগফল অর্থাৎ, অনুপাত একটি শুদ্ধ সংখ্যা।

বিভিন্ন প্রকারের অনুপাত :

অনুপাতের পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি পরস্পর সমান হইলে অনুপাতকে **সাম্যানুপাত** (Ratio of equality) বলে। অনুপাতটি তখন 1-এর সমান। যথা—3 : 3.

অনুপাতের রাশিদ্বয় পরস্পর অসমান হইলে তাহাকে **বৈষম্যানুপাত** (Ratio of inequality) বলে। যথা—5 : 9, 13 : 11.

অনুপাতের পূর্ব রাশি অপেক্ষা উত্তর রাশি বৃহত্তর হইলে অনুপাতকে **লঘু অনুপাত** (Ratio of less inequality) বলে। যথা—5 : 13.

অনুপাতের পূর্ব রাশি অপেক্ষা উত্তর রাশি ক্ষুদ্রতর হইলে অনুপাতকে **গুরু অনুপাত** (Ratio of greater inequality) বলে। যথা—13 : 5.

কোন অনুপাতের পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশিকে যথাক্রমে উত্তর রাশি ও পূর্ব রাশিরূপে লিখিলে যে অনুপাত হয়, তাহাকে প্রথম অনুপাতটির **ব্যস্ত** বা **বিপরীত অনুপাত** (Inverse ratio) অথবা **অন্যোন্যক** (Reciprocal) বলা হয়। যথা—5 : 6-এর ব্যস্ত অনুপাত 6 : 5 ; $\frac{6}{7}$-এর অন্যোন্যক $\frac{7}{6}$.

সরল-মিশ্র ভেদেও অনুপাত আবার দুই প্রকার। 3 মিটার : 5 মিটার—ইহা একটি **সরল অনুপাত** (Simple ratio). দুইটি সরল অনুপাত গুণ করিলে, অর্থাৎ একাধিক অনুপাতের পূর্ব রাশিগুলির গুণফল এবং উত্তর রাশিগুলির গুণফলের মধ্যে যে অনুপাত সৃষ্ট হয়, তাহাকে **যৌগিক** বা **মিশ্র অনুপাত** (Compound ratio) বলে। যথা—3 : 4, 6 : 11, 2 : 5 , এই অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত হইবে $(3\times6\times2) : (4\times11\times5)$.

• B. সমানুপাত (Proportion) ঃ

দুইটি অনুপাত পরস্পর সমান হইলে তাহাদিগকে **সমানুপাত** (Proportion) বলে। অনুপাত দুইটির চারিটি রাশির মধ্যে যদি প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থ রাশির অনুপাতের সমান হয়, তবে রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলে। যথা—(a) 15 মিটার ও 18 মিটারের অনুপাত এবং 10 টাকা ও 12 টাকার অনুপাতের মান $\frac{5}{6}$ বলিয়া উহারা সমানুপাতী। (b) 2 টাকা ও 4 টাকা এবং 10 দিন ও 20 দিন সমানুপাতী ; কারণ এখানে প্রথম রাশি দুইটির অনুপাত শেষের রাশি দুইটির অনুপাতের সমান।

সমানুপাতে "=" চিহ্নের পরিবর্তে ": :" এই চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। যেমন,— 2 টাকা : 4 টাকা : : 10 দিন : 20 দিন। ইহা "2 টাকা অনুপাত 4 টাকা সমান 10 দিন অনুপাত 20 দিন",—এইরূপ পড়িতে হয়।

সমানুপাতের চারিটি রাশি একজাতীয় না-ও হইতে পারে ; কিন্তু প্রথম দুইটি রাশি একজাতীয় এবং শেষের দুইটি রাশি একজাতীয় হইবেই।

সমানুপাতের প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে **প্রান্তীয় রাশি** (Extremes) এবং দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশিকে **মধ্যম রাশি** (Means) বলে। সমানুপাতের চারিটি রাশির মধ্যে চতুর্থ রাশিকে অপর তিনটি রাশির **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলা হয়। 2 : 4 : : 10 : 20, এস্থলে 2 ও 20 প্রান্তীয় রাশি এবং 4 ও 10 মধ্যম রাশি। 20 চতুর্থ সমানুপাতী।

চারিটি শুদ্ধ সংখ্যা সমানুপাতী হইলে প্রান্তীয় রাশি দুইটির গুণফল মধ্যম রাশি দুইটির গুণফলের সমান।

2 : 4 : : 10 : 20 বলিয়া $2 \times 20 = 4 \times 10$.

যখন একই জাতীয় রাশির এইরূপ সমানুপাত দেখিতে পাওয়া যায় যে, প্রথম : দ্বিতীয় : : দ্বিতীয় : তৃতীয়, তাহা হইলে দ্বিতীয় রাশিকে **মধ্য সমানুপাতী** (Mean proportional) এবং তৃতীয় রাশিকে অপর দুই রাশির **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third proportional) বলা হয়। এইরূপ তিনটি রাশিকে **ধারাবাহিক সমানুপাতী** (In continued proportion) বলে।

2, 6, 18 সংখ্যা তিনটি ক্রমিক সমানুপাতী ; কারণ 2 : 6 :: 6 : 18, এস্থলে 2 ও 18-এর মধ্য সমানুপাতী 6 এবং 2 ও 6-এর তৃতীয় সমানুপাতী 18.

দ্রষ্টব্য ঃ এস্থলে রাশিসমূহ সমজাতীয় হওয়া আবশ্যক।

উদাহরণ 1. 8 টা. 25 ন. প. : 10 টা. 50 ন. প., এই অনুপাতকে আকারে প্রকাশ কর।

8 টা. 25 ন. প. : 10 টা. 50 ন. প. $= \frac{825 \text{ ন. প.}}{1050 \text{ ন. প.}} = \frac{11}{14} = 11 : 14.$

[ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ করিবার পদ্ধতি অবলম্বন করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 2. 5 : 9 ও 16 : 11, এই অনুপাত দুইটির মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তর ?

$$5 : 9 = \frac{5}{9} = \frac{5 \times 11}{9 \times 11} = \frac{55}{99} \text{ এবং } 6 : 11 = \frac{6}{11} = \frac{6 \times 9}{11 \times 9} = \frac{54}{99};$$

∴ 5 : 9 অনুপাতটি বৃহত্তর।

[যেহেতু অনুপাত ও ভগ্নাংশ দ্বারা একই অর্থ প্রকাশিত হয়, সেইজন্য ভগ্নাংশের নিয়মাবলীও এক্ষেত্রে প্রযোজ্য হইবে।]

উদাহরণ 3. দুইটি রাশির অনুপাত 2 : 7 ; উহার উত্তর রাশি 63 মিটার। পূর্ব রাশি কত ?

$$\frac{\text{পূর্ব রাশি}}{63 \text{ মিটার}} = \frac{2}{7} = \frac{2 \times 9}{7 \times 9} = \frac{18}{63} = \frac{18 \text{ মিটার}}{63 \text{ মিটার}}$$

∴ নির্ণেয় পূর্ব রাশি = 18 মিটার।

[অনুপাত একটি ভগ্নাংশ ; ইহার লব, পূর্ব রাশি ও হর, উত্তর রাশি। অতএব, পূর্বরাশি, উত্তররাশি ও ইহাদের অনুপাত—এই তিনটির মধ্যে যে-কোন দুইটি দেওয়া থাকিলে তৃতীয়টি বাহির করা যায়।]

উদাহরণ 4. $\frac{2}{5} : \frac{3}{7}$-কে পূর্ণসংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ কর।

$$\frac{2}{5} : \frac{3}{7} = (\frac{2}{5} \times 35) : (\frac{3}{7} \times 35) = 14 : 15.$$

[অনুপাতের রাশিদ্বয়কে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলেও অনুপাতের পরিবর্তন হয় না। সুতরাং এখানে 5 ও 7-এর ল. সা. গু. 35 দ্বারা উভয় রাশিকে গুণ করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 5. 6, 9 ও 16-এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

6 : 9 :: 16 : নির্ণেয় সংখ্যা। ∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= \frac{9 \times 16}{6} = 24.$

[সমানুপাতের তিনটি রাশি জানা থাকিলে, অপর রাশিটি নির্ণয় করা যায়

(*a*) একটি প্রান্তীয় রাশি = মধ্যম রাশিদ্বয়ের গুণফল ÷ অপর প্রান্তীয় রাশি।

(*b*) একটি মধ্যম রাশি = প্রান্তীয় রাশিদ্বয়ের গুণফল ÷ অপর মধ্যম রাশি।]

উদাহরণ 6. $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{8}$-এর মধ্য-সমানুপাতী নির্ণয় কর।

$\frac{1}{2}$: নির্ণেয় রাশি :: নির্ণেয় রাশি : $\frac{1}{8}$

$\therefore$ (নির্ণেয় রাশি $)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$　$\therefore$　নির্ণেয় রাশি $= \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$.

[ক্রমিক সমানুপাতী তিনটি রাশির যে-কোন দুইটি দেওয়া থাকিলে তৃতীয়টি বাহির করা যায় ; কারণ মধ্য-সমানুপাতী $= \sqrt{}$ (প্রান্তীয় রাশিদ্বয়ের গুণফল)।]

উদাহরণ 7. দুইটি সৈন্যদলে যথাক্রমে 11000 ও 7000 সৈন্য আছে ; যুদ্ধ করিবার পূর্বে প্রত্যেক দলেই আরও 1000 সৈন্য যোগ দিল। কোন্ দলের সৈন্যসংখ্যা অনুপাত হিসাবে অধিক বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইল ?

প্রথম দলের বৃদ্ধিপ্রাপ্ত সৈন্যসংখ্যা : প্রথম দলের পূর্বসংখ্যা

$= (11000 + 1000) : 11000 = 12000 : 11000 = 12 : 11$;

দ্বিতীয় দলের বৃদ্ধিপ্রাপ্ত সংখ্যা : দ্বিতীয় দলের পূর্বসংখ্যা

$= (7000 + 1000) : 7000 = 8000 : 7000 = 8 : 7$

এখন, $12 : 11 = 84 : 77$ এবং $8 : 7 = 88 : 77$　$\therefore$　$8 : 7 > 12 : 11$;

$\therefore$　দ্বিতীয় দলের সৈন্যসংখ্যা অধিক বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইল।

উদাহরণ 8. $A : B = 2 : 3$, $B : C = 4 : 5$, $C : D = 6 : 7$ হইলে A ও D-এর অনুপাত কত ?

$$\frac{A}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{B}{C} \times \frac{C}{D} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} = \frac{16}{35} \qquad A : D = 16 : 35.$$

[$\frac{\text{পূর্ব রাশিগুলির গুণফল}}{\text{উত্তর রাশিগুলির গুণফল}}$-কে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিলে, হর হইবে নির্ণেয় অনুপাতের প্রথম রাশি এবং লব হইবে দ্বিতীয় রাশি।]

উদাহরণ 9. $A : B = 3 : 4$, $B : C = 5 : 6$ হইলে A, B ও C-এর ক্রমিক অনুপাত নির্ণয় কর।

$A : B = 3 : 4$;

$B : C = 5 : 6 = 1 : \frac{6}{5} = 4 : \frac{24}{5}$;

$\therefore$ A : $B : C = 3 : 4 : \frac{24}{5} = 15 : 20 : 24$.

এক জাতীয় কতিপয় রাশির পরস্পর সম্বন্ধ বুঝাইবার জন্য রাশিসমূহকে অনুপাতের চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে।

উদাহরণ 10 সমগ্র পৃথিবীর স্থলভাগ ও জলভাগের অনুপাত 1 : 2, উত্তর গোলার্ধের স্থলভাগ ও জলভাগের অনুপাত 2 : 3 হইলে, দক্ষিণ গোলার্ধের স্থলভাগ ও জলভাগের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমগ্র পৃথিবীর স্থলভাগ : জলভাগ = 1 : 2,

অর্থাৎ, সমগ্র পৃথিবীর $\frac{1}{1+2}$ বা $\frac{1}{3}$ অংশ স্থলভাগ এবং $\frac{2}{1+2}$ বা $\frac{2}{3}$ অংশ জলভাগ;

কিন্তু উত্তর গোলার্ধের স্থলভাগ : জলভাগ = 2 : 3,

অর্থাৎ, স্থলভাগ $\frac{2}{2+3}$ বা $\frac{2}{5}$ অংশ এবং জলভাগ $\frac{3}{2+3}$ বা $\frac{3}{5}$ অংশ।

∴ উত্তর গোলার্ধের স্থলভাগ সমস্ত পৃথিবীর $\frac{1}{2}$ এর $\frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ অংশ

এবং দক্ষিণ গোলার্ধের স্থলভাগ সমগ্র পৃথিবীর $(\frac{1}{3} - \frac{1}{5})$ বা $\frac{2}{15}$ অংশ।

∴ উহা দক্ষিণ গোলার্ধের $\frac{2}{15} \times 2 = \frac{4}{15}$ অংশ।

∴ দক্ষিণ গোলার্ধের স্থলভাগ $\frac{4}{15}$ অংশ এবং জলভাগ $(1 - \frac{4}{15})$ বা $\frac{11}{15}$ অংশ।

∴ দক্ষিণ গোলার্ধের স্থলভাগ : জলভাগ = $\frac{4}{15} : \frac{11}{15}$ = 4 : 11

উদাহরণ 11. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের সমষ্টি 100 বৎসর, 5 বৎসর পূর্বে উহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 2 : 1 উহাদের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

5 বৎসর পূর্বে পিতা-পুত্রের বয়সের সমষ্টি ছিল $= (100 - 2 \times 5)$, বা 90 বৎসর।

ঐ সময়ে উভয়ের বয়সের অনুপাত 2 : 1,

∴ ঐ সময় পিতার বয়স $= \frac{2}{(2+1)} \times 90$ বা 60 বৎসর

এবং পুত্রের বয়স $= \frac{1}{(2+1)} \times 90$ বা 30 বৎসর।

∴ পিতার বর্তমান বয়স $= (60 + 5)$ বা 65 বৎসর

এবং পুত্রের বর্তমান বয়স $= (30 + 5)$ বা 35 বৎসর।

প্রশ্নমালা 1

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলিকে লঘিষ্ঠ আকারে প্রকাশ কর :

1. 52 : 91 2. $7\frac{3}{4} : 46\frac{1}{2}$ 3. 56 ন প. : 4 টা 48 ন প.

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলিকে মানের ক্রমানুসারে লিখ :

4. 3 : 5, 5 : 8, 8 : 13 5. 1·36 : 2·48, $4\frac{1}{2} : 6\frac{3}{4}$, 3 : 7

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলির যৌগিক অনুপাত নির্ণয় কর :

6. 3 : 4, 5 : 6, 7 : 8   7. $2\frac{2}{3} : 2\frac{4}{5}$, 6·3 : 9·6

নিম্নলিখিত অনুপাতগুলিকে পূর্ণসংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ কর :

8. $\frac{3}{5} : \frac{1}{6}$ 9. $\frac{5}{7} : \frac{3}{8}$ 10. $\frac{5}{13} : \frac{7}{18}$

11. কোন অনুপাতের মান $\frac{5}{7}$; উহার পূর্বরাশি 80 হইলে উত্তর রাশি কত ?

12. দুইটি রাশির অনুপাত 6 : 11 ; উহার উত্তর রাশি 132 হইলে পূর্ব রাশি কত ?

নিম্নলিখিত সমানুপাতগুলির লুপ্ত অঙ্ক নির্ণয় কর :

13. 12 : 20 : : 3 : : *   14. * : 2 : : 5 : 1

15. $\frac{17}{20} : 1\frac{4}{5} : : \frac{3}{8} : *$ 16. * : 200 : : 75 : 500

17. 12·8 : * : : * : ·8   18. 3 : 10 : : * : 5

19. ·09 : * : : ·08 : ·15   20. 4 : * : : * : 9

21. A-র বয়স B-এর বয়সের $3\frac{1}{3}$ গুণ এবং C-এর বয়স B-এর বয়সের $2\frac{1}{2}$ গুণ। A-র বয়স ও C-এর বয়সের অনুপাত নির্ণয় কর।

22. একখানি জাহাজ 9 দিন 14 ঘণ্টায় 2760 কি.মি. এবং একটি ট্রেন 18 ঘণ্টায় 405 কি.মি. যায়। উভয়ের গতির তুলনা কর।

23. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত 3 : 5 : 6 এবং উহার পরিসীমা 84 মিটার হইলে, উহার ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

*24. একটি পিপায় 12 লিটার মদ্য ও জল 3 : 1 অনুপাতে মিশ্রিত আছে। ঐ জল-মিশ্রিত মদ্য কি পরিমাণে তুলিয়া সেই পরিমাণ জল ঢালিলে ঐ পাত্রে অর্ধেক মদ্য ও অর্ধেক জল হইবে ?

25. A, B এবং C-কে 2430 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, উহাদিগের অংশ হইতে যথাক্রমে 5 টাকা, 10 টাকা এবং 15 টাকা কমাইলে অবশিষ্টগুলির অনুপাত 3 : 4 : 5 হয়। [Utkal U. 1948]

26. 25 : 37 অনুপাতের উভয় পদের সহিত কোন্ সংখ্যা যোগ করিলে উহা 5 : 6-এ পরিণত হয় ?

*27. একটি কুকুর একটি খরগোসের পশ্চাদ্ধাবন করিল। খরগোস যে সময়ে 5 লাফ দেয়, কুকুর সেই সময়ে 4 লাফ দেয়। কুকুরের 3 লাফ খরগোসের 4 লাফের সমান হইলে উভয়ের গতিবেগের তুলনা কর। [C. U. 1933]

28. 3 বৎসর পূর্বে A-র বয়স : B-এর বয়স এবং B-এর বয়স : C-এর বয়স—উভয় অনুপাতের মান 3 : 2. বর্তমানে তাহাদের বয়সের সমষ্টি 180 বৎসর হইলে প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত ?

29. A এবং B-এর বয়সের সমষ্টি 35 বৎসর। 5 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 2 : 3 ; 5 বৎসর পর তাহাদের বয়সের অনুপাত কত হইবে ?

*30. দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3\frac{1}{3} : 2\frac{2}{3}$; কিন্তু উভয় সংখ্যা হইতে $11\frac{1}{3}$ বিয়োগ করিলে তাহাদের অনুপাত $4\frac{1}{3} : 3\frac{1}{3}$ হয়। সংখ্যা দুইটি কত ?

---

2. সরল অনুপাত ও ত্রৈরাশিক
(Simple Ratios and Rule of Three)

A. সরল অনুপাত (Simple Ratios) :

সমানুপাতী চারিটি রাশির মধ্যে প্রথম তিনটি রাশি দেওয়া থাকিলে চতুর্থ রাশিটিকে বাহির করিবার প্রণালীকেই **ত্রৈরাশিক** (Rule of Three) বলে। ঐকিক নিয়মের অঙ্কগুলি ত্রৈরাশিক সাহায্যে সংক্ষেপে করা যায়। নিম্নলিখিত উদাহরণের সাহায্যে এই প্রক্রিয়াটি বুঝানো হইয়াছে।

উদাহরণ 1. 6 খানি পুস্তকের মূল্য 30 টাকা হইলে 22 খানি পুস্তকের মূল্য কত ?

ঐকিক নিয়মে :

6 খানি পুস্তকের মূল্য = 30 টাকা

∴ 1 „ „ „ = $\frac{30}{6}$ বা 5 টাকা

∴ 22 „ „ „ = 5 × 22 বা 110 টাকা।

অনুপাত ও সমানুপাতের সাহায্যে :

এস্থলে একটু চিন্তা করিলেই দেখা যায় যে, পুস্তকের মূল্য নির্দিষ্ট থাকিলে, পুস্তকের সংখ্যার উপর টাকার পরিমাণ নির্ভর করে, অর্থাৎ পুস্তকের সংখ্যা যতগুণ বাড়িবে, টাকার পরিমাণও সেই অনুপাতে বাড়িবে। 22 খানি পুস্তক, [illegible] খানি পুস্তক অপেক্ষা অধিকতর বলিয়া 22 খানি পুস্তকের মূল্য, 6 খানি পুস্তকের মূল্য অপেক্ষা 22 : 6 এই অনুপাতে অধিকতর হইবে। সুতরাং 6 খানি পুস্তকের প্রদত্ত

মূল্য 30 টাকাকে $\frac{22}{6}$ দ্বারা গুণ করিলেই 22 খানি পুস্তকের নির্ণেয় মূল্য পাওয়া যাইবে। এস্থলে $\frac{22}{6}$, এই ভগ্নাংশটিকে **গুণকানুপাত** (Multiplying ratio) বলা হয়।

[দুইটি রাশির অনুপাত গুণক হিসাবে ব্যবহৃত হইলে উহাকে **গুণকানুপাত** বলে।]

সুতরাং 22 খানি পুস্তকের মূল্য $=30$ টাকা $\times \frac{22}{6}=110$ টাকা।

এস্থলে গুণকানুপাতটি একটি গুরু অনুপাত এবং উহা $\frac{22}{6}$, এই অপ্রকৃত ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশিত হইয়াছে।

উদাহরণ 2. 18 জন শ্রমিক যে কার্য 20 দিনে সমাধা করিতে পারে, 60 জন শ্রমিক সেই কার্য কতদিনে সমাধা করিতে পারিবে ?

ঐকিক নিয়মে :

18 জন শ্রমিক কোন কার্য সমাধা করে 20 দিনে

∴ 1 " " সেই " " " 20×18 দিনে

∴ 60 " " " " " " $\frac{20 \times 18}{60}$ বা 6 দিনে।

অনুপাত ও সমানুপাতের সাহায্যে :

এস্থলে দেখা যায় যে, প্রতি শ্রমিকের দৈনিক কার্যের পরিমাণ নির্দিষ্ট থাকিলে, শ্রমিকের সংখ্যা যে পরিমাণে বাড়িবে, কার্যটি সমাধা করিবার দিনের সংখ্যাও সেই অনুপাতে কমিবে; সুতরাং এস্থলে প্রদত্ত দিনের সংখ্যা 18 : 60 অনুপাতে কমিয়া যাইবে। ∴ নির্ণেয় সময় $=20$ দিন $\times \frac{18}{60}$ বা 6 দিন।

এস্থলে গুণকানুপাতটি একটি লঘু অনুপাত এবং উহা $\frac{18}{60}$, এই প্রকৃত ভগ্নাংশ দ্বারা প্রকাশিত হইয়াছে।

B. ত্রৈরাশিক (Rule of Three) :

ঐকিক নিয়মে যে সকল অঙ্ক কষা যায়, তিনটি রাশির চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয়ের দ্বারাও সেই সকল অঙ্ক কষা যায়। তিনটি রাশির চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় দ্বারা প্রশ্ন-সমাধানের প্রক্রিয়াকে **ত্রৈরাশিক** (Rule of Three) বলে।

যে ত্রৈরাশিক সরল অনুপাতের অন্তর্গত তাহাকে **সরল ত্রৈরাশিক** (Direct Rule of Three) এবং যে ত্রৈরাশিক ব্যস্ত সমানুপাতের অন্তর্গত তাহাকে **ব্যস্ত ত্রৈরাশিক** (Inverse Rule of Three) বলে।

ত্রৈরাশিকের রাশিস্থাপন :

সমানুপাতের চতুর্থ রাশিটি বড় হইলে উহার দ্বিতীয় রাশিটিও বড় হইবে এবং চতুর্থ রাশিটি ছোট হইলে দ্বিতীয় রাশিটিও ছোট হইবে।

এই সূত্র অবলম্বন করিয়া প্রথমে নির্ণেয় রাশিকে চতুর্থ সমানুপাতী ধরিয়া উহাকে সমানুপাতের চতুর্থ স্থানে বসাইবে এবং উহার বামদিকে অনুপাত চিহ্ন ':' বসাইবে। উহার বামদিকে প্রদত্ত তিনটি রাশির অন্তর্গত নির্ণেয় রাশির সমজাতীয় রাশিটি তৃতীয় স্থানে স্থাপন কর এবং তাহার বামে ': :' চিহ্ন বসাও। এখন, নির্ণেয় রাশি তৃতীয় রাশি অপেক্ষা বড় হইলে অবশিষ্ট দুইটি রাশির বৃহত্তরটি দ্বিতীয় স্থানে ও অপর রাশিটি প্রথম স্থানে স্থাপন কর। যদি নির্ণেয় রাশি তৃতীয় রাশি অপেক্ষা ছোট হয় তবে অবশিষ্ট দুইটি রাশির ক্ষুদ্রতরটি দ্বিতীয় স্থানে ও অপরটি প্রথম স্থানে স্থাপন কর এবং প্রথম ও দ্বিতীয় রাশিটির মধ্যে ':' চিহ্ন বসাও

উদাহরণ 3. 4 কি. গ্রা. চাউলের মূল্য টা. 3·20 হইলে, 9 কি. গ্রা. চাউলের মূল্য কত ?

4 কি. গ্রা. : 9 কি. গ্রা. : : টা. 3·20 : নির্ণেয় রাশি

∴ নির্ণেয় রাশি $= \frac{9 \times \text{টা. } 3{\cdot}20}{4} =$ টা. 7·20

[এস্থলে লক্ষ্য করিতে হইবে যে, চাউলের পরিমাণ বাড়িলে মূল্যও সেই পরিমাণে বাড়িবে। সুতরাং, যথাক্রমে দুই ওজনের চাউলের অনুপাত, দুইটি মূল্যের অনুপাতের সমান।]

উদাহরণ 4. যদি 5 জন লোক 16 দিনে একটি কার্য সমাধা করিতে পারে, তবে 20 জন লোক ঐ কার্য কতদিনে সমাধা করিবে ?

20 জন : 5 জন : : 16 দিন : নির্ণেয় রাশি

∴ নির্ণেয় রাশি $= \frac{5 \times 16}{20}$ দিন $= 4$ দিন।

উদাহরণ 5. 3 জন লোক এক সপ্তাহে একটি কার্য সম্পন্ন করিতে পারে। যদি 2 জন বালক 1 জন লোকের সমান কার্য করে, তবে 16 জন বালক সেই কার্য কতদিনে করিবে?

2 জন বালক : 16 জন বালক : : 1 জন লোক : নির্ণেয় রাশি

∴ নির্ণেয় রাশি = $\frac{16 \times 1}{2}$ লোক = 8 জন লোক।

এখন, 8 জন লোক : 3 জন লোক : : 7 দিন : নির্ণেয় রাশি

∴ নির্ণেয় রাশি = $\frac{3 \times 7}{8}$ দিন = $2\frac{5}{8}$ দিন।

প্রশ্নমালা 2

1. যে পরিমাণ চাউলে 8 ব্যক্তির 3 মাস চলে, সেই পরিমাণ চাউলে 3 ব্যক্তির কতদিন চলিবে?

2. 16 জন লোক 15 দিনে একটি রাস্তা প্রস্তুত করিতে পারে। 20 জন লোক কতদিনে ঐ রাস্তা প্রস্তুত করিবে?

3. 2 জন পুরুষ বা 5 জন বালক যে কার্য 18 দিনে সম্পন্ন করে, 12 জন পুরুষ ও 10 জন বালক সেই কার্য কতদিনে সম্পন্ন করিবে?

4. 6 জন বালক বা 2 জন পুরুষ 27 দিনে একটি দেওয়াল গাঁথিতে পারে। 27 জন পুরুষ ও 9 জন বালক সেই দেওয়াল কতদিনে গাঁথিবে?

5. টাকায় 8 ন. প. হিসাবে আয়কর দিয়া এক ব্যক্তির 2346 টাকা থাকে। তাহার মোট আয় কত?

6. একটি দুর্গে 1200 সৈন্যের 60 দিনের খাদ্য আছে। যদি 15 দিন পরে 300 সৈন্য দুর্গ পরিত্যাগ করে, তবে অবশিষ্ট খাদ্যে অবশিষ্ট সৈন্যের কত দিন চলিবে?

7. একটি দুর্গে 1000 সৈন্য ও তাহাদের 30 দিনের খাদ্য আছে। 10 দিন পরে তাহাদের সাহায্যার্থে আর একদল সৈন্য আগমন করায় 5 দিনে সমস্ত খাদ্য নিঃশেষ হইল। সাহায্যার্থে কত সৈন্য আসিয়াছিল?

8. 4000 লোকের 190 দিনের খাদ্য ছিল; 1 মাস অন্তে 800 লোক অন্যত্র গেলে অবশিষ্ট খাদ্যে অবশিষ্ট লোকের আর কতদিন চলিবে?

9. 17 জন লোক একত্রে 72 দিনে একটি কার্য সম্পন্ন করিতে পারে। যদি 9 দিন কার্য করিবার পর আরও 4 জন লোক তাহাদের সহিত মিলিত হয়, তাহা হইলে কার্যটি মোট কতদিনে শেষ হইবে?

10. যদি 27 জন শ্রমিক 15 দিনে একটি কার্য করিতে পারে, তবে আরও কত অধিক শ্রমিক ঐ কার্যে নিযুক্ত করিলে কার্যটি উক্ত সময়ের $\frac{3}{5}$ অংশে সম্পন্ন হইবে ?

11. কতকগুলি কামান হইতে 4 মিনিট অন্তর গোলাবর্ষণ করিলে 1 ঘণ্টায় 24900 লোক মারা যায়। 3 মিনিট অন্তর সমপরিমাণ গোলাবর্ষণ করিলে ঐ সময়ে কত লোক মারা যাইবে ?

*12. 5 জন পুরুষ বা 10 জন স্ত্রীলোক বা 15 জন বালক একটি কার্য 16 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। 4 জন পুরুষ, 8 জন স্ত্রীলোক ও 6 জন বালক সেই কার্য কত দিনে সম্পন্ন করিবে ?

13. এক ব্যক্তি ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ কি. মি. হাঁটিয়া $4\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় যতদূর যাইতে পারে, অপর এক ব্যক্তির ঘণ্টায় $3\frac{1}{4}$ কি. মি. হাঁটিয়া ততদূর যাইয়া ফিরিয়া আসিতে কত সময় লাগিবে ?

14. কোন এক অবরুদ্ধ নগরের লোকসংখ্যা 22400 এবং তাহাদের 3 সপ্তাহের খাদ্য সঞ্চিত ছিল ; কিন্তু কতিপয় লোক মহামারীতে মারা গেলে ঐ খাদ্যে তাহাদের 7 সপ্তাহ চলিয়াছিল। মহামারীতে কত লোক মারা গিয়াছিল ?

15. একটি দুর্গে 200 সৈন্যের 30 দিনের খাদ্য ছিল। 5 দিন পরে আরও 50 জন সৈন্য আসিল। অবশিষ্ট খাদ্যে তাহাদের কতদিন চলিবে ?

16. একটি জাহাজে 1200 যাত্রীর 17 সপ্তাহের খাদ্য ছিল। অপর একখানি জাহাজ ধ্বংস হইয়া গেলে তাহার যাত্রিগণ ইহাতে আশ্রয়লাভ করে এবং 15 দিনে সমস্ত খাদ্য নিঃশেষ হয়। কতজন যাত্রী আশ্রয়লাভ করিয়াছিল ?

*17. 35 জন লোক একটি কার্য 45 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। যদি 15 দিন পর পর তাহাদের মধ্য হইতে 7 জন করিয়া লোক কার্য ত্যাগ করিয়া চলিয়া যায়, তবে ঐ কার্য সম্পন্ন হইতে কতদিন লাগিবে ?

C. বহুরাশিক (Double Rule of Three) :

একাধিক অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত যদি অপর একটি অনুপাতের সমান হয়, তবে একটি **মিশ্র অনুপাত** উৎপন্ন হয়। মিশ্র অনুপাত সম্বলিত অঙ্ককে বহুরাশিক (Double Rule of Three) অঙ্ক বলা হয়।

বহুরাশিকের রাশিস্থাপন :

নির্ণেয় রাশিকে চতুর্থ স্থানে স্থাপন কর। নির্ণেয় রাশির একই জাতীয় রাশিকে তৃতীয় স্থানে স্থাপন কর। তৃতীয় রাশির বামে ': :' চিহ্ন বসাইবে এবং ঐ চিহ্নের বামে '}' চিহ্ন বসাইবে। তাহার বাম দিকে দুইটি-দুইটি সমজাতীয় রাশি লইয়া ত্রৈরাশিকের ন্যায় হিসাব করিয়া সাধারণ বা ব্যস্ত অনুপাত চিহ্নসহ সাজাইতে হইবে। অতঃপর দ্বিতীয় ও তৃতীয় স্থানে স্থাপিত সংখ্যাগুলির গুণফলকে প্রথম স্থানে স্থাপিত সংখ্যাগুলির গুণফল দ্বারা ভাগ করিলে উত্তর পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 1. যদি 50 জন শ্রমিক প্রত্যহ 12 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 120 দিনে 6 কি. মি. রাস্তা তৈয়ারি করিতে পারে, তবে 80 জন শ্রমিক প্রত্যহ কত ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 48 দিনে 4 কি. মি. রাস্তা তৈয়ারি করিতে পারিবে ?

শ্রমিক	80 : 50	
দিন	48 : 120	: : 12 ঘণ্টা : নির্ণেয় সময়
কি. মি.	6 : 4	

∴ নির্ণেয় সময় $= \frac{50 \times 120 \times 4 \times 12}{80 \times 48 \times 6}$ বা $12\frac{1}{2}$ ঘণ্টা।

উদাহরণ 2. যদি 4 জন কম্পোজিটার প্রত্যহ 9 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 15 দিনে 50 অক্ষরে লাইন, 40 লাইনে পৃষ্ঠা, 16 পৃষ্ঠায় ফর্মা, এমন 27 ফর্মার বই ছাপিতে পারে, তবে প্রত্যহ 8 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া কত দিনে 15 জন কম্পোজিটার 48 অক্ষরে লাইন, 50 লাইনে পৃষ্ঠা, 16 পৃষ্ঠায় ফর্মা, এমন 50 ফর্মার বই ছাপিতে পারিবে ?

কম্পোজিটার	15 : 4	
ঘণ্টা	8 : 9	
অক্ষর	50 : 48	: : 15 দিন : নির্ণেয় সময়
লাইন	40 : 50	
ফর্মার পৃষ্ঠা	16 : 16	
ফর্মা	27 : 50	

নির্ণেয় সময় $= \frac{4 \times 9 \times 48 \times 50 \times 16 \times 50 \times 15}{15 \times 8 \times 50 \times 40 \times 16 \times 27}$ বা 10 দিন।

প্রশ্নমালা 8

1. যদি 6 জন লোক 4 দিনে 48 এর জমির ধান কাটিতে পারে, তবে কত দিনে 10 জন লোক 120 এর জমির ধান কাটিতে পারিবে ?

2. যদি 24 জন লোক প্রত্যহ 7 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 70 দিনে একটি কার্য সম্পন্ন করিতে পারে, তবে 42 জন লোক প্রত্যহ 14 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া ঐ কার্য কতদিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে ?

3. যদি 50 জন লোক দৈনিক 8 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া একটি কার্য 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে, তবে 60 জন লোক দৈনিক কত ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া পূর্ব কার্যের দ্বিগুণ একটি কার্য 16 দিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে ?

4. প্রতি 5 মিনিটে 3 বার তোপ দাগিয়া 5-টি কামান দ্বারা $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় 135 জন লোক হত্যা করিলে, প্রতি 6 মিনিটে 5 বার তোপ দাগিয়া কয়টি কামান দ্বারা 2 ঘণ্টায় 500 লোক হত্যা করা যাইবে ?

*5. যদি প্রতিদিন 9 ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া এক ব্যক্তি 35 দিনে 600 কি. মি. হাঁটিতে পারে, তবে প্রতিদিন 10 ঘণ্টা বিশ্রাম করিয়া পূর্ব গতির $1\frac{1}{2}$ গুণ দ্রুত হাঁটিয়া কতদিনে সেই ব্যক্তি 375 কি. মি. হাঁটিতে পারিবে ?

6. 60 জন লোক 618 মিটার লম্বা একটি প্রাচীর 21 দিনে প্রস্তুত করিবার সিদ্ধান্ত করে ; কিন্তু 15 দিন পরে দেখা গেল যে, মাত্র 412 মিটার প্রস্তুত হইয়াছে। নির্ধারিত সময়ে উহা সম্পন্ন করিতে হইলে আর কতজন লোক আবশ্যক হইবে ?

7. A যে সময়ে $3\frac{3}{4}$ কি. মি. হাঁটে, B সেই সময়ে 4 কি. মি. হাঁটে। যদি A 6 দিনে 165 কি. মি. হাঁটে, তবে B 15 দিনে কত কিলোমিটার হাঁটিবে ?

8. $9\frac{3}{4}$ কি. গ্রা. জিনিস 80 কি. মি. দূরে প্রেরণ করিতে 3 টাকা ভাড়া লাগে। 130 কি. গ্রা. জিনিস কত কিলোমিটার প্রেরণ করিতে টা. 27·50 ভাড়া লাগিবে ?

9. যদি 17 জন লোক 100 মিটার দীর্ঘ, 4 মিটার উচ্চ এবং $\frac{5}{8}$ মিটার চওড়া একটি প্রাচীর 25 দিনে গাঁথিতে পারে, তবে কতজন লোক ইহার দ্বিগুণ আয়তন-বিশিষ্ট একটি দেওয়াল পূর্ব সময়ের অর্ধেক সময়ে গাঁথিতে পারিবে ?

10. যদি 12 জন কম্পোজিটার দৈনিক $10\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 8 দিনে 40 অক্ষরে লাইন, 60 লাইনে পৃষ্ঠা, এমন 720 পৃষ্ঠার বই ছাপিতে পারে, তবে দৈনিক 7 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া কত দিনে 9 জন কম্পোজিটার 50 অক্ষরে লাইন, 45 লাইনে পৃষ্ঠা, এমন 960 পৃষ্ঠার বই ছাপিতে পারিবে ?

11. যদি 80 জন শ্রমিক প্রত্যহ 8 ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 2 মাসে 30 মিটার দৈর্ঘ্য, 20 মিটার প্রস্থ ও 12 মিটার গভীরতাবিশিষ্ট একটি পুকুর খনন করিতে পারে, তবে 64 জন শ্রমিক প্রত্যহ কত ঘণ্টা পরিশ্রম করিয়া 5 সপ্তাহে 20 মিটার দৈর্ঘ্য, 15 মিটার প্রস্থ ও 10 মিটার গভীরতাবিশিষ্ট একটি পুকুর খনন করিতে পারিবে ?

12. যদি 12 জন লোক প্রত্যহ 9 ঘণ্টা খাটিয়া 30 দিনে কোন একটি কাজ সম্পন্ন করিতে পারে, তবে কতজন লোক প্রত্যহ 5 ঘণ্টা খাটিয়া 24 দিনে উহার দশ গুণ একটি কাজ সম্পন্ন করিবে ? [C. U. 1948]

13. যদি 3 জন পুরুষ বা 5 জন স্ত্রীলোক একটি কার্য 8 দিনে করিতে পারে এবং যদি 2 জন পুরুষ বা 7 জন বালক সেই কার্য 12 দিনে করিতে পারে ; তাহা হইলে 13 জন পুরুষ, 14 জন বালক ও 15 জন স্ত্রীলোক ঐ কার্যের 13 গুণ একটি কার্য কতদিনে করিতে পারিবে ?

***14.** 1 জন পুরুষ = 2 জন স্ত্রীলোক = 3 জন বালক। যদি 3 জন পুরুষ, 4 জন স্ত্রীলোক ও 5 জন বালক একত্রে কোন কার্য 12 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে, তবে 4 জন পুরুষ ও 10 জন বালক একত্রে সেই কার্য কত দিনে সম্পন্ন করিবে ?

3. *সমানুপাতিক ভাগহার*
(Division into Proportional Parts)

প্রদত্ত রাশিকে প্রদত্ত সংখ্যার অনুপাতে বিভক্ত করিবার প্রণালীকে **সমানুপাতিক ভাগহার** (Division into proportional parts) বলে।

উদাহরণ 1. দুই ব্যক্তির মধ্যে 1178 টাকা $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$ অনুপাতে ভাগ করিয়া দাও।

প্রদত্ত অনুপাত $= \frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3\times3}{4\times3} : \frac{5\times2}{6\times2} = \frac{9}{12} : \frac{10}{12} = 9 : 10$

এক্ষণে, $9+10=19$

$\therefore$ প্রথম ব্যক্তির অংশ $= \frac{1178}{19} \times 9$ বা 558 টাকা

এবং দ্বিতীয় ব্যক্তির অংশ $= \frac{1178}{19} \times 10$ বা 620 টাকা।

[অনুপাতের সংখ্যাগুলির সমষ্টিদ্বারা প্রদত্ত রাশিকে ভাগ করিয়া ভাগফলকে অনুপাতের এক-একটি সংখ্যা দ্বারা পৃথকভাবে গুণ করিতে হয়।]

উদাহরণ 2. 13390 টাকা A, B ও C-এর মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, A-র অংশ : B-এর অংশ : : 4 : $3\frac{1}{2}$ এবং B-এর অংশ : C-এর অংশ : : 2 : 5 হয়।

$$\frac{\text{A-র অংশ}}{\text{B-এর অংশ}}=\frac{4}{3\frac{1}{2}}=\frac{4\times4}{3\frac{1}{2}\times4}=\frac{16}{14} \text{ এবং } \frac{\text{B-এর অংশ}}{\text{C-এর অংশ}}=\frac{2}{5}=\frac{2\times7}{5\times7}=\frac{14}{35}$$

∴ A-র অংশ : B-এর অংশ : C-এর অংশ : : 16 : 14 : 35

এক্ষণে, $16+14+35=65$

∴ A-র অংশ $=\frac{13390}{65}\times16$ বা 3296 টাকা,

B-এর অংশ $=\frac{13390}{65}\times14$ বা 2884 টাকা

এবং C-এর অংশ $=\frac{13390}{65}\times35$ বা 7210 টাকা।

[তিন জনের একত্রে অনুপাত পাইবার জন্য দুই অনুপাতে B-এর ভাগ সমান করিতে হইবে। এইজন্য দুই অনুপাতে B-এর অংশ 14 করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 3. 400-টি আম 2 জন পুরুষ, 5 জন স্ত্রীলোক ও 8 জন বালকের মধ্যে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, প্রত্যেক পুরুষের $\frac{1}{3}$ অংশ, প্রত্যেক স্ত্রীলোকের $\frac{1}{2}$ অংশ এবং প্রত্যেক বালকের $\frac{3}{4}$ অংশ পরস্পর সমান হয়।

প্রত্যেক স্ত্রীলোকের অংশের $\frac{1}{2}$ = প্রত্যেক পুরুষের অংশের $\frac{1}{3}$

∴ „ „ অংশ = „ „ „ $\frac{2}{3}$;

আবার, প্রত্যেক বালকের অংশের $\frac{3}{4}$ = প্রত্যেক পুরুষের অংশের $\frac{1}{3}$

∴ „ „ অংশ = „ „ „ $\frac{4}{9}$;

∴ প্রত্যেক পুরুষের অংশ : প্রত্যেক স্ত্রীলোকের অংশ : প্রত্যেক বালকের অংশ $=1:\frac{2}{3}:\frac{4}{9}=9\times1:9\times\frac{2}{3}:9\times\frac{4}{9}=9:6:4$

∴ 2 জন পুরুষের অংশ : 5 জন স্ত্রীলোকের অংশ : 8 জন বালকের অংশ
$=9\times2:6\times5:4\times8=18:30:32$

এখন, $18+30+32=80$; 400 আম $\div80=5$ আম,

∴ প্রত্যেক পুরুষ পাইবে 5×9 বা 45-টি আম,

„ স্ত্রীলোক „ 5×6 বা 30-টি আম

এবং „ বালক „ 5×4 বা 20-টি আম।

উদাহরণ 4. এক মুদি 15 কি. গ্রা. চীনা চা, 20 কি. গ্রা. সিংহলী চা এবং 25 কি. গ্রা. ভারতীয় চা কিনিয়া বেশ করিয়া একত্র মিশ্রিত করিল। এই চায়ের মিশ্রণের 48 কিলোগ্রামের মধ্যে বিভিন্ন প্রকারের চা কত কিলোগ্রাম করিয়া আছে?

চীনা চা : সিংহলী চা : ভারতীয় চা = 15 : 20 : 25 = 3 : 4 : 5

$\therefore$ মিশ্রণে চীনা চা-এর পরিমাণ $= \frac{3}{3+4+5} \times 48$ বা $\frac{3}{12} \times 48$ বা 12 কি. গ্রা.,

সিংহলী চা-এর পরিমাণ $= \frac{4}{3+4+5} \times 48$ বা $\frac{4}{12} \times 48$ বা 16 কি. গ্রা.

এবং ভারতীয় চা-এর পরিমাণ $= \frac{5}{3+4+5} \times 48$ বা $\frac{5}{12} \times 48$ বা 20 কি. গ্রা.।

উদাহরণ 5. তিনজন চাষী A, B এবং C একই মাঠে গরু চরায়। ঐ মাঠে A-র 10-টি গরু 7 মাস, B-এর 12-টি গরু 5 মাস এবং C-এর 15-টি গরু 3 মাস চরে। মাঠের খাজনা 70 টাকা হইলে, খাজনা বাবদ কে কত দিবে?

A-র 10-টি গরু 7 মাস চরে, অর্থাৎ (7×10) বা 70-টি গরু 1 মাস চরে,

B-এর 12-টি গরু 5 মাস চরে, অর্থাৎ (5×12) বা 60-টি গরু 1 মাস চরে

এবং C-এর 15-টি গরু 3 মাস চরে, অর্থাৎ (3×15) বা 45-টি গরু 1 মাস চরে।

$\therefore$ A-র দেয় খাজনা : B-এর দেয় খাজনা : C-এর দেয় খাজনা

$= 70 : 60 : 45 = 14 : 12 : 9$

$\therefore$ A-র দেয় খাজনা $= \frac{14}{14+12+9} \times 70$ বা $\frac{14}{35} \times 70$ বা 28 টাকা,

B-এর দেয় খাজনা $= \frac{12}{14+12+9} \times 70$ বা $\frac{12}{35} \times 70$ বা 24 টাকা

এবং C-এর দেয় খাজনা $= \frac{9}{14+12+9} \times 70$ বা $\frac{9}{35} \times 70$ বা 18 টাকা।

প্রশ্নমালা 4

1. যদি বারুদে 75 ভাগ সোরা, 10 ভাগ গন্ধক ও 15 ভাগ কয়লা থাকে তাহা হইলে 10 কিলোগ্রাম বারুদে প্রত্যেক দ্রব্যের পরিমাণ কত?

2. A, B ও C-এর মধ্যে 24680 টাকা এমনভাবে ভাগ করিয়া দাও যেন A 2 টাকা পাইলে, B 3 টাকা এবং C 5 টাকা পায়। [C U. 1935]

3. A, B ও C-এর মধ্যে 1080 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, A, B-এর 3 গুণ টাকা এবং B ও C একত্রে A-র অর্ধেক টাকা পায়।

4. তিন ব্যক্তির 3 : 7 : 8 অনুপাতে কিছু টাকা আছে। প্রথম ব্যক্তি অপেক্ষা দ্বিতীয় ব্যক্তির 500 টাকা বেশী আছে। তিন ব্যক্তির মোট কত টাকা আছে?

5. কতকগুলি 'টাকা', '50 ন. প.' ও '25 ন. প.' মুদ্রায় মিলিয়া মোট 187 টা. 50 ন. প. হইল। ঐ মুদ্রাগুলির সংখ্যার অনুপাত 3 : 4 : 5 হইলে কোন্ প্রকার মুদ্রা কয়টি আছে ?

6. 15 কি. মি. 947 মি. দীর্ঘ একটি লোহার তারকে $\frac{5}{6} : \frac{6}{7} : \frac{7}{8}$ অনুপাতে 3 ভাগ করিলে প্রতি অংশের দৈর্ঘ্য কত ?

7. 3 জন পুরুষ, 5 জন স্ত্রীলোক এবং 8 জন বালকের মধ্যে 500 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, প্রত্যেক পুরুষ 6 টাকা পাইলে প্রত্যেক স্ত্রীলোক 4 টাকা এবং প্রত্যেক বালক 1 টা. 50 ন. প. পায়।

*8. একটি বালক কোন পরীক্ষায় চারিটি বিষয়ে 2 : 3 : 4 : 1 অনুপাতে নম্বর পাইল। সকল বিষয়ে পূর্ণসংখ্যা সমান। বালকটি মোট পূর্ণসংখ্যার $\frac{3}{5}$ নম্বর পাইয়াছিল। কয়টি বিষয়ে সে পূর্ণসংখ্যার অর্ধেকের বেশী নম্বর পাইয়াছিল ?

9. 7872 টাকা মূল্যের সম্পত্তি এরূপে তিন ভাগ কর যে, প্রথম ভাগ, দ্বিতীয় ভাগের 4 গুণ এবং দ্বিতীয় ভাগ, তৃতীয় ভাগের 3 গুণ হইবে।

10. A, B ও C-কে 870 টাকা এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন, A-র অংশের ·5 = B-এর অংশের ·6 = C-এর অংশের ·75 হয়।

11. টাকা, 50 ন. প. মুদ্রা ও 25 ন. প মুদ্রা মিলিয়া মোট 420-টি মুদ্রা আছে। যদি উহাদের মূল্যের অনুপাত 2 : 3 : 5 হয়, তবে কোন্ মুদ্রা কয়টি আছে ?

*12. A, B ও C একটি সম্পত্তির মালিক। তাহাদের অংশের অনুপাত 4 : $2\frac{1}{2}$: $1\frac{1}{2}$. A তাহার অংশের অর্ধেক C-কে এবং C তাহার অংশ হইতে B-এর নিকট 100 এর জমি বিক্রয় করায় B ও C-এর অংশ সমান হইল। কাহার কত সম্পত্তি ছিল ?

4. সম্ভুয় সমুত্থান

(Partnership)

একাধিক ব্যক্তি স্ব স্ব মূলধন লইয়া একসঙ্গে যদি একটি ব্যবসায় করে, তবে তাহাকে **যৌথ ব্যবসায়** বলে। যাহাদের মূলধনে ব্যবসায় চলে তাহারা ঐ ব্যবসায়ের **অংশীদার** (Fellow বা Partner). যৌথ ব্যবসায়ের লাভ-ক্ষতি অংশীদারদিগের

মধ্যে বণ্টন করিয়া দেওয়ার প্রণালীকে **সম্ভূয় সমুত্থান** (Fellowship বা Partnership) বলে।

প্রত্যেকের মূলধন সমকালের জন্য নিয়োজিত হইলে লাভ-ক্ষতির বণ্টন প্রণালীকে **সরল সম্ভূয় সমুত্থান** এবং বিভিন্ন সময়ের জন্য নিয়োজিত হইলে উহাকে **মিশ্র সম্ভূয় সমুত্থান** বলে।

প্রকৃতপক্ষে ইহা সমানুপাতিক ভাগের অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ 1. কোন যৌথ ব্যবসায়ে A, B ও C যথাক্রমে 12000 টাকা, 16000 টাকা এবং 20000 টাকা নিয়োজিত করিল। ঐ ব্যবসায়ে মোট 7200 টাকা লাভ হইলে প্রত্যেকের লাভের অংশ নির্ণয় কর। [E. B. S. B. 1952]

A-এর অংশ : B-এর অংশ : C-এর অংশ = 12000 : 16000 : 20000
= 3 : 4 : 5

এখন, 3+4+5 = 12

∴ A-এর লভ্যাংশ = $\frac{3}{12}$ × 7200 টাকা = 1800 টাকা,

B-এর লভ্যাংশ = $\frac{4}{12}$ × 7200 টাকা = 2400 টাকা

এবং C-এর লভ্যাংশ = $\frac{5}{12}$ × 7200 টাকা = 3000 টাকা।

উদাহরণ 2. A কোন ব্যবসায়ে 15000 টাকা নিয়োজিত করিবার 6 মাস পরে B উহাতে কিছু মূলধন নিয়োজিত করিল। B যোগদানের 10 মাস পরে মোট 5100 টাকা লাভ হইল। B যদি 1500 টাকা লভ্যাংশ পাইয়া থাকে, তবে তাহার মূলধন কত?

B-এর মূলধনের 10 মাসের লভ্যাংশ = 1500 টাকা

তাহার " 1 " " = $\frac{1500}{10}$ বা 150 টাকা।

A-র মূলধনের (6+10) বা 16 মাসের লভ্যাংশ = (5100 − 1500) টাকা
= 3600 টাকা

∴ তাহার 1 মাসের লভ্যাংশ = (3600 ÷ 16) বা 225 টাকা।

A-র মূলধন : B-এর মূলধন : : 225 : 150

∴ B-এর মূলধন = $\frac{\text{A-র মূলধন} \times 150}{225} = \frac{15000 \text{ টা.} \times 150}{225}$

= 10000 টাকা।

প্রশ্নমালা 5

1. A, B ও C একত্রে ব্যবসায় করিতে আরম্ভ করিল। A 650 টাকা, B 500 টাকা এবং C 700 টাকা দিল। বৎসরান্তে 555 টাকা লাভ হইলে কে কত পাইবে?

2. A, B ও C তিনজনে মিলিয়া 4500 টাকার ব্যবসায় করিয়া 1500 টাকা লাভ করিল; ঐ লাভের অংশ বাবদ তিনজনে যথাক্রমে 750 টাকা, 500 টাকা ও 250 টাকা গ্রহণ করিল। কে কত মূলধন দিয়াছিল?

3. A, B ও C কোন যৌথ ব্যবসায় করিয়া 1000 টাকা লাভ করিল। যদি A ও B-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 3 এবং B ও C-এর মূলধনের অনুপাত 2 : 5 হয়, তবে কে কত লভ্যাংশ পাইবে? [C. U. 1932 ; D. B. 1943]

4. A, B ও C তিনজনে একটি যৌথ কারবারে কোন নির্দিষ্ট সময়-অন্তে 720 টাকা লাভ করিল। A সমগ্র মূলধনের $\frac{1}{5}$ অংশ, $\frac{1}{3}$ সময়; B সমগ্র মূলধনের $\frac{1}{4}$ অংশ, $\frac{1}{5}$ সময় এবং C তাহার মূলধন সমগ্র সময়ের জন্য খাটাইল। কে কত টাকা লভ্যাংশ পাইয়াছিল?

5. A 300 টাকা এবং B 500 টাকা মূলধন দিয়া এক ব্যবসায় আরম্ভ করিল। 6 মাস পরে A আরও 400 টাকা দিল, কিন্তু B 100 টাকা তুলিয়া লইল। এক বৎসর শেষে যদি 61 টা. 75 ন. প. লাভ হইয়া থাকে, তবে কে কত লভ্যাংশ পাইবে?

6. তিনজন চাষী A, B এবং C একই মাঠে গরু চরায়। ঐ মাঠে A-র 10-টি গরু 7 মাস, B-এর 12-টি গরু 5 মাস এবং C-এর 15-টি গরু 3 মাস চরে। মাঠের খাজনা 17 টা. 50 ন. প. হইলে খাজনা বাবদ কে কত দিবে?

[W. B. S. B. 1958]

7. A, B, C ও D একটি কারবার আরম্ভ করিল। 1-লা জানুয়ারী A 1200 টাকা, 1-লা এপ্রিল B 1500 টাকা, 1-লা জুলাই C 1800 টাকা এবং 1-লা অক্টোবর D 2100 টাকা মূলধন দিল। বৎসরান্তে 900 টাকা লাভ হইল। লভ্যাংশ কিভাবে বণ্টিত হইবে? [D. B. 1932]

*8. এক যৌথ ব্যবসায়ে B-এর মূলধন A-র মূলধনের $1\frac{1}{2}$ গুণ। 8 মাস পরে B তাহার মূলধনের $\frac{1}{3}$ অংশ এবং আরও 2 মাস পরে A তাহার মূলধনের $\frac{1}{4}$ অংশ তুলিয়া লইল। বৎসরান্তে 530 টাকা লাভ হইলে কাহার লভ্যাংশ কত?

*9. A, B ও C কোন যৌথ ব্যবসায়ে যথাক্রমে 100 টাকা, 150 টাকা এবং 200 টাকা মূলধন নিয়োজিত করিল। A ব্যবসা পরিচালনার জন্য সমগ্র লাভের $\frac{1}{8}$ অংশ অতিরিক্ত পাইল। যদি A মোট 46 টাকা পায় তবে B ও C কত পাইবে?

*10. A, B ও C কোন যৌথ প্রতিষ্ঠানের অংশীদার এবং উহাদের মূলধনের অনুপাত যথাক্রমে $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$. A 4 মাস পরে তাহার মূলধনের অর্ধাংশ তুলিয়া লইল। ইহার আরও 8 মাস পরে ব্যবসায়ে মোট 2024 টাকা লাভ হইল। A কত টাকা লভ্যাংশ পাইবে?

5. *মিশ্রণ*

(Mixture or Alligation)

বিভিন্ন মূল্যের বিভিন্ন পরিমাণ দ্রব্য একত্রিত করিলে **মিশ্রণ** (Mixture বা Alligation) পাওয়া যায়। মিশ্রণের উপাদানসমূহের অথবা নূতন প্রকার মিশ্রণের পরিমাণ ও মূল্য বাহির করিতে হইলে অনুপাত অঙ্কের সাহায্য লওয়া হয়।

উদাহরণ 1. 60 ন. প. কিলোগ্রাম দরের 8 কি. গ্রা. চাউলের সহিত 75 ন. প. কিলোগ্রাম দরের 12 কি. গ্রা. চাউল মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত চাউলের প্রতি কিলোগ্রামের দাম কত?

(8+12) বা 20 কি. গ্রা. চাউলের মূল্য $= (8 \times 60 + 12 \times 75)$ ন.প. = টা. 13·80

∴ প্রতি কিলোগ্রাম মিশ্রিত চাউলের মূল্য $= \frac{\text{টা. } 13 \cdot 80}{20} = 69$ ন. প.

উদাহরণ 2. প্রতি কিলোগ্রাম টা. 5·80 দরের চা-এর সহিত প্রতি কিলোগ্রাম 9 টাকা দরের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে প্রতি কিলোগ্রাম মিশ্রিত চা-এর মূল্য টা. 6·60 হইবে?

প্রথম প্রকারের প্রতি কিলোগ্রাম চা-এর মূল্য মিশ্রিত চা-এর প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য অপেক্ষা (টা. 6·60 − টা. 5·80) বা টা. 0·80 কম।

∴ প্রতি কিলোগ্রাম চা-এ টা. 0·80 লাভ হয়।

আবার, দ্বিতীয় প্রকারের প্রতি কিলোগ্রাম চা-এর মূল্য মিশ্রিত চা-এর প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য অপেক্ষা (টা. 9 − টা. 6·60) বা টা. 2·40 বেশী।

∴ প্রতি কিলোগ্রাম চা-এ টা. 2·40 ক্ষতি হয়।

এক্ষণে, উভয় প্রকারের চা এরূপে মিশাইতে হইবে, যেন প্রথম পক্ষের লাভ ও দ্বিতীয় পক্ষের ক্ষতি সমান হয়।

$\therefore$ প্রথম প্রকার চা-এর পরিমাণ $\times$ টা 0.80

= দ্বিতীয় প্রকার চা-এর পরিমাণ $\times$ টা. 2.40

$\therefore$ $\dfrac{\text{প্রথম প্রকার চা}}{\text{দ্বিতীয় প্রকার চা}} = \dfrac{\text{টা } 2.40}{\text{টা } 0.80} = \dfrac{1}{3}$ নির্ণেয় অনুপাত = 3 : 1

উদাহরণ 3. প্রতি কিলোগ্রাম 10 টাকা দরের বিশুদ্ধ ঘৃতের সহিত প্রতি কিলোগ্রাম টা. 4.80 দরের অপর একটি পদার্থ নির্দিষ্ট অনুপাতে মিশাইয়া উহা প্রতি কিলোগ্রাম টা. $7.8\dot{2}$ দরে বিক্রয় করায় ক্রয়মূল্যের উপর 10% লাভ হইল। ঘৃতের সহিত অপর পদার্থ কি অনুপাতে মিশ্রিত ছিল?

মিশ্রিত ঘৃত প্রতি কিলোগ্রাম টা $7.8\dot{2}$ দরে বিক্রয় করায় 10% লাভ হইয়াছে।

$\therefore$ উহার পড়তা দরের (100+10) বা 110% বা $\frac{11}{10}$ = টা $7.8\dot{2}$

$\therefore$ মিশ্রিত ঘৃতের প্রতি কিলোগ্রামের পড়তা দর

$= \frac{10}{11} \times 7.8\dot{2}$ বা $\frac{64}{9}$ টাকা।

$\therefore$ প্রতি কিলোগ্রাম ঘৃতে ক্ষতি $= (10 - \frac{64}{9})$ বা $\frac{26}{9}$ টাকা এবং প্রতি কিলোগ্রাম অপর পদার্থে লাভ $= (\frac{64}{9} - 4.80)$ বা $\frac{104}{45}$ টাকা।

এখন, উভয় প্রকার পদার্থ এরূপভাবে মিশাইতে হইবে যেন ঘৃতের উপর ক্ষতি ও অপর পদার্থের উপর লাভ পরস্পর সমান হয়।

$\therefore$ ঘৃতের পরিমাণ $\times \frac{26}{9}$ টাকা = অপর পদার্থের পরিমাণ $\times \frac{104}{45}$ টাকা।

$\therefore$ $\dfrac{\text{ঘৃত}}{\text{অপর পদার্থ}} = \dfrac{\frac{104}{45}}{\frac{26}{9}} = \dfrac{4}{5}$ $\therefore$ ঘৃত : অপর পদার্থ = 4 : 5

উদাহরণ 4 প্রতি কিলোগ্রাম দুগ্ধের মধ্যে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 4 : 1; এখন কত জল মিশাইলে অনুপাত 8 : 3 হইবে?

প্রথমে দুগ্ধের পরিমাণ $= \frac{4}{4+1} \times 1$ কি গ্রা. = 800 গ্রাম

এবং জলের পরিমাণ $= \frac{1}{4+1} \times 1$ কি. গ্রা = 200 গ্রাম

পরে জল মিশাইলে দুগ্ধের পরিমাণ 800 গ্রামই রহিল; কিন্তু জলের পরিমাণ দুগ্ধের $\frac{3}{8}$ বা $(800 \times \frac{3}{8})$ বা 300 গ্রাম হইল।

$\therefore$ নির্ণেয় জলের পরিমাণ = (300 − 200) বা 100 গ্রাম।

উদাহরণ 5. তিনটি সমান পাত্র জল-মিশ্রিত মদ দ্বারা পূর্ণ। পাত্রগুলিতে মদ ও জলের অনুপাত যথাক্রমে 2 : 3, 3 : 4 এবং 4 : 5. তিনটি পাত্রের জল-মিশ্রিত মদ একটি পাত্রে ঢালা হইল। নূতন মিশ্রণে মদ ও জলের অনুপাত কি হইবে ?

প্রথম পাত্রে মদ $= \frac{2}{2+3}$ বা $\frac{2}{5}$ অংশ এবং জল $= \frac{3}{2+3}$ বা $\frac{3}{5}$ অংশ

দ্বিতীয় „ „ $= \frac{3}{3+4}$ বা $\frac{3}{7}$ „ „ „ $= \frac{4}{3+4}$ বা $\frac{4}{7}$ „

তৃতীয় „ „ $= \frac{4}{4+5}$ বা $\frac{4}{9}$ „ „ „ $= \frac{5}{4+5}$ বা $\frac{5}{9}$ „

$\therefore$ নূতন মিশ্রণে মদ : জল $= (\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}) : (\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\frac{5}{9})$

$= \frac{401}{315} : \frac{544}{315} = 401 : 544$

উদাহরণ 6. একটি পাত্রে 16 লিটার মদ আছে। উহা হইতে 2 লিটার মদ তুলিয়া লইয়া 2 লিটার জল ঢালিয়া পাত্রটি পূর্ণ করা হইল। পুনরায় উহা হইতে 2 লিটার তুলিয়া লইয়া 2 লিটার জল দ্বারা পাত্রটি পূর্বের ন্যায় পূর্ণ করা হইল। তৃতীয় বারও এইরূপ করা হইল। এখন ঐ পাত্রে মদ ও জলের অনুপাতের তুলনা কর।

পাত্রটিতে মোট 16 লিটার মদ আছে।

2 লিটার, 16 লিটারের $\frac{2}{16}$ বা $\frac{1}{8}$ অংশ। সুতরাং প্রথম বার 2 লিটার মদ তুলিয়া উহাতে 2 লিটার জল ঢালিলে মদের পরিমাণ দাঁড়াইবে পূর্ব মদের $(1-\frac{1}{8})$ অংশ। এই মিশ্রিত মদও 16 লিটার।

দ্বিতীয়বার 2 লিটার তুলিয়া লইবার পর পাত্রে অবশিষ্ট মদের পরিমাণ দাঁড়াইবে পূর্ব মদের $(1-\frac{1}{8})$ এর $(1-\frac{1}{8})$, অর্থাৎ পূর্ব মদের $(1-\frac{1}{8})^2$ অংশ।

এইরূপে তৃতীয়বার 2 লিটার তুলিয়া লইয়া জল ঢালিবার পর ঐ পাত্রে অবশিষ্ট মদের পরিমাণ হইবে পূর্ব মদের $(1-\frac{1}{8})^2$ এর $(1-\frac{1}{8})$ বা $(1-\frac{1}{8})^3$ বা $(\frac{7}{8})^3$ অর্থাৎ 16 লিটার এর $(\frac{7}{8})^3 = \frac{343}{32}$ লিটার।

সুতরাং, জলের পরিমাণ হইবে $(16-\frac{343}{32})$ বা $\frac{169}{32}$ লিটার।

$\therefore$ শেষ পর্যন্ত পাত্রে মদের পরিমাণ : জলের পরিমাণ $= \frac{343}{32} : \frac{169}{32} = 343 : 169$

উদাহরণ 7. 6 ঘন সে. মি. আয়তনের স্বর্ণ ও রৌপ্যমিশ্রিত একখণ্ড ধাতুর ওজন 93·8 গ্রাম। প্রতি ঘন সেন্টিমিটার স্বর্ণ ও রৌপ্যের ওজন যথাক্রমে 19·3 গ্রাম ও 10·5 গ্রাম। ঐ মিশ্রিত ধাতুখণ্ডে স্বর্ণের ওজন কত ?

6 ঘন সে. মি. স্বর্ণ ও রৌপ্য-মিশ্রিত ধাতুর ওজন 93·8 গ্রাম। যদি উহা কেবল মাত্র রৌপ্য-নির্মিত হইত, তবে উহার ওজন হইত $(6 \times 10{\cdot}5)$ বা 63 গ্রাম; অর্থাৎ $(93{\cdot}8 - 63)$ বা 30·8 গ্রাম কম।

এই 30 8 গ্রাম ওজন কম হইবাব কাবণ এই যে, উহাতে যে অংশ স্বর্ণ আছে তাহার স্থানে সবই বৌপ্য ধবায প্রতি ঘন সেন্টিমিটাবে (19 3 – 10 5) বা 8 8 গ্রাম কম ওজন হইতেছে।

∴ মোট স্বর্ণেব আযতন $= \frac{30\ 8}{8\ 8}$ বা $\frac{7}{2}$ ঘন সে মি।

∴ স্বর্ণেব ওজন $= (\frac{7}{2} \times 19\ 3)$ বা 67 55 গ্রাম।

প্রশ্নমালা 6

1. 36 ন প. এবং 50 ন. প. কিলোগ্রাম দবেব দুই প্রকার চাউল কি অনুপাতে মিশাইলে মিশ্রিত চাউলেব প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য 44 ন প হইবে?

2 70 ন প কিলোগ্রাম দবেব চাউলেব সহিত 1 টাকা কিলোগ্রাম দবের চাউল কি অনুপাতে মিশ্রিত কবিয়া মিশ্রিত চাউল ⁰0 ন প কিলোগ্রাম দবে বিক্রয করিলে 20% লাভ হইবে?

3 এক ব্যবসায়ী দুই প্রকাবেব মোট 600 কুইণ্ট্যাল মাখন কিনিল এবং উহাদিগকে একত্রে মিশাইযা প্রতি কুইণ্ট্যাল 640 টাকা দবে বিক্রয় কবিয়া মোট 14$\frac{2}{7}$% লাভ কবিল। যদি প্রথম প্রকার মাখন 500 টাকা এবং দ্বিতীয প্রকার মাখন 700 টাকা কুইণ্ট্যাল হয়, তাহা হইলে ঐ ব্যক্তি প্রত্যেক প্রকাব মাখন কত কুইণ্ট্যাল কবিয়া কিনিয়াছিল?

4 একটি পাত্রে জল মিশ্রিত মদ আছে। উহাব 7 ভাগ মদ ও 1 ভাগ জল। 5 লিটাব জল ঐ মিশ্রণে ঢালিলে মদ জলেব দ্বিগুণ হয়। উহাতে মদের পরিমাণ কত?

5 9 ভাগ মদ এবং 1 ভাগ জল দ্বাবা গঠিত একটি মিশ্রণে 4 লিটাব জল মিশাইলে নূতন মিশ্রণে মদেব পবিমাণ জলেব 6 গুণ হয। ঐ মিশ্রণে কত লিটাব মদ ছিল?

*6. এক ব্যক্তি খাঁটি দুগ্ধ ক্রয় করিয়া উহাতে জল মিশাইল। যদি ঐ মিশ্রিত দুগ্ধ ক্রয়মূল্যের দবে বিক্রয় কবিয়া তাহার 20% লাভ হইয়া থাকে, তবে প্রতি কিলোগ্রাম মিশ্রিত দুগ্ধে কত জল আছে?

*7. দুইটি পাত্রে জল-মিশ্রিত দুধ রহিযাছে। জল ও দুধের অনুপাত একটিতে 2 : 7 এবং অপরটিতে 2 : 9 পাত্র দুইটি হইতে মিশ্রিত পদার্থ কি অনুপাতে তুলিয়া লইয়া মিশাইলে উৎপন্ন পদার্থে জল ও দুধেব অনুপাত 1 : 4 হইবে? [C. U. 1944]

8. এক ব্যক্তি এক গ্লাস ঔষধ লইয়া উহার $\frac{1}{4}$ অংশ পান করিল। পরে গ্লাসটির বাকি অংশ জল দ্বারা পূর্ণ করিয়া $\frac{1}{3}$ অংশ পান করিল এবং পরে আবার গ্লাসটি জল দ্বারা পূর্ণ করিয়া $\frac{1}{2}$ অংশ পান করিল। সে সমুদয় ঔষধের কত অংশ পান করিল এবং কোন্ বারে কত অংশ পান করিল ?

9.* তিনটি সমানাকার পাত্রে জল-মিশ্রিত দুগ্ধ ছিল। পাত্রগুলিতে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত যথাক্রমে 3 : 1, 5 : 3 এবং 9 : 7. ঐ তিনটি পাত্রের দুগ্ধ একটি নূতন পাত্রে ঢালিলে, প্রমাণ কর যে, ঐ নূতন পাত্রে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 31 : 17 হইবে। [D. B. 1929]

10. 88 ন. প. ও 72 ন. প. কিলোগ্রাম দরের দুধ সমান ভাগে লইয়া জলের সহিত মিশানো হইল। যদি ঐ মিশ্র পদার্থের পরিমাণ 50 কিলোগ্রাম হয় এবং প্রতি কিলোগ্রামের মূল্য 64 ন. প. হয়, তবে উহাতে কত জল আছে ?

*11. দুগ্ধপূর্ণ একটি পাত্র হইতে 9 লিটার দুগ্ধ তুলিয়া লইয়া উহাকে জলদ্বারা পূর্ণ করা হইল। আবার পাত্র হইতে 9 লিটার মিশ্রিত দুগ্ধ তুলিয়া লইয়া উহাকে পুনরায় জলদ্বারা পূর্ণ করা হইল। এখন পাত্রে দুগ্ধ ও জলের অনুপাত 16 : 9 হইলে পাত্রে কত লিটার দুগ্ধ ধরে ?

12. স্বর্ণ ও রৌপ্য-মিশ্রিত একটি সঙ্কর ধাতুর ওজন 20 গ্রাম এবং ইহার আয়তন 1·3 ঘন সে. মি.। প্রতি ঘন সেন্টিমিটার স্বর্ণ ও রৌপ্যের ওজন যথাক্রমে 19·3 গ্রাম এবং 10·5 গ্রাম হইলে উহাতে কতখানি স্বর্ণ আছে ?

*13. একটি পিপা 18 লিটার মদে পূর্ণ ছিল। উহা হইতে 2 লিটার তুলিয়া লইয়া জল ঢালিয়া পিপাটি পূর্ণ করা হইল। পুনরায় পিপা হইতে 2 লিটার তুলিয়া লইয়া জল ঢালিয়া পূর্ণ করা হইল। তৃতীয়বারও ঐরূপ করিবার পর ঐ পিপায় মদ ও জলের অনুপাত কত হইবে ?

*14. 1 টাকা, 1 টা. 20 ন. প. ও 1 টা 80 ন. প. কিলোগ্রাম দরের তিন প্রকার চাউল কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে 1 টা. 60 ন. প. কিলোগ্রাম দরের মিশ্রিত চাউল উৎপন্ন হইবে ? মিশ্রণে প্রথম দুই প্রকার চাউল সমান পরিমাণে আছে।

একাদশ অধ্যায়

ঐকিক নিয়ম সম্পর্কীয় আলোচনা

(On Unitary Method)

A. আয়-কর (Income Tax) :-

কোন ব্যক্তি বা ব্যবসায় প্রতিষ্ঠানের বার্ষিক আয়ের উপর সরকার কর্তৃক যে কর ধার্য করা হয় তাহাকে **আয়-কর** (Income tax) বলে। সরকার কর্তৃক একটি নির্দিষ্ট আয়ের সীমা বাঁধিয়া দেওয়া আছে। যাহার বা যে প্রতিষ্ঠানের আয় ঐ সীমা অতিক্রম করে, তাহাকেই আয়-কর দিতে হয়। আয়ের সীমা এবং আয়-করের হার সরকার কর্তৃক বাঁধিয়া দেওয়া আছে। এই কর এরূপ ভাবে ধার্য করা হয় যে, দরিদ্র লোককে কিছুই দিতে হয় না; কিন্তু যাহার আয় যত বেশী, তাহাকে তত উচ্চ হারে এই কর দিতে হয়। আয়-করের ব্যাপারে যে কোন বৎসরের 1-লা এপ্রিল হইতে পরবর্তী বৎসরের 31-শে মার্চ পর্যন্ত সময়কে এক বৎসর ধরা হয়। যে কোন বৎসরের আয়ের উপর কর, তাহার পরবর্তী বৎসরে ধার্য করা হয়। পূর্বোক্ত বৎসরকে **আয়-কর বৎসর** (Income Tax Year) এবং শেষোক্ত বৎসরকে **আয়-কর ধার্যের বৎসর** (Assessment Year) বলা হয়। কি অনুপাতে আয়-কর ধার্য হইবে তাহা Finance Act অনুসারে স্থিরীকৃত হয়। এই পদ্ধতিও বিভিন্ন বৎসরে বিভিন্ন প্রকার।

মনে রাখিও, মোট আয় – আয়কর = প্রকৃত আয়।

উদাহরণ 1. প্রতি টাকায় 4 ন. প. করিয়া আয়-কর হইলে, যে ব্যক্তির আয় 1500 টাকা, তাহাকে কত আয়-কর দিতে হইবে?

1 টাকার উপর আয়-কর = 4 ন. প.

∴ 1500 " " " " = 1500 × 4 ন. প. = 60 টাকা।

উদাহরণ 2. এক ব্যক্তিকে তাহার আয়ের প্রথম 3000 টাকার উপর আয়-কর দিতে হয় না। আয়ের অবশিষ্টাংশের উপর 3% হারে তাহাকে 30 টা. 75 ন.প. আয়-কর দিতে হয়। তাহার মোট আয় কত?

3 টাকা আয়-কর দিতে হয় 100 টাকায়

∴ 30·75 " " " " " $\frac{100 \times 30{\cdot}75}{3}$ টাকায় = 1025 টাকায়।

∴ মোট আয় = (3000 + 1025) বা 4025 টাকা।

উদাহরণ 3. এক ব্যক্তি তাহার মোট আয়ের $\frac{2}{5}$ অংশের উপর, টাকায় 5 ন. প. হিসাবে আয়-কর দেয় ; ইহাতে তাহার মোট আয়ের উপর প্রতি টাকায় কত পড়ে ?

5 ন. প. = 1 টাকার $\frac{5}{100}$ = 1 টাকার $\frac{1}{20}$;

$\therefore$ ঐ ব্যক্তির আয়-কর = মোট আয়ের $\frac{2}{5}$ এর $\frac{1}{20}$ বা মোট আয়ের $\frac{1}{50}$ অংশ। কিন্তু 1 টাকার $\frac{1}{50}$ অংশ = 2 ন. প. ; অতএব, ঐ ব্যক্তির মোট আয়ের উপর প্রতি টাকায় 2 ন. প. করিয়া পড়ে।

প্রশ্নমালা 7

1. প্রতি টাকায় 3 ন. প. করিয়া আয়-কর হইলে 8775 টাকার আয়-কর কত ?

2. প্রতি টাকায় 5 ন. প. করিয়া আয়-কর। যে ব্যক্তি 32 টা. 75 ন. প. আয়-কর দেয়, তাহার মোট আয় কত ?

3. প্রতি টাকায় 3 ন. প. করিয়া আয়-কর দিয়া এক ব্যক্তির 1164 টাকা রহিল। ঐ ব্যক্তির মোট আয় কত ?

4. 5% হারে এক ব্যক্তিকে 112 টা. 25 ন.প. আয়-কর দিতে হয়। তাহার প্রকৃত আয় কত ?

5. এক ব্যক্তির বার্ষিক আয় 7962 টাকা। আয়ের প্রথম 3000 টাকায় কোন আয়-কর দিতে হয় না। আয়ের অবশিষ্টাংশের উপর প্রতি টাকায় 5 ন. প. আয়-কর দিলে ঐ ব্যক্তির প্রকৃত আয় কত ?

6. প্রতি টাকায় আয়-কর $\frac{1}{40}$ টাকা হিসাবে বৃদ্ধি হওয়ায় এক ব্যক্তির প্রকৃত আয় মোট 18 টা. 50 ন. প. কমিয়া গেল। তাহার মোট আয় কত ?

7. এক ব্যক্তি তাহার মোট আয়ের $\frac{16}{25}$ অংশের উপর $3\frac{1}{8}$% হারে আয়-কর দেয়। ঐ ব্যক্তি টাকা প্রতি কত আয়-কর দেয় ?

*8. এক ব্যবসায়ী তাঁহার বিল আদায়কারীকে 2%, উহা আদায় করিবার খরচের জন্য 2% দেন এবং তাঁহার প্রাপ্যের প্রতি টাকায় 5 ন. প. হিসাবে আয়-কর দিয়া তিনি 4560 টাকা পান। ব্যবসায়ীর মোট আয় কত ?

9. বেতনের প্রতি টাকায় 3 ন. প. হারে আয়-কর এবং 10 ন. প. হারে প্রভিডেণ্ট ফণ্ডে জমা দিয়া এক ব্যক্তির টা. 445·44 থাকে। ঐ ব্যক্তির বেতন কত ?

10. এক ব্যক্তির মোট আয় 30000 টাকা। ঐ ব্যক্তি মোট আয় হইতে 2500 টাকা জীবনবীমার প্রিমিয়াম দেন। জীবনবীমায় দেয় টাকার উপর আয়-কর লাগে না। বাকি আয়ের উপর তাহাকে প্রতি টাকায় $\frac{9}{64}$ টাকা হারে আয়-কর দিতে হইল। আয়-কর দিবার পর তাহার নিকট কত টাকা রহিল ?

B. **শৃঙ্খল নিয়ম** (Chain Rule) :

পুনঃ পুনঃ ঐকিক নিয়ম ব্যবহার না করিয়া একেবারে অঙ্ক কষিবার প্রণালীকে **শৃঙ্খল নিয়ম** (Chain rule) বলে।

উদাহরণ। যদি 8-টি গরুর মূল্য 2-টি ঘোড়ার মূল্যের সমান, 16-টি ঘোড়ার মূল্য 6-টি গাড়ীর মূল্যের সমান, 12-টি গাড়ীর মূল্য 4 খানা মোটর-কারের মূল্যের সমান হয়, তাহা হইলে 3 খানা মোটর-কারের মূল্যে কতগুলি গরু পাওয়া যাইবে ?

8-টি গরুর মূল্য = 2-টি ঘোড়ার মূল্য,

16-টি ঘোড়ার মূল্য = 6-টি গাড়ীর মূল্য,

12-টি গাড়ীর মূল্য = 4 খানা মোটর-কারের মূল্য,

3 খানা মোটর-কারের মূল্য = কতটি গরুর মূল্য ?

$\therefore$ গরুর সংখ্যা $= \frac{8 \times 16 \times 12 \times 3}{2 \times 6 \times 4} = 96.$

নিয়ম : বিভিন্ন জাতীয় জিনিসগুলি মাঝখানে সমান চিহ্ন দিয়া দুই সারিতে সাজাইতে হয়। লক্ষ্য রাখিতে হয় যেন একজাতীয় দুইটি রাশি একই সারিতে দুইবার না বসে। এখন নির্ণেয় রাশিটির সারির অন্যান্য রাশির গুণফল দ্বারা অপর সারির রাশিগুলির গুণফলকে ভাগ করিলেই নির্ণেয় উত্তর পাওয়া যায়।

উল্লিখিত নিয়মে রাশিগুলি সাজাইলে একটি শৃঙ্খলের মত দেখায় বলিয়া নিয়মটি **শৃঙ্খল নিয়ম** নামে পরিচিত।

প্রশ্নমালা 8

1. যদি 15-টা মোরগের মূল্য 12-টা হাঁসের মূল্যের সমান, 24-টা হাঁসের মূল্য 12-টা ছাগলের মূল্যের সমান, 14-টা ছাগলের মূল্য 10-টা ভেড়ার মূল্যের সমান হয় এবং প্রতিটি ভেড়ার মূল্য 16 টাকা হইলে প্রতিটি মোরগের মূল্য কত টাকা ?

2. 3 কি. গ্রা. ঘি-এর মূল্য 8 কি. গ্রা. মাখনের মূল্যের সমান ; 160 কি. গ্রা. মাখনের মূল্য 6 টন কয়লার মূল্যের সমান ; 40 হন্দর কয়লার মূল্য 1-টি গরুর মূল্যের সমান এবং 10-টি গরুর মূল্য 4-টি ঘোড়ার মূল্যের সমান। 2-টি ঘোড়ার মূল্যে কত কিলোগ্রাম ঘি পাওয়া যাইবে ?

*3. A-র 5 দিনের কাজ B-এর 4 দিনের কাজের সমান। B-এর 2 দিনের কাজ C-এর 3 দিনের কাজের সমান। C-এর 7 দিনের কাজ D-এর 8 দিনের কাজের সমান। D-এর 14 দিনের কাজ E-এর 17 দিনের কাজের সমান। A যে কাজ 245 দিনে করে, E সেই কাজ কতদিনে করিবে ?

4. A যতক্ষণে কোন কার্যের $\frac{1}{3}$ অংশ করে, B ততক্ষণে উহার $\frac{1}{4}$ অংশ করে এবং B যতক্ষণে উহার $\frac{1}{5}$ অংশ করে, C ততক্ষণে উহার $\frac{1}{8}$ অংশ করে। A যে কার্য 20 ঘণ্টায় করে, C তাহা কতক্ষণে করিবে ?

5. যদি 1 পাউণ্ড = 15 টাকা ; 5 ফ্রাঁ = 4 শিলিং ; 12 ডুকাট = 125 ফ্রাঁ এবং 24 ডুকাট = 50 রুবল হয়, তবে 100 রুবলে কত টাকা ?

6. যদি 1 টাকা = 1 শি. 6 পে. ; 3 পাউণ্ড = 20 থেলার ; 50 থেলার = 186 ফ্রাঁ ; 81 ফ্রাঁ = 15 স্কুদি এবং 124 স্কুদি = 270 গুল্ডেন হয়, তবে 330 গুল্ডেনে কত টাকা ?

C. বৈদেশিক মুদ্রা বিনিময় (Foreign Exchange) :

পৃথিবীর বিভিন্ন দেশে বিভিন্ন প্রকার মুদ্রা প্রচলিত। এক দেশের মুদ্রাকে অপর এক দেশের মুদ্রার তুল্যমানে পরিবর্তিত করিয়া আদান-প্রদানকে **মুদ্রা বিনিময়** (Exchange) বলে।

দুই দেশের মুদ্রার মধ্যে যে প্রকৃত মূল্যগত সম্বন্ধ, তাহাকে **বিনিময়ের সমতা** (Part of exchange) বলে।

কোনও সময়ে এক দেশের নির্দিষ্ট পরিমাণ মুদ্রার মূল্য-স্বরূপ অন্য দেশের যে পরিমাণ মুদ্রা পাওয়া যায়, তাহাকে **বিনিময়ের হার** (Rate of exchange) বলে। যেমন, ইংলণ্ডের 1 পাউণ্ডে একটি ফরাসী নেপোলিয়নের 1·261 গুণ সোনা আছে ; সেইজন্য বিনিময়ের সমতা 1 পাউণ্ড = 1·261 নেপোলিয়ন। বাস্তবক্ষেত্রে দেখা যায়, বিনিময়ের হারে 1 পাউণ্ড, 1·261 নেপোলিয়নের কিছু কম বা বেশী হয়।

বিভিন্ন দেশের মধ্যে অর্থের দেনা-পাওনার আদান-প্রদান তিন প্রকারে হইতে পারে,—(i) **তুল্য-মানের স্বর্ণমুদ্রায়** অথবা (ii) **তুল্য-মানের তাল সোনা দ্বারা** অথবা (iii) **বৈদেশিক হুণ্ডি** (Foreign bill of exchange)-র সাহায্যে।

সাধারণতঃ বৈদেশিক হুণ্ডির সাহায্যেই বিভিন্ন দেশের মধ্যে দেনা-পাওনার আদান-প্রদান হইয়া থাকে।

দুই দেশের মধ্যে মুদ্রার বিনিময়ের হার আন্তর্জাতিক ব্যবসা-বাণিজ্য এবং বিভিন্ন রাজনৈতিক কারণে পরিবর্তিত হয়। যদি বিনিময়ের হার বিনিময়ের সমতা অপেক্ষা অধিক হয়, তবে তাহাকে **অধিহার** (Premium) বলে; আর যদি কম হয়, তবে তাহাকে **উনহার** (Discount) বলে।

বিনিময়ের বাজার-হার পরিবর্তনশীল, কিন্তু বিনিময়ের সমতা অপরিবর্তনীয়।

উদাহরণ 1. কলিকাতার এক ব্যবসায়ী লণ্ডন হইতে 270 পাউণ্ড মূল্যের পণ্যদ্রব্য আনাইলেন। যদি বিনিময়ের হার টাকা প্রতি 1 শি. 6 পে. হয়, তাহা হইলে ঐ ব্যবসায়ীকে কত টাকা দিতে হইবে ?

1 শি. 6 পে. $= \frac{3}{2}$ শি. $= \frac{3}{40}$ পা. $= 1$ টাকা। $\therefore$ 1 পা. $= \frac{40}{3}$ টাকা

অতএব, 270 পা. $= 270 \times \frac{40}{3}$ টাকা $= 3600$ টাকা।

উদাহরণ 2. বিনিময়ের সমতা 1 টাকা $=2$ শিলিং এবং ইংলণ্ডের মুদ্রার অধিহার 25%. কলিকাতা হইতে এক ভদ্রলোক লণ্ডনে তাঁহার পুত্রের নিকট 250 টাকা পাঠাইলেন। পুত্র ঐ দেশীয় মুদ্রায় কত পাইবে ?

বিনিময়ের সমতা 2 শি. $=1$ টাকা

$\therefore$ 25% অধিহারে 2 শি. $= 1 \times \frac{125}{100}$ টাকা $= \frac{5}{4}$ টাকা।

$\therefore$ 1 টাকা $= \frac{4}{5} \times 2$ শি. $= \frac{2}{25}$ পাউণ্ড

$\therefore$ 250 টাকা $= 250 \times \frac{2}{25}$ পাউণ্ড $= 20$ পাউণ্ড।

উদাহরণ 3. ইংলণ্ডের এক বণিককে স্পেনে 20574 পেসিটা পাঠাইতে হইবে। তখন বিনিময়ের হার 27 পেসিটা $=15$ শিলিং, 1 পাউণ্ড $= 25{\cdot}4$ ফ্রাঁ, 27 পেসিটা $=19$ ফ্রাঁ। বণিকের পক্ষে এই মুদ্রা সোজা স্পেনে পাঠানো সুবিধাজনক, না ফ্রান্সের মধ্য দিয়া পাঠানো সুবিধাজনক হইবে ?

মুদ্রা সোজা স্পেনে পাঠাইলে বণিকের লাগিবে

20574 পেসিটা $= 20574 \times \frac{15}{27} \times \frac{1}{20}$ পাউণ্ড $= 571\frac{1}{2}$ পাউণ্ড $= 571$ পা. 10 শি.

আবার, উহা ফ্রান্সের মধ্য দিয়া পাঠাইলে লাগিবে 20574 পেসিটা

$=20574\times\frac{19}{27}\times\frac{1}{25\cdot4}$ পা. = 570 পা.। সুতরাং, ফ্রান্সের মধ্য দিয়া পাঠানোই সুবিধাজনক এবং ইহাতে বণিকের (571 পা. 10 শি. − 570 পা.) = 1 পা. 10 শি. খরচ কম হইবে।

উদাহরণ 4. ইংলণ্ড হইতে প্রেরিত চারিখানি পুস্তকের জন্য 4 টা. 50 ন. প. ডাক-মাশুলসহ আমার 48 টা. 25 ন. প. খরচ পড়িয়াছে। পুস্তক-বিক্রেতা আমাকে প্রতি শিলিং-এ 2 পেন্স করিয়া প্রকাশিত মূল্যের উপর কমিশন বাদ দিল। যদি বিনিময়ের হার 1 টাকা = 1 শি. 4 পে. হয়, তবে পুস্তকগুলির মূল্য ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় কত ছিল?

ডাক-খরচ বাদে পুস্তকগুলির ক্রয়মূল্য = 48 টা. 25 ন. প. − 4 টা. 50 ন. প.

= 43 টা. 75 ন. প. = $\frac{175}{4}$ টাকা।

যেহেতু, বিনিময়ের হার, 1 টাকা = 1 শি. 4 পে. = 16 পে.; অতএব, ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় ঐ পুস্তকগুলির ক্রয়মূল্য = $\frac{175}{4}\times 16$ পে. = 700 পে.।

কিন্তু প্রকাশিত মূল্যের উপর শিলিং প্রতি 2 পেন্স করিয়া কমিশন হিসাবে বাদ দেওয়া হইয়াছে; সুতরাং প্রকাশিত মূল্য 1 শি. বা 12 পে. হইলে, ক্রয়মূল্য (12 − 2) বা 10 পে. অর্থাৎ 10 পে. ক্রয়মূল্য হইলে, প্রকাশিত মূল্য 12 পে.। ∴ ক্রয়মূল্য 700 পে. হইলে, প্রকাশিত মূল্য = $700\times\frac{12}{10}$ পে. = 840 পে. = 3 পা. 10 শি.।

∴ ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় পুস্তকগুলির ক্রয়মূল্য = 3 পা. 10 শি.।

উদাহরণ 5. নিউইয়র্কের এক ব্যবসায়ী লণ্ডনে 5000 ডলার মূল্যের মাল ক্রয় করিল। যদি বিনিময়ের হার 1 ডলার = 4 শি. 6 পে. এবং লণ্ডনে বিলের দর $9\frac{1}{2}\%$ অধিহারে (Of premium) হয়, তাহা হইলে ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় কত মূল্যের বিল ক্রয় করিয়া মালের মূল্য পরিশোধ করা যাইবে? [C. U. 1945]

1 ডলার = 4 শি. 6 পে.

∴ 5000 ডলার = 4 শি. 6 পে. × 5000 = 1125 পা.।

লণ্ডনে বিলের দর $9\frac{1}{2}\%$ অধিহারে বলিয়া, 100 পা. মালের জন্য $109\frac{1}{2}$ পা.-এর বিল ক্রয় করিতে হইবে।

ইংলণ্ডীয় মুদ্রায় 1125 পা. মূল্যের মাল ক্রয় করিতে, $\frac{109\frac{1}{2}}{100}\times 1125$ পা.

বা 1231 পা. 17 শি. 6 পে. মূল্যের বিল ক্রয় করিতে হইবে।

নির্ণেয় বিলের মূল্য = 1231 পা. 17 শি. 6 পে.।

প্রশ্নমালা 9

1. যদি 1 টাকার বিনিময়ে 1 শি. $4\frac{3}{16}$ পে. পাওয়া যায়, তবে একলক্ষ টাকা বিনিময়ে কত পাওয়া যাইবে ?

2. যদি 1 টাকা, 1 শি. $6\frac{3}{4}$ পে.-এর সমান হয়, তবে 1 পাউণ্ড কত টাকা সমান ? এই মূল্যে 250 পাউণ্ড ক্রয় করিয়া যখন 1 টাকা, 1 শি. 6 পে.-এর সমান তখন বিক্রয় করিলে কত লাভ বা ক্ষতি হয় ?

3. 1 পাউণ্ড, 11·2 ফ্লোরিন্ বা 20·8 মার্কের সমান। এক পর্যটক দৈনিক 10 ফ্লোরিন্ খরচ করিয়া 7 দিন অষ্ট্রিয়ায় এবং দৈনিক 18 মার্ক খরচ করিয়া 13 দিন জার্মেনীতে বেড়াইয়া আসিল। ঐ পর্যটক ইংলণ্ড হইতে 20 পাউণ্ড লইয়া ভ্রমণে বহির্গত হইয়াছিল ; ইংলণ্ডে প্রত্যাবর্তনকালে পর্যটক কত ফেরৎ আনিবে ?

4. যদি বিনিময়ের সমতা 1 টাকা = 1 শি. $10\frac{1}{2}$ পে. হয় এবং যদি কখনও ভারতীয় মুদ্রার সহিত বিনিময়ে ইংলণ্ডের মুদ্রার অধিহার 10% হয়, তবে ঐ সময়ে 1320 টাকার বিনিময়ে ইংলণ্ডের কত মুদ্রা পাওয়া যাইবে ?

5. বোম্বাই হইতে কোন বণিক লণ্ডনে অপর এক বণিকের নিকট 1000 পাউণ্ড পাঠাইতে গিয়া দেখিলেন যে, উহা সোজা লণ্ডনে না পাঠাইয়া প্যারিসের মধ্য দিয়া পাঠাইলে তাহার 220 টাকা কম লাগে। যদি বোম্বাই ও প্যারিসের বিনিময়ের হার 2016 ফ্রাঁ = 617 টাকা এবং লণ্ডন ও প্যারিসের বিনিময়ের হার 60·40 ফ্রাঁ = 1 পাউণ্ড হয়, তবে লণ্ডন ও বোম্বাইয়ের বিনিময়ের হার কত ? [B. U. 1922]

6. ভারতীয় 1 টাকার পরিবর্তে ইংলণ্ডের 1 শি. 5 পে. পাইলে যদি শতকরা 1[illegible] পাউণ্ড ক্ষতি হয়, তবে বিনিময়ের সমতা কত ?

*7. 960 মার্ক মূল্যের কিছু মাল জার্মেনী হইতে ইংলণ্ডে আনিতে এক ব্যবসায়ীর 1 পা. 10 শি. খরচ পড়ে এবং ভারতবর্ষে পাঠাইতে ব্যবসায়ীর অতিরিক্ত 101 টা. 25 ন. প. খরচ হয়। ঐ মাল ভারতে 1026 টাকায় বিক্রয় করিলে, কত লাভ হইবে বিনিময়ের হার, 1 মার্ক = $11\frac{3}{4}$ পে. এবং 1 পা. = 13 টা. 50 ন. প.।

*8. বোম্বাই-এর এক ব্যবসায়ী বার্লিনের এক বণিকের নিকট 1410 টাকা ধারে। যদি 1 টাকা = 1 শি. 4 পে. এবং 1 মার্ক = $11\frac{3}{4}$ পে. হয়, তবে লণ্ডন ব্যাঙ্কের মারফৎ ঐ টাকা পরিশোধ করিলে বার্লিনের বণিক কত পাইবে ?

*9. এক মিটার কাপড়ের মূল্য 16·40 ফ্রাঁ ; যদি 1 টাকা = 7·8 ফ্রাঁ এবং 1 গজ = 91·44 সে. মি. হয়, তবে প্রতিগজ কাপড়ের মূল্য কত টাকা হইবে ?

দ্বাদশ অধ্যায়

বিল ও বাট্টা

(Bill and Discount)

ব্যবসা-জগতে পণ্যদ্রব্যের ক্রয়-বিক্রয়ের সময় ক্রেতা সকল সময় বিক্রেতাকে নগদ মূল্য না-ও দিতে পারে। এরূপ স্থলে ক্রেতা সাধারণতঃ বিক্রেতাকে কোন নির্দিষ্ট সময়ান্তে নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা দিবার একটি অঙ্গীকার পত্র দান করে। এই অঙ্গীকার পত্রকেই **বিল** (Bill) বলে।

সাধারণতঃ বিল দুই প্রকার,—(*i*) **করারি তমস্সুক** (Promisory Note) এবং (*ii*) **হুণ্ডি** (Hundi or Bill of Exchange).

(*i*) কোন নির্দিষ্ট সময়ান্তে কোন নির্দিষ্ট ব্যক্তিকে নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা দিবার জন্য কোন এক ব্যক্তি দ্বারা লিখিত অঙ্গীকার-পত্রকে **করারি তমস্সুক** বলে।

উহার একটি নমুনা নিয়ে দেওয়া হইল—

Stamp	12, Cornwallis Street, Calcutta. 15th. Sept., 1962

Rs. 500/-

Six months after date, I promise to pay Sri A. B. Maiti, the sum of Rupees Five hundred only.

S. Chowdhury.

(*ii*) কোন ব্যক্তি যখন অপর কোন ব্যক্তিকে এই মর্মে লিখিত আদেশ দেয় যে, তাহাকে অথবা তাহার মনোনীত অপর কাহাকেও কোন এক নির্দিষ্ট সময় মধ্যে (সাধারণতঃ 3 মাস) এই পরিমাণ টাকা দিতে হইবে, তখন ঐ প্রকার আদেশপত্রকে **হুণ্ডি** বলে।

মনে করা যাউক, A, B-এর নিকট 1200 টাকার পুস্তক ক্রয় করিল। B, A-র নামে 1200 টাকার একটি হুণ্ডি লিখিয়া দিল। A এই হুণ্ডির উপরে 'Accepted' লিখিয়া B-কে ফেরৎ দিল। নির্দিষ্ট সময়ান্তে B সেই হুণ্ডি দ্বারা A-র নিকট হইতে তাহার প্রাপ্য টাকা আদায় করিতে পারে। কিন্তু নির্দিষ্ট সময়ের পূর্বেই

যদি B-এর টাকার প্রয়োজন হয়, তখন সে কোন ব্যাঙ্কে যাইয়া ঐ হুণ্ডিতে লিখিত টাকা প্রার্থনা করিতে পারে। ব্যাঙ্ক ইচ্ছা করিলে ঐ হুণ্ডি রাখিয়া B-কে তখন নগদ টাকা দিয়া দিতে পারে; ইহাকে **বিল ভাঙ্গান** (Discounting a bill) বলে। কিন্তু যেহেতু ব্যাঙ্ককে হুণ্ডিতে লিখিত সেই নির্দিষ্ট দিন পর্যন্ত টাকার জন্য অপেক্ষা করিতে হইবে, সেইজন্য ব্যাঙ্ক B-কে সম্পূর্ণ টাকা না দিয়া কিছু কম দিবে। এই যে টাকাটা ব্যাঙ্ক কাটিয়া রাখিল, ইহাকেই **ব্যাজ** বা **ব্যাঙ্কের বাটা** (Commercial or Banker's Discount) বলে এবং ইহার পরিমাণ বিলে লিখিত টাকার উপর, যে সময় পরে টাকা দেয় হইবে, সেই সময়ের জন্য সুদের সমান।

দেশের প্রচলিত আইন অনুসারে নির্দিষ্ট দিনের পরও অতিরিক্ত 3 দিন সময় পাওয়া যায়। ইহাকে **অনুগ্রহের 3 দিন** (Three days of grace) বলে। ব্যাজ দিবার সময় এই 3 দিনও হিসাব করা হয়।

বিলে লিখিত সময়ানুসারে যে তারিখে বিলের টাকা দেয়, সেই তারিখে বিলটি নামমাত্র দেয় (Nominally due) এবং উহার সহিত অনুগ্রহের তিন দিন যোগ করিয়া যে তারিখ পাওয়া যায়, সেই তারিখে বিলটি আইনতঃ দেয় (Legally due)।

বিল লেখাকে বলে Drawing a bill. যে ব্যক্তি ঐ বিল লিখে, তাহাকে **বিলপ্রেরক** (Drawer) এবং যাহার উপর উহা লেখা হয়, তাহাকে **বিলগ্রাহক** (Drawee) বলে। বিলের টাকা যাহাকে দেওয়ার জন্য নির্দেশ দেওয়া থাকে, তাহাকে বলা হয় বিলের **প্রাপক** (Payee)। বিলের টাকা কোন্ তারিখে দেয়, তাহা নির্ণয় করিবার জন্য কখনও কখনও বিল যে-দিনে লিখিত হয় সেদিন (Date of drawing) হইতে গণনা করা হয়; আবার কখনও বিলের স্বীকৃতি দিবস (Date of acceptance) হইতে গণনা করা হয়। প্রথমক্ষেত্রে বিলের উপর Payable after date এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে Payable after sight কথা লেখা থাকে।

দ্রষ্টব্য: মনে রাখিও, বিলের উপর বিল-গ্রাহকের সহিযুক্ত স্বীকৃতি না থাকিলে, বিলের কোন মূল্যই থাকে না; কিন্তু করারি তমসুকে উহার প্রয়োজন হয় না। আবার, বিলে বিলের যে-কোন বাহককে টাকা দেওয়ার আদেশ দেওয়া যায়, কিন্তু করারি তমসুকে কেবলমাত্র উহার গ্রহীতাকে টাকা দেওয়ার প্রতিশ্রুতি দেওয়া হয়।

নিম্নে দুইটি বিলের নমুনা দেওয়া হইল—

(1)

Stamp

GHOSH & CO.
5, Clive Street,
Calcutta.
9th. Sept., 1962

Rs. 1200·00

Six months after date, pay to me or my order, the sum of Rupees Twelve hundred only, for value received.

To
Shri B. Dutta,
1/1, College Street,
Calcutta.

For GHOSH & CO.
B. Ghosh
Manager.

Accepted
B. Dutta
9. 9. 62.

(2)

Stamp

12, Cornwallis Street,
Calcutta
12. 10. 62

Rs. 600·00

Six months after sight, pay to me or my order, the sum of Rupees Six hundred only, for value received.

To
Shri Bimal Kr. Das,
121, Bowbazar Street,
Calcutta.

S. Chowdhury

Accepted
B. Das
15. 10. 62

প্রথম বিল 9ই সেপ্টেম্বর হইতে 6 মাস পরে দেয় এবং দ্বিতীয় বিল 15ই অক্টোবর হইতে 6 মাস পরে দেয়।

নিয়ে একটি বিল ব্যাখ্যা করা হইল—

HUNDI

INDIA

2 Rs. 50 nP

Due Date 31. 10. 1960

Rs. 5000/-

Calcutta, .. 1960

At (90) ....Ninety.............days after date without grace days please pay to SETH Ghanashamdas Ashok Kumar or order the sum of Rupees ....Five......thousand...... only for value received in cash this day.

For N. R. BOSE & CO.

Proprietor.

55·44 00

TO Sri Pratap Kumar Sinha
3A Duff lane
Calcutta

ACCEPTED

Pratap Kumar Sinha

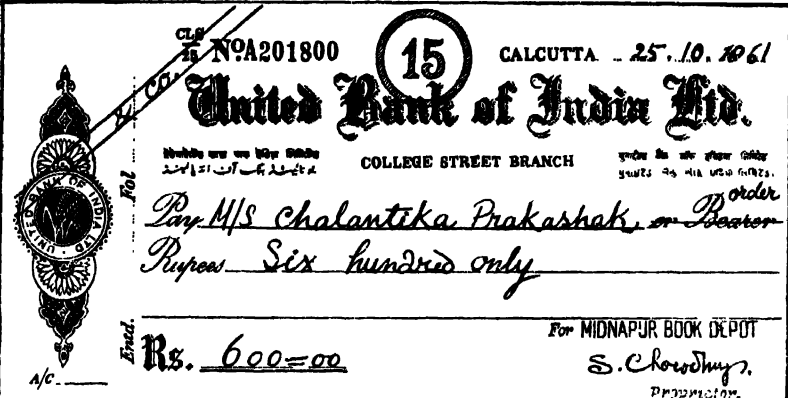
ব্যাখ্যা : (A) বিলের লেখক বা মালিক—নীলরতন বসু।

(B) বিলের গ্রাহক বা দেনাদার—শ্রীপ্রতাপ কুমার সিংহ।

(C) বিলের প্রাপক—শেঠ ঘনশ্যামদাস অশোককুমার।

(D) বিলটি লেখার তারিখ 2. 8. 60.

(E) 2. 8. 60. তারিখ হইতে 90 দিন পরে, অর্থাৎ 31. 10. 60. তারিখে বিলের উপর লিখিত টাকা, অর্থাৎ 5000 টাকা দেয়।

[অর্থাৎ, N. R. Bose & Co-এর মালিক নীলরতন বসু, শ্রীপ্রতাপকুমার সিংহকে আদেশ দিতেছেন যেন তিনি অদ্য (বিল লেখার দিন) হইতে 90 দিন বাদে শেঠ ঘনশ্যামদাস অশোককুমার বা তাহার কোন নির্দিষ্ট ব্যক্তিকে বিলে লিখিত 5000 টাকা দিয়া দেন।]

চেক :

ব্যাঙ্কের উপর যে বিল লেখা হয় তাহাকে **চেক** (Cheque) বলে ; অর্থাৎ ব্যাঙ্কে টাকা জমা রাখিবার পর কোন আমানতকারী নিজেকে বা কোন ব্যক্তি বা প্রতিষ্ঠানকে অথবা তাহার কোন বাহক বা নির্দিষ্ট ব্যক্তিকে, তাহার জমা টাকা হইতে নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকা দেওয়ার যে লিখিত আদেশ দেয় তাহাকেই চেক বলা হয়। চেক বই

ব্যাঙ্ক আমানতকারীকে দেয় এবং আমানতকারী উহার দ্বারা কাহাকে কত টাকা দিতে হইবে লিখিয়া পাঠায়।

দ্রষ্টব্য ঃ হুণ্ডির ন্যায় চেকে স্বীকৃতির প্রয়োজন হয় না।

ব্যাঙ্কে যাহার নামে হিসাব (Account) থাকে তাহাকে অর্থাৎ চেকের স্বাক্ষরকারীকে 'Drawer' বলে; যে ব্যাঙ্কের উপর চেক লেখা হয় তাহাকে 'Drawee' এবং যাহার নামে চেক লেখা হয়, তাহাকে 'Payee' বলে। নিম্নে একটি চেকের নমুনা দেওয়া হইল। উহাতে এস. চৌধুরী চেকের Drawer, ইউনাইটেড্ ব্যাঙ্ক অব্ ইণ্ডিয়া Drawee এবং চলন্তিকা প্রকাশক চেকের Payee.

যে চেকে "Bearer" কথাটি লেখা থাকে, সেই চেক্ যে-কোন লোক ব্যাঙ্কে জমা দিয়া চেকে লিখিত টাকা তুলিতে পারে। অনেক সময় ঐ কথাটি কাটিয়া 'order' কথা এবং চেকের উপরে দুইটি সমান্তরাল রেখা টানিয়া উহার মধ্যে "& Co." লেখা থাকে; উহাকে রেখাঙ্কিত চেক বা 'Crossed Cheque' বলা হয়। এক্ষেত্রে 'Payee'-র যে ব্যাঙ্কে হিসাব আছে, তাহার মারফৎ চেক ভাঙ্গাইতে হয়। অবশ্য Payee ইচ্ছা করিলে চেকে লিখিত টাকা অপর কাহাকেও দিবার নির্দেশ দিতে পারে; তখন চেকের উপর "Pay to………" কথা লিখিয়া নির্দেশ দিতে হয়। এই প্রকার নির্দেশ দেওয়াকে চেক Endorse করা বলে। যে ব্যক্তি endorse করে, তাহাকে 'Endorser' এবং যাহার নামে আদেশ দেওয়া হয়, তাহাকে 'Endorsee' বলে। ইহা ছাড়া অনেক ক্ষেত্রে চেকের উপর "A/c payee only" কথা লেখা থাকে। সেক্ষেত্রে 'Payee'-র যে ব্যাঙ্কে হিসাব আছে, কেবলমাত্র সেই ব্যাঙ্কে চেক্ জমা দিয়া ভাঙ্গান যাইবে।

ড্রাফ্‌ট :

কোন ব্যাঙ্ক, স্বদেশেই হউক অথবা বিদেশেই হউক, উহার কোন শাখা অফিসে বা তাহার কোন প্রতিনিধিকে (Agent) কোন ব্যক্তি বা প্রতিষ্ঠানকে নির্দিষ্ট

No 023627 36/2098

Current for 90 (Ninety) days from the date of issue

United Bank of India Ltd.

COLLEGE STREET BRANCH, CALCUTTA.

Rs 100/- Dated 27. 10. 1961.

On demand pay to MIDNAPUR BOOK DEPOT or order

the sum of Rupees ONE HUNDRED ONLY for value received.

To
UNITED BANK OF INDIA LTD.
ROYAL EXCHANGE BRANCH,
CALCUTTA.

For UNITED BANK OF INDIA LTD.
Agent
Accountant

পরিমাণ অর্থ প্রদান করিবার জন্য যে লিখিত আদেশ দেয়, সেই আদেশপত্রকে ড্রাফ্‌ট (Draft) বলে। ড্রাফ্‌টের উপর লিখিত টাকা চাহিবামাত্র বা নির্দিষ্ট সময় অন্তে দেয়। ব্যবসায়ক্ষেত্রেও এই ড্রাফ্‌টের প্রচলন আছে। বিক্রেতা পণ্য প্রেরণ করিবার সময় পণ্যের মূল্য-লিখিত চালান এবং পণ্য পাঠাইবার রসিদ ক্রেতার নির্দেশমত ব্যাঙ্কে পাঠায়। ক্রেতা পণ্যের টাকা দিয়া ব্যাঙ্কের নিকট হইতে ঐ চালান ও রসিদ গ্রহণ করে। ব্যাঙ্ক চালানে লিখিত পণ্য-মূল্যের সম-মানবিশিষ্ট একখানি চেক্ পণ্য-বিক্রেতাকে প্রেরণ করে। বিক্রেতা ঐ চেক্ যে-কোন ব্যাঙ্কে ভাঙাইতে পারে।

উদাহরণ 1. 15-ই মার্চ লিখিত 500 টাকার একখানি বিলের টাকা 3 মাস পরে দেয়। উহা যদি কোন ব্যবসায়ী 6-ই এপ্রিল তারিখে 5% হার সুদে ব্যাঙ্কে ভাঙায়, সে কত টাকা পাইবে ?

বিলের টাকা 15-ই মার্চ হইতে 3 মাস পরে, অর্থাৎ 15-ই জুন দেয়। ইহার সহিত অনুগ্রহের 3 দিন যোগ করিয়া হয় (15+3) বা 18-ই জুন। 6-ই এপ্রিল হইতে 18-ই জুন পর্যন্ত দিনসংখ্যা (এপ্রিল 24+মে 31+জুন 18) বা 73 দিন $=\frac{73}{365}$ বা $\frac{1}{5}$ বৎসর।

এখন, শতকরা 5 টাকা হার সুদে 500 টাকার $\frac{1}{5}$ বৎসরের সুদ

$$=\frac{500 \times \frac{1}{5} \times 5}{100} \text{ বা } 5 \text{ টাকা।}$$

∴ ব্যবসায়ী পাইবে (500−5) বা 495 টাকা।

[আলোচ্যক্ষেত্রে ব্যাঙ্কের বাটা 5 টাকা।]

উদাহরণ 2. 7-ই এপ্রিল তারিখে লিখিত 2000 টাকার একটি হুণ্ডির টাকা 6 মাস পরে দেয়। 17-ই মে উক্ত হুণ্ডি 4% হারে কোন ব্যাঙ্কে ভাঙ্গাইলে ব্যাঙ্কের নিকট হইতে কত টাকা পাওয়া যাইবে ?

হুণ্ডিটি 7-ই এপ্রিল হইতে 6 মাস পরে, অর্থাৎ 7-ই অক্টোবর পরিশোধ্য। ইহার সহিত অনুগ্রহের 3 দিন যোগ করিয়া হয় (7+3) বা 10-ই অক্টোবর। 17-ই মে হুণ্ডিটি ভাঙ্গাইলে উহার মেয়াদ উত্তীর্ণ হইতে বাকি থাকে 17-ই মে হইতে 10-ই অক্টোবর পর্যন্ত সময় অর্থাৎ (মে 14+জুন 30+জুলাই 31+আগষ্ট 31+সেপ্টেম্বর 30+অক্টোবর 10) বা 146 দিন $=\frac{2}{5}$ বৎসর।

∴ ব্যাঙ্ক 4% হারে 2000 টাকার $\frac{2}{5}$ বৎসরের সুদ বাদ দিয়া টাকা দিবে।

এখন, 4% হারে 2000 টাকার $\frac{2}{5}$ বৎসরের সুদ $=\frac{2000 \times 2 \times 4}{100 \times 5}$ বা 32 টাকা।

∴ ব্যাঙ্কের নিকট হইতে পাওয়া যাইবে (2000−32) বা 1968 টাকা।

উদাহরণ 3. 10-ই জুন তারিখে লিখিত টা. 10530·25-এর একটি হুণ্ডির টাকা 2 মাস পরে দেয়। 21-শে জুন উক্ত হুণ্ডি কোন ব্যাঙ্কে ভাঙ্গাইয়া হুণ্ডির মালিক টা. 10480·50 পাইল। ব্যাঙ্কের সুদের হার নির্ণয় কর।

হুণ্ডিটি 10-ই জুন হইতে 2 মাস পরে অর্থাৎ 10-ই আগস্ট পরিশোধ্য। ইহার সহিত অনুগ্রহের 3 দিন যোগ করিয়া আইনতঃ পরিশোধের দিন হয় 13-ই আগস্ট 21-শে জুন হুণ্ডিটি ভাঙ্গাইলে উহার মেয়াদ উত্তীর্ণ হইতে বাকী থাকে 21-শে জুন হইতে 13-ই আগস্ট পর্যন্ত সময় অর্থাৎ (জুন 9+জুলাই 31+আগস্ট 13) বা 53 দিন।

ব্যাঙ্কের মোট সুদ = (টা. 10530·25 − টা. 10480·50)

= টা. 49·75.

উক্ত সুদ টা. 10530·25-এর ব্যাঙ্কের প্রচলিত হারে 53 দিনের সুদের সমান।

সুতরাং, টা. 10530·25-এর 53 দিনের বা $\frac{53}{365}$ বৎসরের সুদ টা. 49·75

$$100 \text{ টাকার } 1 \text{ বৎসরের সুদ} = \frac{49 \cdot 75}{10530 \cdot 25} \times \frac{365}{53} \times 100 = \frac{13}{2}$$

টাকা (প্রায়)।

নির্ণেয় সুদের হার $= 6\frac{1}{2}\%$.

প্রশ্নমালা 10

1. 5% হারে 3 মাসে দেয় 650 টাকার ব্যাজ কত ?

2. $7\frac{1}{2}\%$ হারে 146 দিনে 147 টা. 50 ন. প.-এর ব্যাজ কত ?

3. $8\frac{1}{3}\%$ হারে 219 দিনে 294 টা. 50 ন. প.-এর ব্যাজ কত ?

4. 28-শে নভেম্বর লিখিত 131 টা. 25 ন. প.-এর একখানি বিলের টাকা তিন মাস পরে দেয়। বিলটি 20-শে ডিসেম্বর $7\frac{1}{2}\%$ হার সুদে ব্যাঙ্কে ভাঙ্গাইলে ব্যাঙ্কের ব্যাজ কত হইবে ?

5. 4-ঠা মার্চ লিখিত $\frac{2}{3}$ বৎসর পরে দেয় 2550 টাকার একটি হুণ্ডি পরবর্তী 14-ই আগস্ট কোন ব্যাঙ্কে ভাঙ্গানো হইল। সুদের হার 5% হইলে হুণ্ডির মালিক কত পাইবে ?

6. 5 মাস পরে দেয় 250 টাকার একখানি বিল 12-ই জুন তারিখ লেখা হইল; শতকরা 5 টাকা হার সুদে ঐ বিল 3-রা সেপ্টেম্বর তারিখে ব্যাঙ্কে ভাঙ্গানো হইলে ব্যাজ বাদে কত পাওয়া যাইবে ?

7. 5 মাস পরে টাকা পাওয়া যাইবে বলিয়া 12-ই সেপ্টেম্বর টা. 5018·75-এর একখানি হুণ্ডি লেখা হইল। যদি হুণ্ডির টাকা 16-ই জানুয়ারী লওয়া হয়, তবে 4% সুদে কত ব্যাজ বাদ যাইবে ?

8. 7-ই মার্চ লিখিত 1010 টাকার একটি হুণ্ডির টাকা 4 মাস পরে দেয়। ঐ হুণ্ডিটি 28-শে এপ্রিল ভাঙ্গানো হইল। যদি ব্যাঙ্কের সুদের হার শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হয়, তবে ব্যাঙ্কের কত লাভ হইল ?

*9. 4 মাস পরে দেয় 1300 টাকার কোন হুণ্ডির ব্যাজ 17 টা. 34 ন.প. হইলে, শতকরা বার্ষিক সুদের হার কত ?

*10. 1960 সালের 22-শে এপ্রিল লিখিত 28050 টাকার একটি হুণ্ডি 11 মাস পরে দেয়। 11. 1. 61. তারিখে হুণ্ডিটি কোন ব্যাঙ্কে ভাঙ্গাইয়া উহার মালিক 27489 টাকা পাইল। ব্যাঙ্কের সুদের হার নির্ণয় কর।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

মেট্রিক পদ্ধতি ও বৃটিশ পদ্ধতির মধ্যে পরস্পর সম্পর্ক
(Relations between Metric and British systems of Units.)

ভারত সরকার কর্তৃক আমাদের দেশে দৈর্ঘ্য, ওজন প্রভৃতি ক্ষেত্রে মেট্রিক প্রণালী প্রবর্তিত হইলেও বেসরকারী নানা কাজের এবং আন্তর্জাতিক ব্যবসা-বাণিজ্যের জন্য দৈর্ঘ্য, ওজন প্রভৃতি ক্ষেত্রে বৃটিশ পদ্ধতির সহিত পরিচয় থাকা প্রয়োজন। এই দুই পদ্ধতির পরস্পরের মধ্যে কি সম্পর্ক, সেই বিষয়েও শিক্ষার্থীর জ্ঞান থাকা প্রয়োজন।

নিম্নে মেট্রিক প্রণালী ও বৃটিশ পদ্ধতির বিভিন্ন এককাবলীর মধ্যে তুলনামূলক একটি তালিকা দেওয়া হইল :—

1. রেখা পরিমাণ :

1 ইঞ্চি = 2·54 সে. মি.	1 সে. মি. = ·3937 ইঞ্চি
1 ফুট = 30·48 সে. মি.	1 মিটার = 39·37 ইঞ্চি
1 গজ = 91·44 সে. মি.	1 কি. মি. = ·62 মাইল
1 মাইল = 1·609 কি. মি.	

2. বর্গ পরিমাণ :

1 ব. ই. = প্রায় 6·5 বর্গ সে. মি.	1 ব. সে. মি. = প্রায় ·16 ব. ই.
1 ব. ফু. = „ 9·3 বর্গ ডেসি. মি.	1 ব. মি. = „ 1·2 ব. গ.
1 ব. গ. = „ ·84 বর্গমিটার	1 এর = „ 119·6 ব. গ.
1 একর = „ ·4 হেক্টো এর	1 হেক্টো এর = „ 2·5 একর

3. ঘন পরিমাণ :

1 ঘ. ই. = প্রায় 16·39 ঘন সে. মি.	1 ঘ. মি. বা 1 স্টেয়ার = প্রায় 35·3 ঘ. ফু.
1 ঘ. ফু. = „ ·028 ঘন মি.	1 ডেকা লি. = „ 2·2 গ্যালন
1 গ্যালন = „ 4·55 লিটার	

4. ওজন পরিমাণ :

1 পাউণ্ড = প্রায় 453·6 গ্রাম	1 গ্রাম = প্রায় 15·4 গ্রেন
1 হন্দর = „ 50·8 কি. গ্রা.	1 কি. গ্রা. = „ 2·2 পাউণ্ড

উদাহরণ 1. পৃথিবীর পরিধি 40000 কিলোমিটার; উহাকে আসন্ন অখণ্ড মাইলে প্রকাশ কর। (1 মিটার = 39·37 ইঞ্চি।)

1 মিটার = 39·37 ইঞ্চি $\quad\therefore$ 1 কি. মি. = 39370 ইঞ্চি

$\therefore$ নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 40000 কি. মি. = $\frac{39370 \times 40000}{12 \times 3 \times 1760}$ বা আসন্ন 24855 মাইল।

উদাহরণ 2. 1 মিটার = $39\frac{3}{8}$ ইঞ্চি হইলে 1 ঘনফুটে কত আসন্ন অখণ্ড লিটার আছে? [C. U. 1911, D. B. 1938]

$39\frac{3}{8}$ ইঞ্চি = 39·375 ইঞ্চি = 100 সে. মি.

$\therefore$ 1 ইঞ্চি = $\frac{100}{39 \cdot 375}$ সে. মি.; $\quad\therefore$ 1 ফুট = $\frac{100 \times 12}{39 \cdot 375}$ সে. মি.

$\therefore$ 1 ঘনফুট = $\left(\frac{100 \times 12}{39 \cdot 375}\right)^3$ বা $(30 \cdot 4)^3$ ঘন সে. মি.

$= \frac{30 \cdot 4 \times 30 \cdot 4 \times 30 \cdot 4}{1000}$ বা আসন্ন 28 লিটার।

উদাহরণ 3. আলোর গতি সেকেণ্ডে 30 কোটি মিটার এবং সূর্য হইতে 8 মিনিটে পৃথিবীতে আলো আসিয়া পৌঁছে। 1 মিটার = 39·37 ইঞ্চি হইলে সূর্য হইতে পৃথিবীর দূরত্ব কত মাইল?

1 সেকেণ্ডে আলো যায় 300000000 মিটার

$\therefore$ 8 মিনিটে „ „ $300000000 \times 60 \times 8$ মিটার

$= 300000000 \times 60 \times 8 \times 39 \cdot 37$ ইঞ্চি

$= 3000000 \times 60 \times 8 \times 3937$ ইঞ্চি

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব = $\frac{3000000 \times 60 \times 8 \times 3937}{12 \times 3 \times 1760}$ মাইল

$\doteq 89477272 \cdot \dot{7}\dot{2}$ মাইল।

উদাহরণ 4. ফ্রান্সে 1 কি. মি. ও ইংলণ্ডে 1 মাইল যাইতে রেলভাড়া যথাক্রমে 6 সেন্টিম্ ও 1 পে. 2 ফা.। যদি 1 গজ = ·9144 মিটার এবং 1 পাউণ্ড = 25 ফ্রাঙ্ক হয় তবে 250 মাইল ইংলণ্ডে ও ফ্রান্সে রেলভ্রমণ করিতে ভাড়ার পার্থক্য কত হইবে তাহা আসন্ন ফার্দিং-এ নির্ণয় কর।

250 মাইল = (250×1760) গজ = $(250 \times 1760 \times \cdot 9144)$ মিটার

= 402·336 কি. মি.

∴ ফ্রান্সে 250 মাইলের ভাড়া

$=(402{\cdot}336\times 6)$ সেন্টিম্ $=\frac{2414{\cdot}016}{100}$ ফ্রাঙ্ক

$=(24{\cdot}14016\times\frac{1}{25})$ পাউণ্ড $={\cdot}9656064$ পাউণ্ড

আবার, ইংলণ্ডের 250 মাইলে ভাড়া = 1 পে. 2 ফা. × 250

$=\frac{25}{16}$ পাউণ্ড $=1{\cdot}5625$ পাউণ্ড।

∴ দুই দেশের ভাড়ার অন্তর $=(1{\cdot}5625-{\cdot}9656064)$ পাউণ্ড

$={\cdot}5968936$ পাউণ্ড = 11 শি. 11 পে. 1 ফা. (আসন্ন)।

প্রশ্নমালা 11

1. 1 মিটার = 39·37 ইঞ্চি হইলে 10 ফুটে কত সেন্টিমিটার ?

[C. U. 1948]

2. 10 বর্গমিটার এবং 12 বর্গগজ পরিমিতি দুইটি স্থানের মধ্যে কোন্ স্থানটি বৃহত্তর ?

3. 10 মাইল এবং 16 কি. মি.-এর অন্তর কত আসন্ন অখণ্ড গজ ?
(1 মিটার = 39·3708 ইঞ্চি)

4. 1 হেক্টো এরকে 1 একরের দশমিকে (2 দশমিক স্থান পর্যন্ত) প্রকাশ কর।
(1 মিটার = 39·3708 ইঞ্চি)

5. 13 মাইলে কত কিলোমিটার, মিটার এবং সেন্টিমিটার ?
(39 ইঞ্চি = 99 সে. মি.)

6. প্রতি একর জমিতে 1 টন চূণ সমানভাবে মিশাইয়া দেওয়া হইলে প্রতি বর্গমিটারে প্রায় কত গ্রাম করিয়া চূণ থাকিবে ?

7. 2·5 একর একটি বর্গক্ষেত্রকে বেড়া দিয়া ঘিরিতে প্রতি মিটারে 24 ন. প. হিসাবে আসন্ন কত টাকা খরচ হইবে ?

8. 39·37 ইঞ্চিতে 1 মিটার হইলে 15 ফু. 6 ই. দৈর্ঘ্য এবং 14 ফু. 2 ই. প্রস্থ-বিশিষ্ট একটি ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার ? (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় কর।) [C. U. 1946]

*9. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য 20 মিটার এবং প্রস্থ 12 মিটার। 39·37 ইঞ্চিতে 1 মিটার হইলে (দুই দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন) ইহার ক্ষেত্রফল কত বর্গগজ ?

10. প্রতি ডেসিলিটার বায়ুর ওজন ·1293 গ্রাম। 1 ফুট=30·4 সে. মি. এবং 1 গ্রাম=15·435 গ্রেণ হইলে 1 ঘনইঞ্চি বায়ুর ওজন আসন্ন 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত কত গ্রেণ? [E. B. S. B. 1950]

11. 1 ঘনফুট জলের ওজন 1000 আউন্স এবং 1 মিটার=39·37 ইঞ্চি হইলে কত লিটার জলের ওজন 1000 পাউণ্ড হইবে?

12. 1 পাউণ্ড=7000 গ্রেণ এবং 1 গ্রাম=15·432 গ্রেণ হইলে 1 আউন্সে কত গ্রাম? (তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্নমান নির্ণয় কর।)

13. 1 গ্যালন জলের ওজন 10 পাউণ্ড এবং 1 কি. গ্রা.=$2\frac{1}{5}$ পাউণ্ড হইলে কত ঘন সেন্টিমিটার জলের আয়তন 1 গ্যালন হইবে? (প্রতি ঘন সেন্টিমিটার জলের ওজন 1 গ্রাম।)

14. একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য উহার প্রস্থের 3 গুণ। ঐ চৌবাচ্চায় 3000 লিটার জল ধরে। চৌবাচ্চাটির গভীরতা 2·56 মিটার হইলে উহার দৈর্ঘ্য কত ফুট?

15. 277·274 ঘন ইঞ্চিতে 1 গ্যালন, 1 ঘন ডেসিমিটারে 61 ঘন ইঞ্চি এবং 1 কিলোগ্রামে $2\frac{1}{5}$ পাউণ্ড। 1 গ্যালন জলের ওজন কত পাউণ্ড নির্ণয় কর।

16. প্রতি লিটার বিশুদ্ধ দুগ্ধের ওজন 1·032 কি. গ্রা.। 16 লিটার দুগ্ধ ক্রয় করিয়া উহার সহিত কিছু জল মিশ্রিত করা হইল। জল-মিশ্রিত দুগ্ধের ওজন 6·128 কি. গ্রা. হইলে উহাতে কত ঘন সেন্টিমিটার জল মিশ্রিত করা হইয়াছিল?

*17. 1 কি. গ্রা.=2·2 পাউণ্ড, 1 মিটার=1·09 গজ এবং 1 মিটার তারের ওজন 55 গ্রাম হইলে 100 গজ তারের ওজন আসন্ন 3 দশমিক স্থান পর্যন্ত কত পাউণ্ড, নির্ণয় কর।

18. একটি বর্গাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 432·64 বর্গ কি. মি.। 100 ফুট বেড়া দিতে 18 টা. 75 ন. প. ব্যয় এবং 1 মিটার=39·37 ইঞ্চি হইলে ঐ ক্ষেত্রটির চতুর্দিকে বেড়া দিতে কত ব্যয় হইবে?

19. একটি ইঞ্জিনের চাকার পরিধি 12·5 মিটার। উহা প্রতি সেকেণ্ডে 2·5 বার আবর্তন করে। 100 মাইল যাইতে উহার কত সময় লাগিবে? (1 মাইল=1·6 কি. মি.) [E. B. S. B. 1950]

20. ব্যাবিলন রাজপ্রাসাদে 60 মিটার দীর্ঘ এবং 54 মিটার প্রশস্ত এক সহস্র প্রাঙ্গন ছিল। প্রাঙ্গনগুলি 18 ইঞ্চি বর্গ পাথর দ্বারা বাঁধন ছিল। পাথরের সংখ্যা নির্ণয় কর। (1 মিটার=39·37 ইঞ্চি) [C. U. 1951]

*21. একটি প্রাচীর 2404 কি. মি. লম্বা এবং উহার পাদদেশ 7625 মি.মি.। যে জমির উপর প্রাচীরটি দণ্ডায়মান সেই জমির ক্ষেত্রফল আসন্ন বর্গফুট পর্যন্ত নির্ণয় কর। (1 মিটার = 39·37 ইঞ্চি)

22. দুইটি স্থানের দূরত্ব 155 মাইল। একখানি ট্রেন একস্থান হইতে রাত্রি 11 ঘটিকায় ছাড়িয়া পরদিন সকাল 5-টা 15 মিনিটে অপর স্থানে পৌছায়। ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় কত কিলোমিটার ?

23. ফ্রান্সে প্রতি কিলোমিটারে তৃতীয় শ্রেণীর রেলভাড়া 5 সেন্টিম্ এবং ইংলণ্ডে প্রতি মাইলে উহা 1 পেনি। 1 গজ = ·9144 মিটার এবং 1 পাউণ্ড = 25·17 ফ্রাঙ্ক হইলে ঐ দুই দেশে 100 মাইল রেলভ্রমণ করিলে ভাড়ার পার্থক্য ইংলণ্ডের মুদ্রায় আসন্ন ফার্দিং পর্যন্ত কত হইবে ? [C. U. 1951]

24. লণ্ডন হইতে ডোভার 70 মাইল এবং রেলের ভাড়া 14 শি. 7 পে.। প্যারী হইতে বুলোঁ 240 কি. মি. এবং রেলের ভাড়া 36·16 ফ্রাঙ্ক। যদি 1 মিটার = 3 ফুট 3·37068 ইঞ্চি এবং 1 পাউণ্ড = 25·44 ফ্রাঙ্ক হয়, তাহা হইতে ইংলণ্ড ও ফ্রান্সের ভ্রমণের ব্যয়ের তুলনা কর।

25. এক দোকানদার ক্রয়মূল্যের উপর 5% লাভ রাখিয়া তাহার দ্রব্যের বিক্রয়মূল্য ধার্য করে। সে যদি ভুলক্রমে 2 পাউণ্ড চিনির পরিবর্তে 1 কি. গ্রা. চিনি বিক্রয় করে এবং 2 পাউণ্ড = ·93 কি. গ্রা. হয়, তবে তাহার ক্রয়মূল্যের উপর শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ?

প্রশ্নমালা 12

(বিবিধ প্রশ্ন)

1. সরল কর : $\dfrac{\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} \text{ এর } \frac{3}{4}}{\frac{2}{3} \div \frac{5}{6} \times \frac{3}{4}} \div \dfrac{3\frac{1}{6}}{3\frac{1}{3}}$ এর $\cdot 3\dot{7}5$

2. এমন একটি ক্ষুদ্রতম সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহার সহিত 2 যোগ করিলে যোগফল 22, 17, 33 ও 102 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য হয়।

3. এক ব্যক্তি বার্ষিক 6% হারে কিছু টাকা ধার করিলেন এবং 3 মাস পরে তিনি [illegible]% হারে আরও 200 টাকা ধার করিলেন। দ্বিতীয়বার ধার করার 6 মাস পরে দেখা গেল যে তাঁহার দুইটি ঋণের জন্য মোট সুদ টা. 17·50 হইয়াছে। তিনি প্রথমে কত টাকা ধার করিয়াছিলেন ?

4. A, B ও C একত্রে ব্যবসা আরম্ভ করিল। A 300 টাকা, B 200 টাকা এবং C 150 টাকা মূলধন দিল। 4 মাস পরে A আপনার মূলধনের অর্ধেক তুলিয়া লইল। আরও 9 মাস পরে দেখা গেল যে ব্যবসায়ে 284 টাকা লাভ হইয়াছে। ঐ লাভের অংশ কে কত পাইবে?

5. যদি 8 জন পুরুষ অথবা 17 জন বালক কোন একটি কার্য 33 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে, 12 জন পুরুষ ও 24 জন বালক একত্রে উহার 3 গুণ একটি কার্য কত দিনে করিতে পারিবে?

*6. এক ব্যক্তি 6 টাকা কিলোগ্রাম দরে কিছু চা এবং 3 টাকা কিলোগ্রাম দরে আরও কিছু চা ক্রয় করিল। এই দুই প্রকারের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিলে, মিশ্রিত চা 5 টাকা কিলোগ্রাম দরে বিক্রয় করিলে সে 25% লাভ করিতে পারিবে?

7. একটি টেনিসক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 3 : 2; প্রতি বর্গমিটার 31·25 ন.প. হিসাবে ঐ ক্ষেত্রটি চৌরস (Levelling) করিবার খরচ পড়ে 1470 টাকা। উহা লোহার রেলিং দিয়া ঘেরাও করিতে প্রতি মিটার 4 টাকা হিসাবে কত খরচ পড়িবে?

8. A 19% লোকসান দিয়া একটি বাড়ী B-কে 4860 টাকায় বিক্রয় করিল। B আবার উহা C-কে এমন মূল্যে বিক্রয় করিল যাহা পাইলে A-র 17% লাভ হইত। B শতকরা কত লাভ করিল?

9. 4 জন পুরুষ, 3 জন স্ত্রীলোক এবং 6 জন বালক প্রতিদিন 10 ঘণ্টা কাজ করিয়া 14 দিনে একটি কার্য সম্পন্ন করিতে পারে। 4 জন পুরুষ, 4 জন স্ত্রীলোক এবং 4 জন বালক প্রতিদিন 6 ঘণ্টা কাজ করিয়া ঐ কাযের দ্বিগুণ একটি কায কতদিনে সম্পন্ন করিতে পারিবে? (পুরুষ, স্ত্রীলোক এবং বালকের কাজের হার যথাক্রমে 3 : 2 : 1)

10. কোন্ বৃহত্তম সংখ্যা দ্বারা 148, 112 এবং 88-কে ভাগ করিলে প্রতিক্ষেত্রে একই ভাগশেষ থাকিবে?

11. B এবং C-এর বয়সের গড় A এবং B-এর বয়সের গড় অপেক্ষা 8 বৎসর বেশী। C, A অপেক্ষা কত বড়?

12. একটি স্টিমার স্রোতের অনুকূলে 4 ঘণ্টায় 90 কি. মি. যায় এবং $7\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় ফিরিয়া আসে। স্টিমারের ও স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

13. একটি পাত্রে জল-মিশ্রিত দুধ আছে। দুধ ও জলের অনুপাত 3 : 1. ঐ মিশ্রণের কত অংশ তুলিয়া লইয়া তৎপরিবর্তে জল মিশাইলে, দুধ ও জলের অনুপাত 1 : 1 হইবে।

14. A এবং B প্রত্যেকে বার্ষিক শতকরা $4\frac{1}{2}$ টাকা হিসাবে 3 বৎসরের জন্য 25600 টাকা ধার দিয়াছিল ; নির্দিষ্ট সময় অন্তে A সরল সুদে ও B চক্রবৃদ্ধি অনুসারে কত পাইয়াছিল ?

15. সরল কর : $\dfrac{\dfrac{\frac{3}{16}+\frac{121}{125}}{1-\frac{3}{16}\times\frac{121}{125}}-\frac{121}{125}}{1+\frac{121}{125}\left\{\dfrac{\frac{3}{16}+\frac{121}{125}}{1-\frac{3}{16}\times\frac{121}{125}}\right\}}\times 5\frac{1}{2}$ [D. B. 1941]

16. 1920 খৃষ্টাব্দের 22-শে এপ্রিল সম্পাদিত এবং 11 মাস অন্তে দেয় একখানি 28050 টাকার বিল 1921 খৃষ্টাব্দের 11-ই জানুয়ারী ভাঙ্গানো হইল। বার্ষিক সুদের হার 10% হইলে, ঐ বিলের প্রকৃত ব্যাজ ও ব্যাঙ্কের লাভের পরিমাণ নির্ণয় কর।
[C. U. 1941]

17. কোন পরীক্ষায় 72% ইংরেজীতে, 88% অঙ্কে এবং 64% উভয় বিষয়ে পাশ করিল। যদি উভয় বিষয়ে 7 জন ফেল করিয়া থাকে, তবে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত ?

18. এক জলপূর্ণ পুষ্করিণীর দৈর্ঘ্য 75 মিটার, প্রস্থ 50 মিটার এবং গভীরতা 3·6 মিটার। জল তুলিবার গাড়ীর প্রত্যেকখানির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ 1·6 মিটার এবং গভীরতা ·75 মিটার হইলে, ঐরূপ 16 খানা গাড়ী পূর্ণ করিয়া কতবার জল তুলিলে, ঐ পুষ্করিণীর জল 1·6 মিটার কমিয়া যাইবে ?

19. যদি ভারতবর্ষ ও ইংলণ্ডের মধ্যে বিনিময়ের হার টাকায় 1 শি. 6 পে. হয় এবং ইংলণ্ড ও আমেরিকার মধ্যে বিনিময়ের হার পাউণ্ডে 5 ডলার হয়, তবে ভারতবর্ষ ও আমেরিকার মধ্যে বিনিময়ের হার নির্ণয় কর।

20. P এবং Q নামক দুইটি স্থানের দূরত্ব 310 কি. মি.। যদি একটি ট্রেন রাত্রি 10-টা 30 মিনিটে P হইতে ছাড়িয়া পরদিন প্রাতে 5-টা 15 মিনিটে Q-তে পৌছায় এবং অপর একটি ট্রেন বেলা 1-টা 30 মিনিটে Q হইতে ছাড়িয়া রাত্রি 8-টায় P-তে পৌছায়, তাহা হইলে উহাদের গতির অনুপাত কিরূপ হইবে ?

21. শতকরা বার্ষিক 5 টাকা হার সুদে 10000 টাকার 3 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি সুদ কত টাকা হইবে ? [C. U. 1940

22. কোন, আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 15 একর এবং উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 3 : 2; ক্ষেত্রটি বেড়া দিয়া ঘিরিতে কত গজ বেড়ার দরকার হইবে ?

23. একই সময়ে দুইটি ট্রেন যথাক্রমে কলিকাতা হইতে মধুপুরের দিকে এবং মধুপুর হইতে কলিকাতার দিকে রওনা হইল। পথিমধ্যে মিলিত হইবার 1 ঘণ্টা ও 4 ঘণ্টা পরে তাহারা যথাক্রমে মধুপুর ও কলিকাতা পৌছিল। প্রমাণ কর যে, একটি ট্রেনের গতিবেগ অপরটির গতিবেগের দ্বিগুণ।

24. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. 101 এবং তাহাদের সমষ্টি 1212; সংখ্যাগুলি কত জোড়া এবং কি কি হইতে পারে, নির্ণয় কর।

25. A, B ও C একটি কার্য যথাক্রমে 6, 8 ও 10 দিনে করিতে পারে। তাহারা একত্রে কাযটি আরম্ভ করিবার 2 দিন পরে B এবং কার্যটি শেষ হইবার 1 দিন পূর্বে C কার্য ছাড়িয়া চলিয়া গেল। কার্যটি কতদিনে সমাধা হইয়াছিল ?

26. এক মুদী প্রতি কিলোগ্রাম 44 ন. প হিসাবে 10 কুইণ্ট্যাল্ চাউলের সহিত প্রতি কিলোগ্রাম 45 ন প. হিসাবে 4 কুইণ্ট্যাল্ চাউল মিশ্রিত করিয়া, সমস্ত চাউল প্রতি কুইণ্ট্যাল্ কত দরে বিক্রয় করিলে তাহার 10% লাভ হইবে ?

27. 4 মিটার বর্গ একটি ঘরের মেঝের উপর একটি পাত্রে 1 হেক্টোলিটার জল ছিল। হঠাৎ পাত্রটি উল্টাইয়া সমস্ত জল মেঝেতে সমানভাবে ছড়াইয়া পড়িল। মেঝের উপর জলের উচ্চতা কত ?

28. কোন পরীক্ষায় মোট নম্বরের 25% পাওয়ায় একজন পরীক্ষার্থী 80 নম্বরের জন্য ফেল করিল। অপর একজন পরীক্ষার্থী 35% নম্বর পাইয়া পাশ-নম্বর অপেক্ষা 10 নম্বর অধিক পাইল। ঐ পরীক্ষায় পাশ-নম্বর কত ?

29. 3 গ্যালন ধরে এইরূপ একটি এবং 5 গ্যালন ধরে এইরূপ একটি পাত্র জল-মিশ্রিত সিরাপে পরিপূর্ণ। ছোটটিতে 25% সিরাপ এবং বড়টিতে 25% জল বর্তমান। ঐ দুই প্রকার সিরাপ, 9 গ্যালন ধরে এমন একটি পাত্রে, নিঃশেষে ঢালিয়া পাত্রটি জলদ্বারা পূর্ণ করা হইল। এই পাত্রে সিরাপ ও জলের অনুপাত কত ?

30. কোন স্কুলের মোট খরচের এক অংশ নির্দিষ্ট এবং বাকি অংশ ছাত্রসংখ্যার হ্রাস-বৃদ্ধিতে হ্রাস-বৃদ্ধি হইয়া থাকে। ঐ স্কুলে ছাত্রসংখ্যা যখন 105, তখন মোট খরচ 650 টাকা এবং ছাত্রসংখ্যা যখন 128, তখন মোট খরচ 742 টাকা। ঐ স্কুলের ছাত্রসংখ্যা 115 হইলে উহার মোট খরচ কত হইবে ? মোট খরচ 710 টাকা হইলে, ছাত্রসংখ্যা কত হইবে ?

31. দুইটি সংখ্যার গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে শেষ ভাজক 49, এবং ভাগফলগুলি যথাক্রমে 17, 3 ও 2 পাওয়া গেল। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

32. যদি 80-টি বন্দুক হইতে প্রতি 10 মিনিটে 5 বার গুলি ছুঁড়িয়া $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় 400 লোক হত্যা করা যায়, তবে কতগুলি বন্দুক হইতে প্রতি 15 মিনিটে 9 বার গুলি ছুঁড়িয়া $1\frac{1}{4}$ ঘণ্টায় 1080 লোক হত্যা করা যাইবে ?

33. বৃত্তের পরিধির সহিত উহার ব্যাসের অনুপাত 3·1416 : 1 হইলে, যে বৃত্তের পরিধি 357 মিটার, তাহার ব্যাস কত ?

34. এক ব্যক্তি প্রতি টাকায় 12·5 ন. প. আয়কর দেওয়ার পর বৎসরে আয় হইল 5600 টাকা। ঐ ব্যক্তির মোট আয় কত ?

35. 13 টাকা কিলোগ্রাম দরের 9 কি. গ্রা. তামার সহিত 8 টাকা কিলোগ্রাম দরের কত কিলোগ্রাম দস্তা মিশ্রিত করিলে এতদুৎপন্ন পিত্তলের কিলোগ্রাম 12 টাকা দরে বিক্রয় করিয়া ক্রয়মূল্যের $9\cdot\dot{0}\dot{9}\%$ লাভ হইবে ?

36. আয়তাকার একটি চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য, উহার প্রস্থের 3 গুণ এবং উহার গভীরতা 3 মিটার। চৌবাচ্চায় যদি 81000 লিটার জল ধরে, তবে ঐ চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য কত ডেসিমিটার ? [C. U. 1942]

37. একটি পাত্রের জল-মিশ্রিত দুধে জল ও দুধের অনুপাত 2 : 7 এবং অপর একটি পাত্রের জল-মিশ্রিত দুধে জল ও দুধের অনুপাত 2 : 9; এই দুই পাত্র হইতে কি পরিমাণ জল-মিশ্রিত দুধ লইয়া মিশাইলে সেই জল-মিশ্রিত দুধে জল ও দুধের অনুপাত 1 : 4 হইবে ? [C. U. 1944]

38. যদি 147 টাকা 48 ডলারের সমান হয় এবং 36 ডলার 7 গিনির সমান হয়, তবে ইংলণ্ডীয় মুদ্রাতে 1 টাকার মূল্য কত ?

39. কোন বৎসরের 1-লা জানুয়ারী A 1000 টাকা মূলধন লইয়া একটি ব্যবসা আরম্ভ করিল। 3 মাস পরে A, B-কে অংশীদার করিল। বৎসরের শেষে লভ্যাংশ সমান পাইতে হইলে, B-এর কত টাকা ব্যবসায়ে দিতে হইবে ?

40. একজন ব্যবসায়ী যে জিনিসের মূল্য 500 টাকা, তাহা 3 মাস পরে দেয় 566·50 টাকায় বিক্রয় করিল। বার্ষিক 12% হার সুদে, তাহার শতকরা লাভ কত ?

41. 5 মাস পরে টাকা পাওয়া যাইবে বলিয়া 12-ই সেপ্টেম্বর টা. 5018·75-এর একখানি হুণ্ডি লেখা হইল। যদি হুণ্ডির টাকা 16-ই জানুয়ারী লওয়া যায়, তবে শতকরা 4 টাকা হার সুদে তাহার কত ব্যাজ বাদ যাইবে ?

42. একটি বানর একটি তৈলাক্ত বাঁশে প্রতি মিনিটে 4 মিটার উঠে এবং তাহার পরের মিনিটে $1\frac{3}{8}$ মিটার পিছলাইয়া পড়িয়া যায়। যদি বাঁশটি 28 মিটার উচ্চ হয়, তবে কতক্ষণে বানর বাঁশের মাথায় উঠিতে পারিবে?

43. 60 টাকা মূল্যে কোন দ্রব্য ক্রয় করিয়া উহার $\frac{1}{3}$ অংশ $6\frac{1}{4}\%$ ক্ষতিতে বিক্রয় করা হইল। মোটের উপর $6\frac{1}{4}\%$ লাভ করিতে হইলে অবশিষ্টাংশের বিক্রয়মূল্য শতকরা কত বাড়াইতে হইবে?

44. যখন টাকায় 3 কি.গ্রা. চাউল, তখন একটি পরিবারের মাসিক সংসার-খরচ 160 টাকা; যখন টাকায় $3\frac{3}{4}$ কি.গ্রা. চাউল, তখন খরচ হয় 154 টাকা। অন্যান্য খরচ সমান থাকিলে যখন টাকায় $4\frac{1}{2}$ কি.গ্রা. চাউল, তখন সংসার-খরচ কত হইবে?

45. জল অপেক্ষা স্বর্ণ 19 গুণ এবং তাম্র 9 গুণ ভারী। কি অনুপাতে এই দুই ধাতু মিশাইলে সঙ্কর ধাতুখণ্ডটি জল অপেক্ষা 15 গুণ ভারী হইবে?

46. সরল কর : $\frac{\cdot\dot{4}2857\dot{1}+\cdot\dot{5}7142\dot{8}}{\cdot\dot{2}8571\dot{4}+\cdot\dot{7}1428\dot{5}}+\left(37+\frac{3\cdot7\dot{0}3\dot{7}}{100}\right)\times\cdot27$

47. 8 জন লোকের এক পরিবারে 2 জন অতিরিক্ত লোক আসাতে মাসিক খাওয়া-খরচ 10 টাকা বেশী লাগিল; কিন্তু জনপ্রতি খাওয়া খরচ 2 টাকা কমিয়া গেল। পূর্বে ঐ পরিবারের মাসিক খাওয়া-খরচ কত ছিল?

48. কোন পরীক্ষায় কোন এক ক্লাসের একটি ছাত্র এক বিষয়ে 17 নম্বর পাইয়াছিল। ভুলক্রমে নম্বর-বহিতে উহাকে 71 লেখায়, ঐ ক্লাসের ছাত্রদের নম্বরের গড় 35·5 হইল। ঐ ক্লাসের ছাত্রসংখ্যা 27 হইলে, ছাত্রদের শুদ্ধ গড়-নম্বর কত?

49. একটি কায সমাধা করিতে A, B ও C-কে নিযুক্ত করা হইল। তাহারা একত্রে 8 দিনে, A ও C একত্রে 12 দিনে এবং A ও B একত্রে 13 দিন 8 ঘণ্টায় কার্যটি সমাধা করিতে পারে। দেখাও যে ঐ কাযের মজুরী A, B ও C-এর মধ্যে 4 : 5 : 6 অনুপাতে বণ্টিত হইবে।

50. 5 কি.গ্রা. ওজনের একতাল তামা-মিশ্রিত কাঁসার মূল্য 51 টাকা। তামা ও কাঁসার অনুপাত উল্টাইয়া দিলে ঐ মূল্য আরও 3 টাকা বাড়িয়া যায়। প্রতি কিলোগ্রাম কাঁসার মূল্য 15 টাকা হইলে, প্রথমে তামা ও কাঁসার পরিমাণ কত ছিল?

*51. যদি 1 জন পুরুষ, 1 জন স্ত্রীলোক ও 1 জন বালকের কাজের অনুপাত 5 : 3 : 2 হয়, তবে 5 জন পুরুষ, 4 জন স্ত্রীলোক ও 3 জন বালক যে কাজ 50 দিনে করিতে পারে, তাহার তিনগুণ কাজ 19 জন পুরুষ, 20 জন স্ত্রীলোক এবং 30 জন বালক কতদিনে করিতে পারিবে?

পাটীগণিত

উত্তরমালা

(নবম শ্রেণী)

প্রশ্নমালা 1 (পৃঃ 5—6)

1.	$3\frac{1}{3}$	2.	$\frac{5}{9}$	3.	$\frac{14}{81}$	4.	$\frac{1}{2}$
5.	$\frac{5}{12}$	6.	$1\frac{3}{4}$	7.	4	8.	99000
9.	1	10.	$\frac{1}{24}$	11.	4 টা. 74 ন.প.	12.	75
13.	$\frac{1}{2}$	14.	0	15.	3	16.	$1\frac{79}{81}$
17.	$\frac{11}{16}$	18.	$\frac{5}{12}$	19.	1	20.	101

21. 1 কি.মি. 125 মি. 22. 164 গ্যালন 23. 24 কি. গ্রা.

24. 600 টাকা 25. 5040 টাকা

26. A—237 টা. 60 ন. প , B—118 টা. 80 ন.প., C—89 টা. 10 ন.প

27. কাপড়—7 টা. 42 ন প , জামা—12 টা. 72 ন.প., জুতা—5 টা. 30 ন.প

28. 6টি 29. 26 30. $\frac{2}{315}$; 24

প্রশ্নমালা 2 (পৃঃ 13—14)

1.	100	2.	2·202642	3.	2	4.	125
5.	1	6.	$1\cdot\dot{7}9487\dot{1}$	7.	25	8.	1
9.	11·221875	10.	1	11.	$\cdot\dot{1}$	12.	1
13.	1	14.	2	15.	·03	16.	14
17.	·12 মিটার	18	14·4 মি.	19.	8 দিন	20.	1500
21.	9855 টাকা	22.	$\cdot\dot{7}1428\dot{5}$	23	$\cdot0002\dot{7}$	24.	·15625
25.	·625	26.	·25	27.	·035	28.	$\cdot0\dot{1}\dot{8}$

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 16)

1.	84	2.	105	3.	11	4.	246016
5.	900	6.	28 টাকা	7.	123	8.	18

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 18—19)

1.	113	2.	1679	3.	7564	4.	13579
5.	37·96	6.	86·42	7.	31·052	8	·2836
9.	$\frac{15}{28}$	10	$10\frac{13}{27}$	11	$3\frac{1}{7}$	12	9·953
13	1·0000	14.	76	15	28	16.	27
17.	100489	18.	124	19	61	20.	16 ; টা. 5·60

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 2`—24)

1.	2809 ব মি	2.	21 মি, 7 মি.	3.	480
4.	39 মি.	5	(i) 72 মি, 48 মি (ii) 360 টাকা		
6.	8 মি	7	$8\frac{1}{3}$ মি	8	610 টাকা
9.	2·962 মি	10	24 মি, 12 মি	11	$3\frac{1}{3}$ মি.
12.	3·2 মি.	13	টা 10·55	14	টা 666·75
15.	282 টাকা	16	3312 টাকা, 2190 টাকা		

প্রশ্নমালা 6 (পৃঃ 26—27)

1.	4 মি	2	72 ব মি	3	12 মি, 8 মি.
4.	64	5	270 টাকা	6	56 সে মি ; 28 সে.মি
7.	1 সে মি.	8.	40608	9	303 স্টেয়ার
10.	5 সে মি	11	1·009152 স্টেযার, 1020·6144 কি গ্রা.		

12. 43200 (প্রশ্নে '5 মিটাব পুরু' স্থলে '5 মিটার পুরু' হইবে।)

প্রশ্নমালা 7 (পৃঃ 30—32)

1.	25	2	টা. 37·50	3	6 টাকা	4	10
5.	$156\frac{1}{4}$	6.	16	7	56	8	500
9.	$5\frac{5}{11}$	10.	টা. 760·50	11	18	12	[illegible]
13.	180	14	12	15.	3		

প্রশ্নমালা 8 (পৃঃ 35—36)

1.	3	2.	$2\frac{1}{2}$ ঘ.	3.	10	4.	30
5.	6	6.	A—30, B—90				
7.	A—16, B—48, C—24			8.	76	9.	30
10.	24 ঘ.	11.	$3\frac{9}{25}$ ঘ.	12.	56 দি. 16 ঘ.	13.	9
14.	12	15.	3 ঘ. 55 মি.	16.	$12\frac{18}{19}$ মি.		

প্রশ্নমালা 9 (পৃঃ 44—45)

1. 3 ঘ. 2. 600 কি. মি. 3. সকাল 8টা 15 মিনিট
4. 240 5. 3 ঘ. 45 মি. 6. 3 সে.
7. 150 মি. ; ঘণ্টায় 60 কি. মি. 8. (i) 2 ঘ. (ii) $17\frac{1}{7}$ মি.
9. সকাল 9টা 15 মিনিট 10. $4\frac{23}{44}$ সে.
11. (i) 4 কি মি. $693\frac{1}{3}$ মি. (ii) $7\frac{1}{2}$ মি.
12. (i) 39 মি , (ii) 5 ঘ. 13 মি., (iii) 5
13. $4\frac{4}{9}$ কি. মি. ; $2\frac{2}{9}$ কি. মি. 14. 3 কি. মি
15. 9 মি. $34\frac{34}{179}$ সে. 16. 1 ঘ. 30 মি.

প্রশ্নমালা 10 (পৃঃ 49—51)

1. $29\frac{7}{17}$ 2. 2000 3. 15 4. 1400
5. 20 6. 120 7. 88 8. 8
9. 450 10. 400 টাকা 11. 18522 12. $16\frac{7}{23}$%
13. 800 14. 5400 15. $42\frac{6}{7}$ 16. $16\frac{2}{3}$
17. 50 কি. গ্রা. 18. 2 টা. 50 ন. প. 19. (i) টাকায় 24-টি,
(ii) টাকায় 27-টি 20. পুরুষ—7500, স্ত্রী—12500

প্রশ্নমালা 11 (পৃঃ 52—53)

1. 120 টাকা ; 620 টাকা 2. 446 টাকা ; 1333 টাকা 3. 504 টাকা
4. 1830 টাকা 5 84 টাকা 6. টা. 55·78 (প্রায়)
7. টা. 1·50 8. টা. 1470·30 .

প্রশ্নমালা 12 (পৃঃ 54—55)

1. 600 টাকা 2. 9000 টাকা 2. 378 টাকা 4. টা. 281·25
5. 24000 টাকা 6. টা. 161·50 7 555 টাকা 8. 5050 টাকা

প্রশ্নমালা 13 (পৃঃ 55—56)

1. 4 টাকা 2. 3 টাকা 3. 5 টাকা 4. 8 টাকা
5. 800 টাকা ; টা. 7·50

প্রশ্নমালা 14 (পৃ: 57)

1. 146 দিন   2. 8 ব. 4 মা.   3. 6 বৎসর   4. 40 বৎসর
5. 7 ব. 6 মা.

প্রশ্নমালা 15 (পৃ: 58—59)

1. 320 টাকা   2. 4 টাকা   3. 550 টাকা , 5 টাকা
4. 25 বৎসর   5. 510 টাকা   6. B—5 টাকা , C—$5\frac{1}{2}$ টাকা
7. B—1600 টাকা ; C—2400 টাকা   8. 5 টা. 75 ন প.
9 10 বৎসর   10 300 টাকা   11. 10 বৎসর
12 $235\frac{5}{17}$ টাকা   13. টা. 1026·25   14. টা. 2·40

প্রশ্নমালা 16 (পৃ: 62)

1. (i) 57 (ii) 1·27 (iii) ·42   2. (i) ·353 (ii) 158 (iii) ·524
3. (i) 19·0519 (ii) ·0431 (iii) ·0151 (iv) 43 4783
4. (i) 10·305, 10·30486 (ii) ·10305 ; 10305
(iii) ·0010305 ; ·00103   5. 3·14159
6. (i) আসন্নমান = 3·18, প্রকৃত ভুল = 0025, আপেক্ষিক ভুল = ·00078···, শতকরা ভুল = ·078······, (ii) আসন্নমান = 5714, প্রকৃত ভুল = ·000028, আপেক্ষিক ভুল = ·000049···, শতকরা ভুল = 0049···

প্রশ্নমালা 17 (পৃ: 66—67)

1. টা. 20·50   2. টা. 78·81 (আসন্ন)   3 টা 124·86 (আসন্ন)
4. টা. 624·32   5. টা. 191·02 (আসন্ন)   6 টা. 12550·88 (আসন্ন)
7. টা. 1157·63 (আসন্ন)   8. টা 1586·87 (আসন্ন)
9. টা. 1940·26 (আসন্ন)   10. 595508 টাকা
11. টা. 336·41 (আসন্ন)   12 টা. 50 95   13. টা. 20·61 (আসন্ন)
14. 5324   15. 3655808   16. টা. 7·63 (আসন্ন)
17. টা. 77·53   18. টা. 2·90   19 A ; 63 ন. প (আসন্ন)   20. 900 টাকা

প্রশ্নমালা 18 (পৃ: 71—73)

1. টা. 94·50   2. 25 টাকা   3. 150 টাকা   4. 5 টাকা
5. 12 টা. 50 ন প.   6. $12\frac{1}{2}$ টাকা লাভ   7. 80 টাকা
8. 25 টাকা (প্রশ্নে '25%' স্থলে '26%' হইবে)   9. 44 টাকা

10. $2\frac{2}{459}$ টাকা ক্ষতি   11. 2 টাকা লাভ   12. 125 টাকা ; 30 টাকা
13. $33\frac{1}{3}$ 14. $49\frac{23}{37}$ টাকা   15. 800 টাকা
16. $1\frac{1}{3}$ টাকা   17. 4600 টাকা   18. 4% ক্ষতি
19. 21%   20. 25 টাকা ক্ষতি   21. 200 টাকা   22. 235 টাকা
23. 5%   24. 1000 টাকা   25. 200 টাকা   26. 400 টাকা

প্রশ্নমালা 19 (পৃঃ 80—82)

1. 12 পা. 13. শি. 2 পে.   2. $\frac{5}{12}$ 3. 641 পা. 13 শি. 4 পে.
4. 5 দিন   5. 3 ট. 7 হ. 3 কো. 22 পা.
6. 9 ফ্রা. 13 সে.   7. 3135   8. $165\frac{15}{26}$ টাকা
9. $\frac{1}{576}$ 10. $3\frac{3}{4}$ মাইল   11. 4 শি. 8 পে.
12. 12 শি. $1\frac{5}{6}$ পে.   13. $3\frac{3}{4}$%   14. 1 পা. 13 শি. $10\frac{4}{5}$ পে.
15. 800 পাউণ্ড   16. $28\frac{1}{4}$%
17. প্রতি ক্ষেত্রে 667 পা. 10 শি.   18. $2\frac{13}{288}$ ফুট
19. $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টা   20. ঘণ্টায় $5\frac{3}{5}$ মাইল
21. $11\frac{35}{41}$ 22. 1105   23. 132 গজ
24. A—2 পা., B—1 পা. 13 শি. 4 পে., C—2 পা. 10 শি.
25. 24 ডলার   26. পা. 589·947 (আসন্ন)
27. $\frac{323}{1960}$ ইঞ্চি   28. 6 গজ   29. 606 পাউণ্ড
30. $14\frac{31}{46}$ পাউণ্ড   31. 150 গজ   32. $\cdot0\dot{3}\dot{6}$

(দশম শ্রেণী)

প্রশ্নমালা 1 (পৃঃ 88—90)

1. 4 : 7   2. 1 : 6   3. 1 : 8   4. 3 : 5, 8 : 13, 5 : 8 (ছোট হইতে বড়)   5. 3 : 7, 1·36 : 2·48, $4\frac{1}{2}$: $6\frac{3}{4}$ (ছোট হইতে বড়)   6 3 : 64   7. 9 : 16   8. 18 : 5
9. 40 : 21   10. 90 : 91   11. 112   12. 72
13. 5   14. 10   15. 7   16. 30
17. 3·2   18. $1\frac{1}{2}$ 19. ·16875   20. 6

21.	$3\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$	22.	$12 : 22\frac{1}{2}$	23.	18 মিটার	24.	4 লিটার
25.	A—605 টাকা, B—810 টাকা, C—1015 টাকা					26.	35
27.	16 : 15	28.	A—84 ব., B—57 ব , C—39 ব.				
29.	4 : 5	30.	85 এবং 68				

প্রশ্নমালা 2 (পৃঃ 93—94)

1.	240 দিন	2.	12 দিন	3.	$2\frac{1}{4}$ দিন	4.	$1\frac{4}{5}$ দিন
5.	টা. 4700·16	6.	60 দিন	7.	3000	8.	200 দিন
9.	60 দিন	10.	18 জন	11.	33200 লোক	12.	8 দিন
13.	$9\frac{9}{13}$ ঘণ্টা	14.	12800 জন	15.	20 দিন	16.	8320 জন
17.	75 দিন						

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 96—97)

1.	6 দিন	2.	20 দিন	3.	10 ঘণ্টা	4.	10টি
5.	$15\frac{5}{8}$ দিন	6.	15 জন	7.	440 কি. মি.	8.	55 কি. মি.
9.	68 জন	10.	20 দিন	11.	$7\frac{1}{7}$ ঘণ্টা	12.	270 জন
13.	12 দিন	14.	$10\frac{10}{11}$ দিন				

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 99—100)

1. সোরা—$7\frac{1}{2}$ কি. গ্রা., গন্ধক—1 কি. গ্রা., কয়লা—$1\frac{1}{2}$ কি. গ্রা.

2. A—4936 টাকা, B—7404 টাকা, C—12340 টাকা

3. A—720 টাকা, B—120 টাকা, C—120 টাকা   4. 2250 টাকা

5. 'টাকা'—90টি, '50 ন. প.'—120টি, '25 ন. প.'—150টি

6. প্রথম অংশ—5 কি. মি 180 মি , দ্বিতীয় অংশ—5 কি. মি. 328 মি., তৃতীয় অংশ—5 কি. মি. 439 মি.   7. প্রত্যেক পুরুষ—60 টাকা, প্রত্যেক স্ত্রীলোক—40 টাকা, প্রত্যেক বালক—15 টাকা   8. 2

9. 5904 টাকা, 1476 টাকা, 492 টাকা

10. A—348 টাকা, B—290 টাকা, C—232 টাকা

11. 'টাকা'—30-টি, '50 ন. প.'—90-টি, '25 ন. প.'—300-টি

12. A—800 এর, B—500 এর, C—300 এর ।

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 102—103)

1. A—195 টাকা, B—150 টাকা, C—210 টাকা
2. A—2250 টাকা, B—1500 টাকা, C—750 টাকা
3. A—160 টাকা, B—240 টাকা, C—600 টাকা
4. A—48 টাকা, B—36 টাকা, C—636 টাকা
5. A—টা. 32·50, B—টা. 29·25
6. A—7 টাকা, B—6 টাকা, C—টা. 4·50
7. A—288 টাকা, B—270 টাকা, C—216 টাকা, D—126 টাকা
8. A—230 টাকা, B—300 টাকা 9. B—42 টাকা, C—56 টাকা
10. 736 টাকা

প্রশ্নমালা 6 (পৃঃ 106—107)

1. 3 : 4 2. 5 : 1
3. প্রথম প্রকার—420 কুইন্ট্যাল, দ্বিতীয় প্রকার—180 কুইন্ট্যাল
4. 14 লিটার 5. 72 লিটার 6. $\frac{1}{8}$ কিলোগ্রাম 7. 9 : 11
8 $\frac{3}{4}$ অংশ, প্রতিবার $\frac{1}{4}$ অংশ 10. 10 কিলোগ্রাম 11. 45 লিটার
12 $\frac{127}{176}$ গ্রাম 13. 512 : 217 14. 1 : 1 : 5

প্রশ্নমালা 7 (পৃঃ 109—110)

1. টা. 263·25 2. 655 টাকা 3. 1200 টাকা 4. টা. 2132·75
5. টা. 7713·90 6. 1480 টাকা 7. 2 ন. প. 8. 5000 টাকা
9. 512 টাকা 10. 23632 টা. 81·25 ন. প.

প্রশ্নমালা 8 (পৃঃ 110—111)

1. $4\frac{4}{7}$ টাকা 2. 100 কি. গ্রা. 3. 408 দিন
4. 32 ঘণ্টা 5. 300 টাকা 6. 440 টাকা

প্রশ্নমালা 9 (পৃঃ 114)

1. 6705 পা. 14 শি. 7 পে. 2. 12 টা. 80 ন.প. ; $133\frac{1}{3}$ টাকা লাভ
3. 2 পা. 10 শি. 4. 112 পা. 10 শি.
5. 1 পাউণ্ড = 15 টা. 62·5 ন.প. 6. 1 টাকা = 1 শি. 8 পে.
7. 20 পাউণ্ড বা 270 টাকা 8. 1920 মার্ক 9. টা. 1·95

প্রশ্নমালা 10 (পৃঃ 122)

1. 8 টা. 12·5 ন.প. 2. 4 টা. 42·5 ন.প. 3. 14 টা. 72·5 ন.প.
4. 1 টা. 97 ন.প. 5. 2499 টাকা 6. 247 টা. 50 ন.প.
7. 16 টা. 50 ন.প. 8. 10 ন.প. 9. 4% 10. 10%

প্রশ্নমালা 11 (পৃঃ 125—127)

1. 304·8 সে. মি. 2. 12 বর্গগজ 3. 102 গজ
4. 2·47 গজ 5. 20 কি. মি. 908 মি. 80 সে. মি.
6. 251 গ্রাম 7. 97 টাকা 8. 20·40 ব. মি.
9. 289·28 বর্গগজ 10. ·3245 গ্রেন 11. 453·072 লিটার
12. 28·350 গ্রাম 13. 4545·45 ঘন সে. মি. 14. 6·15 ফুট (আসন্ন)
15. 10 পাউণ্ড 16. 2000 ঘন সে. মি. 17. 11·101 পাউণ্ড
18. 51181 টাকা 19. 1 ঘ. 25 মি. 20 সে. 20. 15499969
21. 196678773 ব. ফু. 22. 68·6232 কি. মি. (আসন্ন)
23. 1 শি. 11 পে. 1 ফা. 24. ইংলণ্ড : ফ্রান্স = 1·09 : 1 (আসন্ন)
25. 2% ক্ষতি

প্রশ্নমালা 12 (পৃঃ 127—132)

1. 4 2. 1120 3. 300 টাকা 4. A—102 টাকা, B—104 টাকা, C—78 টাকা 5. 34 দিন 6. 1 : 2
7. 1120 টাকা 8. $44\frac{4}{9}$% 9. $46\frac{2}{3}$ দিন 10. 12
11. 16 বৎসর 12. স্টিমার—ঘণ্টায় $17\frac{1}{4}$ কি. মি., স্রোত—ঘণ্টায় $5\frac{1}{4}$ কি. মি.
13. $\frac{1}{3}$ অংশ 14. A—3456 টাকা, B—টা. 3613·85 15. 1
16. 550 টাকা, 11 টাকা 17. 175 18. 187·5 বার
19. 1 ডলার = $2\frac{2}{3}$ টাকা 20. 26 : 27 21. টা. 1576·25
22. 1100 গজ 24. 101, 1111 ; 505, 707 25. $3\frac{3}{16}$ দিন
26. টা. 48·71 27. $\frac{5}{8}$ সে. মি. 28. 305
29. 15 : 1 30. 690 টাকা ; 120 জন 31. 5929, 343
32. 216 33. 113·63 লিটার 34. 6400 টাকা 35. 6 কি. গ্রা.
36. 90 ডেসি. মি. 37. 9 : 11 38. 1 শি. 4 পে.
39. $2133\frac{1}{3}$ টাকা 40. 10% 41. টা. 16·50 42. 22 মি. 35 সে.
43. 20% 44. 150 টাকা 45. 3 : 2 46. 11
47. 120 টাকা 48. 33·5 49. 50. 8 : 7 51. 30 দিন

রাশি-বিজ্ঞান

রাশি-বিজ্ঞান

প্রথম অধ্যায়

রাশি-বিজ্ঞান—উহার অর্থ ও ব্যবহার

(Statistics—Its meaning and uses)

1·1. রাশিবিজ্ঞানের অর্থ (The meaning of the Science of Statistics) : অষ্টাদশ শতাব্দীর কোন এক সময়ে Statistics কথাটি প্রথম গণিতশাস্ত্রে ব্যবহৃত হয়। Status (অর্থাৎ রাষ্ট্র বা রাষ্ট্র-সম্বন্ধীয়)—এই Latin শব্দ হইতে ইহার উৎপত্তি। এই কথাটির তৎকালীন প্রচলিত অর্থ ছিল—কোন রাষ্ট্র বা সেই রাষ্ট্রভুক্ত জনগণ সম্বন্ধীয় তথ্যাবলীর সংগ্রহ এবং সেগুলিকে সুবিন্যস্ত ও সুশৃঙ্খলীভূত করা। বর্তমানে এই শব্দটি যুগ-পরিবর্তনের সংগে ব্যাপকতর অর্থ গ্রহণ করিয়াছে। অনেক সময় Statistics শব্দটি অর্থবোধে একবচন ও বহুবচনে ব্যবহৃত হয়। বহুবচনে ইহার অর্থ পরিসংখ্যান,—অর্থাৎ সংখ্যাগত তথ্যাবলীর সংগ্রহ, শ্রেণীবিন্যাস ও ছকবিন্যাস ; এবং একবচনে ইহাকে রাশি-বিজ্ঞান বলিয়া অভিহিত করা হয়, অর্থাৎ সংখ্যাগত তথ্যাবলীর সংগ্রহ ও বিশ্লেষণের বিভিন্ন প্রক্রিয়া। যাহাই হউক-না-কেন, যে-কোন সংখ্যাবদ্ধ তথ্যাবলীর একত্রীকরণ (যেমন, জন্মহার, মৃত্যুহার, দুর্ঘটনা ইত্যাদির পরিসংখ্যান) এবং সেইগুলির পরিমাপ, শ্রেণীবিন্যাস, ছকবিন্যাস ও বিশ্লেষণকে রাশি-বিজ্ঞানের সীমায় আনা যাইতে পারে।

কোন একটি বিশেষ সংখ্যা অথবা কয়েকটি সংখ্যা যতই গুরুত্বপূর্ণ হউক-না-কেন, কখনই সত্যিকারের পরিসংখ্যানের তথ্য হিসাবে পরিগণিত হইতে পারে না। রাশি-বিজ্ঞানকে অতীব প্রয়োজনীয় গণনাসহায়ক যন্ত্র হিসাবে ব্যবহার করিতে হইলে যুগপৎ বহু ঘটনার সমাবেশকে অবশ্যই বিচার করিতে হইবে।

কলিকাতা মহানগরীতে কোন একদিন কোন এক ব্যক্তির মৃত্যুকে পরিসংখ্যানের তথ্য বলা যাইতে পারে না ; কিন্তু ভারতবর্ষে একদিনে সমগ্র মৃতব্যক্তির সংখ্যা পরিসংখ্যানের আওতায় পড়িবে।

1·2 রাশি-বিজ্ঞানের উদ্দেশ্য ও প্রয়োজনীয়তা (Object & Scope of Statistics) : রাশি-বিজ্ঞানের প্রধানতম উদ্দেশ্য হইল সুগম্য ও অধিকতর সহজবোধ্য উপায়ে পরিসংখ্যানের সংখ্যাবদ্ধ তথ্যাবলীকে বিশ্লেষণ করা। কেবলমাত্র আমাদের কৌতূহল চরিতার্থ করাই পরিসংখ্যানের উদ্দেশ্য নহে, পরিসংখ্যান বিশুদ্ধ সিদ্ধান্তে উপনীত হইবার শ্রেষ্ঠ সহায়ক এবং এই সিদ্ধান্তসমূহ সর্বদাই পূর্বনিরূপিত গণনাবলীর সহিত তুলনামূলকভাবে উপস্থাপিত করা হয়। যথাযথ শ্রেণীবিন্যাস ব্যতীত এক বৃহৎ সংখ্যক সংখ্যার একমাত্র সংগ্রহ মূলতঃ অপ্রয়োজনীয় এবং তাহা পরিসংখ্যান নহে। পরিসংখ্যান সংখ্যাবদ্ধ তথ্যাবলীকে সরল ও শ্রেণীবদ্ধ করিয়া সেগুলিকে এমনভাবে উপস্থাপিত করে, যাহাতে অন্যান্য তুল্যসংখ্যাবদ্ধ তথ্যাবলীর সহিত তুলনা করিয়া এইগুলির পারস্পরিক সম্বন্ধ নির্ণয় করা যাইতে পারে। বর্তমান সমাজগঠনে এই কারণে রাশি-বিজ্ঞান অপরিহার্য হইয়া উঠিয়াছে। উদাহরণস্বরূপ, ভারতের নিরক্ষরতার কথা ধরা যাউক। প্রতি দশবৎসর অন্তর আদমসুমারীর (Census) বিবরণী হইতে আমরা ভারতের বিভিন্ন প্রদেশের নিরক্ষরতার মান জানিতে পারি এবং উহা হইতে সহজেই বর্তমানে দেশের শিক্ষার ক্রমাগত উন্নতি লক্ষ্য করা যাইবে।

রাষ্ট্রনৈতিক কারণে এবং বিবিধ সমস্যা সমাধানকল্পে সরকারকে পরিসংখ্যানের উপর বিশেষভাবে নির্ভর করিতে হয়। খাদ্যশস্য আমদানীর ব্যাপারে সরকারকে পরিসংখ্যানের দ্বারা দেশে খাদ্যশস্য উৎপাদনের পরিমাণ এবং সামগ্রিক খাদ্য-প্রয়োজনীয়তার কথা জানিতে হয়। বিভিন্ন সংস্থায় তাহাদের নীতি নির্ধারণের ব্যাপারে পরিসংখ্যানের সাহায্য লইতে হয়। জাতীয় আয়, লোকসংখ্যা, প্রাকৃতিক অর্থ-সম্পদ ইত্যাদি বিষয়ে যথেষ্ট অবহিত হওয়ার জন্য আমাদের রাশি-বিজ্ঞান সম্বন্ধে প্রভূত জ্ঞানসঞ্চয় করিতে হয়। ইহার সাহায্যে আমাদের মানসিক দৃষ্টিভঙ্গীর যথেষ্ট প্রসার ঘটিয়াছে। আজকাল মানবজীবনের সর্বক্ষেত্রে রাশি-বিজ্ঞানের উপযোগিতা দিন দিন বাড়িয়া যাইতেছে।

বিভিন্ন পরিকল্পনা (Planning), ব্যবসায় (Commerce), কৃষি (Agri-culture), শিল্প (Industry), বাণিজ্য (Trade), শিক্ষা ও মনোবিজ্ঞান (Education & Psychology) প্রভৃতি বহুমুখী সমস্যা সমাধানে এবং উন্নতি-সাধনের জন্য পরিসংখ্যানের প্রয়োজনীয়তা অপরিহার্য হইয়া উঠিয়াছে।

দ্বিতীয় অধ্যায়

তথ্যসংগ্রহ, শ্রেণীবিন্যাস ও ছকবিন্যাস

(Collection of data, Classification and Tabulation)

2·1. পূর্বের আলোচনা হইতে ইহা সুস্পষ্ট যে, সংগৃহীত তথ্যাবলীই পরিসংখ্যানের মুখ্য উপাদান। মোটামুটিভাবে পরিসংখ্যানের সমগ্র কার্যাবলীকে নিম্নলিখিত তিনটি অংশে ভাগ করা যাইতে পারে :—

(a) তথ্যসংগ্রহ (Collection of data)

(b) ঐগুলির শ্রেণীবিন্যাস ও ছকবিন্যাস (Classification & Tabulation)

এবং (c) ঐগুলির বিশ্লেষণ (Analysis of the data)

তথ্যসংগ্রহের কাজ আরম্ভ করিবার পূর্বে কয়েকটি প্রাথমিক বিষয় অবশ্যই সুবিবেচনা করিতে হইবে ; যদিও ঐ সমস্ত বিষয় সাধারণজ্ঞানপ্রসূত, তবুও উহাদিগকে বাদ দিয়া পরিসংখ্যানগত তথ্যের উপর নির্ভর করা যায় না। প্রথমটি অনুসন্ধানের উদ্দেশ্য সহজবোধ্য ও স্পষ্ট হওয়া এবং তথ্যসংগ্রহের সুষ্ঠু পরিকল্পনা। ধরা যাউক, কোন একটি রাষ্ট্রের বেকারসমস্যার বিষয়টি আমাদের আলোচ্য বিষয়। ইহার বিভিন্ন দিক বিচার করিবার আছে। বেকারদের কতজন পাড়াগাঁয়ে বা শহরে বাস করে ; কতজন শিক্ষিত বা অশিক্ষিত ; কতজন পুরাপুরি বা আংশিক। নির্দিষ্ট গবেষকের কাজ আরম্ভ করিবার পূর্বে ঐ সমস্ত বিষয় সম্পূর্ণ অবহিত না হইলে কাজে অসুবিধা হইবে। কোন কোন রাশিবিদের মতে রাশিবিজ্ঞানকে **গণনা ও সম্ভাবনার বিজ্ঞান** (Science of Estimates & Probabilities) বলা হয়। সুতরাং পরিসংখ্যানের কাজটির প্রকৃতি সম্বন্ধে সুষ্ঠু ধারণাবোধের পর সংগৃহীত তথ্যাবলী কিরূপ **'এককে'** (Unit) প্রকাশিত হইবে তাহা ঠিক করিয়া লইতে হইবে। উদাহরণস্বরূপ, কোন ব্যক্তির মাসিক আয় 800 টাকা। উহাকে এক টাকা, দশ টাকা বা একশত টাকার একক পদ্ধতিতে 800 টাকা, 80 টাকা বা 8 টাকা,—এরূপে প্রকাশ করা যায়।

ইহা ছাড়া তথ্যসংগ্রহের জন্য গবেষণাক্ষেত্রের সীমাও জানা দরকার ; অর্থাৎ সমষ্টিগতভাবে সমস্ত বস্তুর গুণাবলী হইতে তথ্য সংগ্রহ করা হইবে বা উহার অংশ হইতে সংগৃহীত হইবে—তাহার সম্বন্ধে জানা দরকার। ইহা বহুলাংশে কাজের উদ্দেশ্যের উপর নির্ভর করে। যেমন, আদমসুমারীর কাজে প্রত্যেক বাসিন্দার তথ্য

সংগ্রহ করা হয়। কিন্তু কোন বিশেষ পরীক্ষায় বহুসংখ্যক পরিক্ষার্থীর গুণগত মান নির্ণয়ের জন্য—উহা হইতে কিছুসংখ্যক ছাত্রের নম্বরকে নমুনা হিসাবে লইয়া গবেষণা করিলে, উহা হইতে প্রাপ্ত ফল সমগ্রকের উপর বর্তাইবে।

2·2. তথ্যসংগ্রহ (Collection of data) :

একক সংখ্যার নির্বাচন, পরিসংখ্যানগত কাজটির সুষ্ঠু পরিকল্পন ... . ক্ষেত্রের সীমাসম্পর্কিত সিদ্ধান্ত নিরূপিত হইবার পর তথ্যসংগ্রহের প্রকৃত কাজ সুরু হয়। এই ব্যাপারে সাধারণতঃ নিম্নলিখিত প্রক্রিয়াগুলি ব্যবহৃত হয় :—

A. ব্যক্তিগত গবেষণা পদ্ধতি (Personal Investigation Method) : এই পদ্ধতিতে রাশিবিজ্ঞানে বিশেষ শিক্ষাপ্রাপ্ত কর্মিগণ সুনির্দিষ্ট প্রশ্নতালিকার মাধ্যমে তথ্য সংগ্রহ করেন। এই পদ্ধতি সর্বোৎকৃষ্ট এবং আদমসুমারীর কার্যে ব্যবহৃত হয়। এই পদ্ধতির প্রধান সুবিধা হইল যে কর্মিগণ ব্যক্তিগতভাবে জনসাধারণকে দুর্বোধ্য প্রশ্নাবলীর প্রকৃত অর্থ ও গুরুত্ব বুঝাইয়া দেন এবং সাধারণতঃ লোকেরা স্বেচ্ছায় উহাদের সঙ্গে পূর্ণ সহযোগিতা করিয়া পরিসংখ্যানের কাজ সহজ করিয়া দেয়। কিন্তু এই পদ্ধতি অত্যন্ত ব্যয়সাধ্য ও সময়সাপেক্ষ। কখনও কখনও পরিসংখ্যানের কর্মিগণ প্রশ্নাবলী যথাযথ উত্তরদানের নিমিত্ত জনসাধারণের কাছে রাখিয়া আসেন ও পরে ঐগুলি সংগ্রহ করেন।

B. কোন ব্যক্তি বা প্রতিষ্ঠানের নিকট প্রশ্নাবলী প্রেরণ করিয়া (Postal Method of Collection) : প্রশ্নগুলি ব্যক্তিবিশেষের নিকট যথাযথ উত্তর প্রেরণের জন্য ডাকযোগে প্রেরিত হয়। এই পদ্ধতির প্রধান অসুবিধা হইল এই যে, অনেকেই প্রশ্নাবলীর যথাযথ উত্তরদানে বিরত থাকেন, আবার কেহ কেহ ভুল উত্তর প্রেরণ করেন। পদ্ধতিটির সুবিধা হইল যে, এই পদ্ধতিতে পরিসংখ্যানের কাজ তুলনামূলকভাবে অতি অল্প সময়ে ও স্বল্পব্যয়ে সম্পন্ন হয়।

উপরি-উক্ত এই দুইটি পদ্ধতিকে প্রশ্নতালিকা পদ্ধতি বা Questionnaire Method বলে। সুফল পাইবার নিমিত্ত প্রশ্নগুলি সংক্ষিপ্ত ও সহজবোধ্য হওয়া উচিত যাহাতে কম কথায় অর্থাৎ, হ্যাঁ, না, 25 বৎসর, 500 টাকা ইত্যাদিতে এবং নির্ভুল-ভাবে উত্তর দেওয়া যায়।

C. অপরাপর প্রতিষ্ঠান কর্তৃক পূর্বপ্রকাশিত পরিসংখ্যান হইতেও তথ্য সংগ্রহ করা হয়। যে সব ক্ষেত্রে প্রধানতঃ প্রত্যক্ষভাবে তথ্যসংগ্রহ অপ্রয়োজনীয় ও

দুঃসাধ্য হইয়া পড়ে—সেই সব ক্ষেত্রে এই পদ্ধতিকে কাজে লাগানো হয়। কিন্তু এইভাবে তথ্যসংগ্রহের পূর্বে সংখ্যাগুলি নির্ভুল ও সঠিক কি না, সে সম্বন্ধে অবহিত হওয়া বাঞ্ছনীয়।

2·3. সংগ্রহের পদ্ধতি অনুসারে পরিসংখ্যানগত তথ্যাবলীকে সাধারণতঃ দুই ভাগে ভাগ করা যায় :—(a) **মুখ্য** (Primary) ও (b) **গৌণ** (Secondary).

যে তথ্যাবলী মৌলিক গবেষণার দ্বারা সংগৃহীত হয়, সেগুলিকে **মুখ্য তথ্যাবলী** বলা হয়। যেমন, জনগণনার তথ্যাবলী।

যে সমস্ত তথ্য পূর্বপ্রকাশিত পরিসংখ্যানলিপি, ইত্যাদি হইতে সংগৃহীত হয়, তাহাদিগকে **গৌণ তথ্যাবলী** বলা হয়। যেমন, সরকার প্রকাশিত পরিসংখ্যান বা বিভিন্ন পুস্তক এবং সংবাদপত্র ও ব্যবসায়িক পত্রিকাসমূহে প্রকাশিত তথ্য হইতে সংগৃহীত তথ্যাবলী।

2·4. শ্রেণীবিন্যাস (Classification) :

তথ্যাবলী সংগৃহীত হইবার পর রাশিবিদকে প্রভূত সংখ্যা ও অন্যান্য সূক্ষ্ম তথ্যকে বিশ্লেষণ ও নিয়মবদ্ধ করিতে হয়। এই উদ্দেশ্য সাধনের জন্য সংগৃহীত উপাদানগুলিকে বিভিন্ন শ্রেণীতে ভাগ করিয়া উহাদিগকে বিভিন্ন ছক আকারে সাজাইতে হয়।

শ্রেণীবিন্যাস পরিসংখ্যানের অন্যতম প্রয়োজনীয় অংশ। ইহার মোটামুটি অর্থ হইল সংগৃহীত যথেষ্টসংখ্যক তথ্যাবলীকে বিভিন্ন শ্রেণীতে বা বিভাগে বিভক্ত করা, যাহাতে প্রত্যেক শ্রেণীর অন্তর্গত তথ্যাবলী কতকগুলি সাধারণ গুণবিশিষ্ট হইতে পারে। এই পদ্ধতি অনেকাংশে পোষ্টাফিসে চিঠিপত্রের বাছাই করা পদ্ধতির সামিল।

শ্রেণীবিন্যাসের বিভিন্ন প্রকার গুণানুযায়ী সংগৃহীত উপাত্তগুলিকে নিম্নলিখিত চারি ভাগে বিভক্ত করা হয় :

(a) **গুণগত (Qualitative) :** সংখ্যায় অপ্রকাশনীয় ও অপরিমেয়—এরূপ গুণের ভিত্তিতে শ্রেণীবিন্যাস করিয়া বস্তুর একত্রীকরণ। যেমন, কোন এক গ্রামের অধিবাসীদের শিক্ষা ও পেশা অনুসারে বিভিন্ন শ্রেণীতে বিভক্তকরণ।

(b) **পরিমাণগত (Quantitative) :** পরিমাণের দিক হইতে সংখ্যায় প্রকাশনীয় ও পরিমেয়—এমন কতকগুলি বিশেষ বৈশিষ্ট্যের ভিত্তিতে শ্রেণীবিন্যাসকরণ। এরূপ বৈশিষ্ট্য স্বভাবতঃই পরিবর্তনশীল। যেমন, কোন স্থানের অধিবাসীদিগকে বয়স ওজন ও আয় অনুসারে বিভক্ত করাকে পরিমাণগত শ্রেণীবিন্যাস বলা যাইতে পারে।

(c) **ভৌগোলিক** (Geographical): ভৌগোলিক অবস্থানের ভিত্তিতে একত্রীকরণ। যেমন, বিভিন্ন স্থানের উৎপাদন, জন্মসংখ্যা ইত্যাদি।

(d) **ধারাবাহিক** (Chronological): ঘটনার স্থায়িত্ব ও সময়সাপেক্ষ শ্রেণীবিন্যাস। যেমন, বিভিন্ন বৎসরের বিদ্যালয়ের পরীক্ষার ফলপ্রকাশ, বিভিন্ন বৎসরে কোন দেশের জন্মহার ও মৃত্যুহার ইত্যাদি।

তথ্যাবলীর পরিসংখ্যানগত শ্রেণীবিন্যাস পরের অধ্যায়ে আলোচনা করা হইবে।

2·5. ছক্ বিন্যাস (Tabulation):

সংখ্যাগত তথ্যাবলী রাশিবিজ্ঞানের মূল উপাদান হইলেও অতি বৃহৎ সংখ্যায় ধারণা ও আলোচনা এবং উহা হইতে কোন সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া প্রায় অসম্ভব হইয়া উঠে। তাহা ছাড়া, তথ্যগুলি যদি অসজ্জিত হয়, তাহা হইলে উহার অন্তর্নিহিত অর্থ বাহির করা কষ্টসাধ্য হইয়া পড়ে। সেইজন্য পরিসংখ্যানের তথ্যাবলীর সুষ্ঠু ধারণাবোধের উদ্দেশ্যে সংখ্যাগত তথ্যাবলীকে একটি নিয়মানুসারে ছকে সজ্জিত করিয়া উপস্থাপিত করা হয়। ইহার সাহায্যে বিভিন্ন তথ্যের মধ্যে তুলনা করা যায়। নিম্নে একটি ছকের সাহায্যে বিভিন্ন বৎসরে কোন একটি বিদ্যালয়ের স্কুল ফাইন্যাল পরীক্ষায় উত্তীর্ণ ছাত্রদের সংখ্যা ছক্ আকারে দেওয়া হইল:

॥ একটি বিদ্যালয়ের স্কুল ফাইন্যাল পরীক্ষার পাশের হার ॥

বৎসর	উত্তীর্ণ ছাত্র সংখ্যা				অনুত্তীর্ণ ছাত্র সংখ্যা	পাশের হার	মোট ছাত্র-সংখ্যা
	প্রথম বিভাগ	দ্বিতীয় বিভাগ	তৃতীয় বিভাগ	মোট			
1957	5	35	43	83	37	69·2%	120
1958	12	28	30	70	46	60·3%	116
1959	3	46	34	83	51	62%	134
1960	X	29	46	75	80	48·4%	155
1961	18	38	24	80	35	69·6%	115
মোট	38	176	177	391	249	61·1%	640

তৃতীয় অধ্যায়

পরিসংখ্যা-বিভাজন

(Frequency Distribution)

3.1. কয়েকটি প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা :

সমজাতীয় যে সকল বস্তু হইতে তথ্য সংগ্রহ করা হয়, তাহাদের বিশেষ কোন গুণকে **লক্ষণ** (Character) বলে। যে সকল লক্ষণের মান পরিবর্তনশীল তাহাদের **চলক** (Variate) বলে। যেমন—বয়স, ওজন, উচ্চতা, আয় ইত্যাদি।

চলকের মানকে **চল** (Variable) বলে। যেমন, কোন বিদ্যালয়ে কোন এক শ্রেণীর ছাত্রদের উচ্চতার পরিমাণ। সাধারণতঃ চলক দুই প্রকারের—(i) **বিচ্ছিন্ন** (Discrete) ও (ii) **অবিচ্ছিন্ন** (Continuous)। যে চলকের দুইটি ক্রমিক মানের মধ্যে একটি নির্দিষ্ট ব্যবধান থাকে, তাহাকে **বিচ্ছিন্ন চলক** বলে। বিচ্ছিন্ন চলকের মান সাধারণতঃ অখণ্ড সংখ্যায় প্রকাশিত হয়। যেমন, বিদ্যালয়ের বিভিন্ন শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা, পরীক্ষায় পূর্ণসংখ্যায় প্রকাশিত নম্বর ইত্যাদি। দুইটি ক্রমিক মানের মধ্যে যে চলকের কোন নির্দিষ্ট ব্যবধান থাকে না, তাহাকে **অবিচ্ছিন্ন চলক** বলে। যথা,—কোন বিদ্যালয়ের ছাত্রদের ওজন, দিনের তাপমাত্রা, ইত্যাদি।

দ্রষ্টব্য : অনেক সময় চল ও চলক একই অর্থে ব্যবহৃত হয়। পূর্বেই আলোচনা করা হইয়াছে যে, যদি পরিসংখ্যানের বহুসংখ্যক পরিমাণগত তথ্যকে বিশৃঙ্খলভাবে কেবল তালিকাবদ্ধ করিয়া রাখা হয়, তাহা হইলে উহা হইতে উহাদের প্রকৃত তাৎপর্য নির্ণয় করা দুঃসাধ্য হইয়া পড়ে। ধরা যাউক, কোন বিদ্যালয়ের ছাত্রদের উচ্চতার তালিকা অসজ্জিত অবস্থায় লিপিবদ্ধ করা আছে। উহা হইতে ছাত্রদের গড় উচ্চতা কত হইবে, ইহার সম্বন্ধে ধারণা করা অসম্ভব। সেইজন্যই শ্রেণীবিন্যাসের কোন বিশেষ পদ্ধতি অনুযায়ী তথ্যাবলীকে সাজাইয়া লওয়া একান্ত প্রয়োজন, যাহাতে উহাদের প্রকৃত অর্থগত তাৎপর্য উপলব্ধি করা যায়।

3·2. সমজাতীয় তথ্যাবলীর পরিমাণের ভিত্তিতে যে শ্রেণীবিন্যাস করা হয় তাহাকে **পরিসংখ্যা-বিভাজন** (Frequency distribution) বলা হয়, এবং যে-কোন শ্রেণীভুক্ত তথ্যাবলীর সংখ্যাকে উহার **পরিসংখ্যা** (Frequency) এবং

যে ছকের সাহায্যে উহাকে প্রকাশ করা হয় তাহাকে **পরিসংখ্যা ছক্** (Frequency table) বলে।

নিম্নে পরিসংখ্যা-বিভাজনের দুইটি ছক্ দেওয়া হইল।

—1

100 জন লোকের সাপ্তাহিক আয়ের পরিসংখ্যা-বিভাজন ॥

সাপ্তাহিক আয় (চলক) (টাকায়)	লোকের সংখ্যা (পরিসংখ্যা)
10	24
16	16
21	38
25	12
2[illegible]	10
মোট =	100

ছক্—2

॥ 500 জন ছাত্রের ওজনের পরিসংখ্যা-বিভাজন

ওজন (কিলোগ্রামে) (চলক)	ছাত্রসংখ্যা (পরিসংখ্যা)
50 হইতে 55	50
55 „ 60	150
60 „ 65	200
65 „ 70	62
70 „ 75	23
75 „ 80	15
মোট =	500

ছক্—1 হইতে দেখা যায় যে 21 টাকা সাপ্তাহিক আয়ের লোকসংখ্যা 38, অর্থাৎ 21 টাকা আয়—এই চলকের সংখ্যা 38; সুতরাং উহার পরিসংখ্যা হইতেছে 28; অনুরূপভাবে ছক্—2 হইতেই স্পষ্টই বোঝা যাইতেছে যে, 60 কি. গ্রা. হইতে 65 কি. গ্রা. পর্যন্ত ওজনের ছাত্রসংখ্যা 200, অর্থাৎ (60–65) চলকের এই শ্রেণীর পরিসংখ্যা 200. কোন বিশেষ শ্রেণীভুক্ত চলকের সীমাকে **শ্রেণী-বিরতি** বা **শ্রেণী-অন্তর** (Class interval) এবং উহাতে চলকের যে সংখ্যা থাকে তাহাকে **শ্রেণীগত পরিসংখ্যা** (Class frequency) বলে। কোন শ্রেণীভুক্ত চলকের সর্বনিম্ন মানকে **নিম্নসীমা** (Lower limit) এবং সর্বাপেক্ষা বড় মানটিকে মানের **উচ্চসীমা** (Upper limit) বলা হয়। সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন সীমার অন্তরকে মানটির **প্রসার** (Range) বলে। নিম্নসীমা ও উচ্চসীমার গড় হইতে উহার **মধ্যবিন্দু** (Mid-value or mid-point) পাওয়া যায়। তাহা ছাড়া, অনেক সময় নিম্নসীমার সহিত প্রসারের অর্ধেক যুক্ত করিলেও মধ্যবিন্দু পাওয়া যায়। দ্বিতীয় ছকে ওজন চলকটির তৃতীয় শ্রেণীভুক্ত নিম্নসীমা 60 ও উচ্চসীমা 65 এবং প্রসার 5; উহার মধ্যবিন্দু 62·5.

3·3. নিম্নে কোন বিদ্যালয়ের দশমশ্রেণীর 100 জন ছাত্রের গণিত পরীক্ষার নম্বর ছাত্রদের ক্রমিক সংখ্যানুসারে দেওয়া হইল এবং নম্বরগুলি সবই পূর্ণসংখ্যা

75	39	52	69	54	28	86	68	34	56
38	46	34	58	28	68	84	71	47	52
25	28	58	26	34	82	28	63	55	28
60	27	46	82	54	73	46	47	68	38
54	51	71	48	62	54	56	48	88	37
29	48	86	56	69	56	29	34	49	68
44	56	38	52	48	54	38	28	55	73
48	69	54	39	53	26	36	56	62	71
62	71	28	43	52	39	48	51	73	29
31	28	24	61	29	41	51	29	39	36

উপরিস্থিত রাশিগুলি অবিন্যস্তভাবে ছড়াইয়া রহিয়াছে। উহা হইতে পরিসংখ্যানগত কোন তাৎপর্যই বোধগম্য হইতেছে না। এই অবস্থায় সর্বনিম্ন ব সর্বোচ্চ নম্বর কত, ইত্যাদি প্রশ্নের উত্তর দেওয়া খুবই কষ্টসাধ্য। এইরূপ অসজ্জি

তথ্যাবলীকে **কাঁচা তথ্য** (Raw data) বলা হয়। নিম্নের ছকে নম্বরগুলিকে মানের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজান হইল :

24	28	34	39	47	51	54	56	68	73
25	28	34	39	47	51	54	58	68	73
26	28	34	39	48	52	54	58	68	73
26	29	36	39	48	52	55	60	69	75
27	29	36	41	48	52	55	61	69	82
28	29	37	43	48	52	56	62	69	82
28	29	38	44	48	53	56	62	71	84
28	29	38	46	48	54	56	62	71	86
28	31	38	46	49	54	56	63	71	86
28	34	38	46	51	54	56	68	71	88

উল্লিখিত প্রণালীতে তথ্যগুলি মানের ঊর্ধ্বক্রমে (বা অধঃক্রমে) সাজাইলে উহাদিগকে **পংক্তি** (Array)-ক্রমে সজ্জিত তথ্য বলা হয়। উহা হইতে সর্বোচ্চ নম্বর ও সর্বনিম্ন নম্বরের মান কত, তাহা বলা যায় এবং মানের প্রসার (88 – 24) বা 64. কিন্তু এইভাবে সাজাইতে যথেষ্ট সময় লাগে এবং উহা কষ্টসাধ্য ও বিরক্তিকর ব্যাপার। তাহা ছাড়া সর্বাধিক সংখ্যক ছাত্র কত নম্বর পাইয়াছে বা মোটামুটি ছাত্রদের গড় নম্বর কত তাহাও ঠিক বলা যায় না। নীচে পরিসংখ্যা-বিভাজন প্রক্রিয়ায় কোন বিশেষ একটি নম্বর কতজন ছাত্র পাইয়াছে, ইত্যাদি জানা যাইতে পারে :—

॥ 100 জন ছাত্রের নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন ॥

নম্বর	ছাত্রসংখ্যা	নম্বর	ছাত্রসংখ্যা	নম্বর	ছাত্রসংখ্যা	নম্বর	ছাত্রসংখ্যা
24	1	38	4	52	4	68	4
25	1	39	4	53	1	69	3
26	2	41	1	54	6	71	4
27	1	43	1	55	2	73	3
28	8	44	1	56	6	75	1
29	5	46	3	58	2	82	2
31	1	47	2	60	1	84	1
34	4	48	6	61	1	86	2
36	2	49	1	62	3	88	1
37	1	51	3	63	1	মোট =	100

এইরূপ পরিসংখ্যা-বিভাজনের দ্বারা পরিসংখ্যানের কার্যের বিশ্লেষণের কিছুটা সুবিধা হইতে পারে। কিন্তু এই ছকটি এত দীর্ঘ যে উহার দ্বারা পরিসংখ্যানের কার্যের অন্তর্গত তাৎপর্য নির্ণয় করা খুব সহজসাধ্য নহে। তাহা ছাড়া উহাতে মোট 39-টি বিভিন্ন নম্বরের মধ্যে আলোচনা সীমাবদ্ধ রাখিতে হয়। ইহার পরে স্বভাবতঃই নম্বরগুলিকে শ্রেণীবদ্ধ করিয়া ছকটি সঙ্কুচিত করা যাইতে পারে। নম্বরগুলির অন্তর 10 লইয়া শ্রেণীবদ্ধ করিলে অর্থাৎ নম্বরগুলিকে 24—33, 34—43, 44—53, ইত্যাদি মোট 7-টি সম-প্রসারবিশিষ্ট শ্রেণী-বিরতি দ্বারা নিম্নরূপ পরিসংখ্যা-ছক পাওয়া যাইবে। প্রতিটি শ্রেণীর অন্তর্গত নম্বরের সংখ্যা ঐ শ্রেণীর পরিসংখ্যা। যেমন, নীচের ছকে 24—33 এই শ্রেণীর পরিসংখ্যা 19 অর্থাৎ 19 জন ছাত্র 24 হইতে 33-এর মধ্যে নম্বর পাইয়াছে। অনুরূপভাবে, 17 জন ছাত্র 34—43 নম্বর পাইয়াছে।

॥ 100 জন ছাত্রের নম্বরের পরিসংখ্যা-বিভাজন ॥

নম্বরের শ্রেণী	ছাত্রসংখ্যা
24—33	19
34—43	17
44—53	21
54—63	22
64—73	14
74—83	3
84—93	4
মোট =	100

উল্লিখিত ছক হইতে আরও দেখা যায় যে, সর্বাধিক সংখ্যক ছাত্র অর্থাৎ 22 জন ছাত্র 54 হইতে 63-এর মধ্যে নম্বর পাইয়াছে।

3·4. পরিসংখ্যা-বিভাজন প্রস্তুত করিবার সময় নিম্নলিখিত নিয়মগুলি মানিয়া চলা দরকার :

(a) প্রথমে শ্রেণী-বিরতি বা শ্রেণী-অন্তর-এর দৈর্ঘ্য নির্ণয়,

(b) ঐ শ্রেণী-অন্তরের অবস্থান নিরূপণ,

(c) কতিপয় শ্রেণী-অন্তরের দ্বারা তথ্যাবলীর শ্রেণীবিভাগ,

(d) সর্বশেষে সুনির্দিষ্ট তালিকার সাহায্যে শ্রেণীবিন্যাস প্রদর্শন।

আরও মনে রাখা প্রয়োজন, খুবই কমসংখ্যক শ্রেণী-অন্তর বৃহৎ ভুলের সৃষ্টি করিতে পারে। আবার, অত্যন্ত বেশীসংখ্যক শ্রেণী-অন্তর বাস্তব কার্যে অপ্রয়োজনীয় ও অব্যবহার্য। নিয়মানুযায়ী শ্রেণী-অন্তরগুলি সম-দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট হওয়া উচিত।

সব সময়েই, শ্রেণী অন্তরের অবস্থান খুব প্রয়োজন; সুতরাং সুবিধানুযায়ী উহা বাছিয়া লইতে হয়। তবে ইহা সব সময়ই আশা করা হয় যে শ্রেণী-সীমা এবং কেন্দ্রমান বা মধ্য বিন্দু অখণ্ড সংখ্যা হইবে এবং শ্রেণী-অন্তরগুলিও সেই অনুযায়ী বাছিয়া লইতে লয়।

3·5. কাঁচা তথ্যগুলিকে উহাদের মানের ঊর্ধ্বক্রম বা অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া পরিসংখ্যা-বিভাজন ছক্ তৈয়ারী সম্পর্কে এতক্ষণ আলোচনা করা হইল। এক্ষণে, একটি নূতন পদ্ধতির আলোচনা করা হইতেছে। উহা হইতে সোজাসুজি ছক্ প্রস্তুত করা যায়। নিম্নে কোন বিদ্যালয়ের একাদশ শ্রেণীর 90 জন ছাত্রের গণিত পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের তালিকা দেওয়া গেল :

80	56	38	46	51	29	73	68	54	48
18	72	69	54	28	46	39	41	78	53
28	86	45	39	43	56	41	27	71	45
54	78	56	42	93	64	29	46	34	82
43	12	48	36	53	68	27	91	39	46
61	36	55	43	81	25	51	38	48	38
46	22	36	56	48	33	42	45	28	18
75	73	63	17	61	35	65	31	78	39
37	86	38	60	77	68	34	58	66	19

উহা হইতে দেখা যায় যে, সর্বনিম্ন নম্বর 12 এবং সর্বোচ্চ নম্বর 93. উহাদের অন্তর অর্থাৎ প্রসার $93-12=81$. এখন শ্রেণী-অন্তর বা শ্রেণী-বিরতির দৈর্ঘ্য 10 লইয়া 10–19, 20–29, 30–39, ইত্যাদি বিভাগগুলি ঠিক করা হইল। এইরূপ মোট 9-টি বিভাগ পাওয়া যাইবে। তারপর পরবর্তী পৃষ্ঠার ছকে যেরূপে দেখান হইয়াছে, সেরূপভাবে নম্বরের শ্রেণী, মানের হিসাবের দাগ (tallies) ও পরিসংখ্যা এই তিনটি শিরোনামাযুক্ত তিনটি স্তম্ভ প্রস্তুত করা হয়। প্রথম স্তম্ভে অর্থাৎ 'নম্বরের শ্রেণী' শিরোনামার নীচে 10–19, 20–29 ইত্যাদি বিভাগগুলি লিখিয়া অবিন্যস্ত তথ্য তালিকা হইতে নম্বরগুলি যে যে শ্রেণীতে পড়ে, সেই সেই শ্রেণীর পাশে দ্বিতীয় স্তম্ভে প্রত্যেকটির জন্য একটি করিয়া উলম্ব রেখা (।) টানা হয়। প্রতি চারিটি রেখার পরে পঞ্চমটির জন্য ঐ চারিটি রেখার পেট কাটিয়া দেওয়া হয়। ইহার পর প্রতি শ্রেণীর সারিতে রেখার সংখ্যা গণিয়া তৃতীয় স্তম্ভে অর্থাৎ 'পরিসংখ্যা'র নীচে মোট ছাত্রসংখ্যা লেখা হয়।

এই প্রণালীকে **পাঁচ-এর থাক্ মিলানো** (Tally method of five) বলে। এইভাবে পরিসংখ্যা-বিভাজন প্রস্তুত করা সহজসাধ্য হয়। নিম্নের ছক্‌টি হইতে, উক্ত প্রণালীটি সম্বন্ধে সম্যক উপলব্ধি করিতে পারা যাইবে।

॥ 90 জন ছাত্রের নম্বরের পরিসংখ্যা বিভাজন ॥

নম্বরের শ্রেণী	মানের হিসাবের দাগ (tallies)	পরিসংখ্যা বা ছাত্র সংখ্যা
10 - 19	𝍸 I	6
20 - 29	𝍸 IIII	9
30 - 39	𝍸 𝍸 𝍸 I	16
40 - 49	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20
50 - 59	𝍸 𝍸 III	13
60 - 69	𝍸 𝍸 I	11
70 - 79	𝍸 III	8
80 - 89	𝍸	5
90 - 99	II	2
	মোট ছাত্র সংখ্যা =	90

॥ 50 জন ছাত্রের ওজনের পরিসংখ্যা-বিভাজন ছক্ ॥

ওজন (কিলোগ্রামে)	ছাত্রসংখ্যা
30—35	8
35—40	12
40—45	19
45—50	6
50—55	4
55—60	1
মোট =	50

পার্শ্বে কোন বিদ্যালয়ের অষ্টম শ্রেণী 50 জন ছাত্রের ওজনের পরিসংখ্যা-বিভাজন ছক্ দেওয়া হইয়াছে। উহা হইতে দেখা যাইতেছে যে, কোন শ্রেণীর উচ্চসীমা পরবর্তী শ্রেণীর নিম্নসীমার সমান। অবচ্ছিন্ন চলকের পরিসংখ্যা-বিভাজন প্রস্তুত করিবার সময়, উহা লক্ষ্য করা প্রয়োজন। যদি 30—34, 35—39, 40—44 ইত্যাদি শ্রেণী লওয়া হইত তাহা হইলে 34—35, 39—40, ইত্যাদির মধ্যবর্তী ওজনের মান ছক্ হইতে বাদ পড়িত।

কিন্তু বিচ্ছিন্ন চলকের (যেমন, পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর) পরিসংখ্যা-বিভাজনে যদি শ্রেণীগুলির উচ্চসীমার মান পরবর্তী নিম্নসীমার মানের সমান হয়, তাহা হইলে সাধারণতঃ উচ্চসীমার মানের সংখ্যা ঐ শ্রেণীতে যুক্ত না করিয়া পরের শ্রেণীতে যুক্ত করিতে হয়। পূর্ববর্তী পৃষ্ঠায় প্রথম ছকে নম্বরের শ্রেণী (10—20), (20—30), (30—40) ইত্যাদি ধরিলে কোন অসুবিধা হইবে না; কেবলমাত্র মনে রাখিতে হইবে যে, 20, 30, 40 ইত্যাদি এই সমস্ত বিশেষ নম্বর-প্রাপ্ত ছাত্রসংখ্যা সেই সমস্ত শ্রেণীতে যুক্ত হইবে যাহাদের নিম্নসীমা যথাক্রমে 20, 30, 40, ইত্যাদি।

3·6. এই অধ্যায়ের আলোচনা শেষ করিবার পূর্বে আর একটি বিশেষ পরিসংখ্যা ও তাহার বিভাজন-ছক্ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে। মনে কর, পূর্ববর্তী পৃষ্ঠার প্রথম ছক্ হইতে কত জন 30-এর বেশী বা কম নম্বর পাইয়াছে তাহা জানিতে হইবে। যেহেতু, সর্বনিম্ন নম্বর 10 এবং শ্রেণীর অন্তর 10, সুতরাং 10—19 এবং 20—29 এই দুইটি নম্বরের শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা যোগ করিলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, উহাই হইবে 30-এর কম নম্বর-প্রাপ্ত ছাত্রের সংখ্যা; এবং সমস্ত ছাত্র-সংখ্যা হইতে উক্ত সংখ্যা বিয়োগ করিলে 30 বা উহার বেশী নম্বর-প্রাপ্ত ছাত্রসংখ্যা পাওয়া যায়। এইপ্রকার পরিসংখ্যাকে **ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা** (Cumulative frequency) বলে। নিম্নে 155 পৃষ্ঠার প্রথম ছকের **ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ছক্** (Cumulative frequency table) দেওয়া হইল:

প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্রসংখ্যা বা ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
19 বা তাহার নীচের নম্বর	6
29 " " "	15 (=6+9)
39 " " "	41 (=15+26)
49 " " "	61 (=41+20)
59 " " "	7 (=61+13)
69 " " "	85 (=74+11)
79 " " "	93 (=85+8)
89 " " "	98 (=93+5)
99 " " "	100 (=98+2)

প্রশ্নমালা 1

(প্রথম হইতে তৃতীয় অধ্যায় পর্যন্ত)

1. রাশিবিজ্ঞান কাহাকে বলে? উহার প্রয়োজনীয়তা বর্ণনা কর।

2. কি কি উপায়ে পরিসংখ্যানের তথ্য সংগৃহীত হয়? তথ্য-সংগ্রহের পূর্বে কি কি বিষয় প্রথমে ঠিক করিয়া লইতে হয়?

3. কোন্ কোন্ উপায়ে তথ্যাবলীর শ্রেণীবিন্যাস করা যায়? প্রত্যেক ক্ষেত্রে উদাহরণ দ্বারা বুঝাইয়া দাও। মুখ্য ও গৌণ তথ্যাবলীর মধ্যে পার্থক্য কি?

4. পরিসংখ্যা ও পরিসংখ্যা-বিভাজন কাহাকে বলে? উদাহরণ দ্বারা বিচ্ছিন্ন ও অবিচ্ছিন্ন চলকের পার্থক্য দেখাও।

5. কোন বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণীর 60 জন ছাত্রের বিজ্ঞান পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বরের তালিকা দেওয়া হইল :

80	25	25	40	30	29	34	44	42	45	44	20
48	44	44	48	36	46	46	46	36	60	32	48
32	60	65	75	35	10	60	20	46	48	50	38
48	34	50	60	34	80	75	20	15	70	68	38
62	48	56	73	54	61	19	28	43	51	46	37

(a) নম্বরগুলিকে পংক্তিক্রমে সাজাইয়া সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন নম্বর বাহির কর।

(b) শ্রেণীর অন্তর 5 বা 10 লইয়া পরিসংখ্যা-বিভাজন ছক্ তৈয়ারি কর। উহা হইতে সর্বাপেক্ষা কোন্ শ্রেণীতে অধিক-সংখ্যক ছাত্র রহিয়াছে বাহির কর।

6. কোন একটি বিদ্যালয় মার্চ মাসে 26 দিন খোলা ছিল। উক্ত বিদ্যালয়ের একাদশ শ্রেণীর 72 জন ছাত্রের উপস্থিতির তালিকা দেওয়া হইল :

25	7	13	26	17	21	8	17	15	22	26	11
12	22	17	24	11	6	17	26	21	25	10	18
19	26	21	6	18	20	24	19	5	8	23	16
17	18	8	17	23	16	15	21	14	12	9	8
14	10	23	21	15	24	5	10	24	26	15	13
21	9	18	20	24	25	23	21	19	16	17	26

(a) সকল দিন উপস্থিত ছিল এরূপ ছাত্রের সংখ্যা কত ?

(b) অধিকাংশ ছাত্র কতদিন উপস্থিত ছিল ?

(c) শ্রেণীর অন্তর 2, 3 বা 5 লইয়া পরিসংখ্যা-বিভাজন ছক্ তৈয়ারি কর। তোমার মতে শ্রেণীর অন্তর কত লইলে ভাল হয় ?

7. 100 জন ছাত্রের ওজন (কিলোগ্রামে) নিম্নরূপ :

65	69	69·5	73·6	70·5	71	43	60·4	56	64
47	67	65	45	48	57·5	60	75	70·6	68
51·3	58	54·5	61	50·6	54	55	58	75	69
48	63	71	68·5	57	48·6	54	61·5	58	49
46·4	51·2	53	49	39·8	42	58	55	48	61·5
58	35·8	41	56	62·8	48·6	38·2	46	55·6	44
61·5	39	48·3	54	57	58	52	60	61	42·5
49·5	53	58·5	41	47	55·6	49	41	38	63
46	48·5	51	38·6	59	49·5	54	43	57	47·5
85·5	43	62	54	45·6	59	51	38	49	61

(a) তিনটি বিভিন্ন প্রকার পরিসংখ্যা-বিভাজন ছকের সাহায্যে উল্লিখিত তথ্যাবলীকে সজ্জিত কর। উহাদের মধ্যে একটিতে শ্রেণীগুলির মধ্যমান নির্দেশ কর।

(b) উক্ত তালিকায় চলকের মানের প্রসার কত ?

8. কোন একটি কারখানার 50 জন শ্রমিকের আয়ের নিম্নলিখিত তালিকাকে

21	22	17	20	21	27	16	12	24	22
23	19	21	16	19	22	25	21	18	14
7	16	13	24	16	18	17	25	17	10
12	17	16	15	15	13	21	23	18	19
20	8	10	12	14	19	24	16	8	25

পংক্তি-ক্রমে সাজাও। শ্রেণীর অন্তর 2 বা 4 লইয়া একটি পরিসংখ্যা-বিভাজন প্রস্তুত কর। ঐ তালিকাতে একটি ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা ছক্ আকারে সজ্জিত কর।

চতুর্থ অধ্যায়

লেখচিত্রের সাহায্যে পরিমাণগত তথ্যের উপস্থাপনা

(Graphical Representation of the Quantitative Data)

4·1. পরিসংখ্যানের তথ্যসংগ্রহের পর উহাদিগকে বিভিন্ন শ্রেণীতে বিভক্ত করিয়া ছকের আকারে প্রকাশ করা হয়। কিন্তু বহুসংখ্যক তথ্য একসঙ্গে উপস্থাপিত হইলে—তাহা দুর্বোধ্য হইয়া পড়ে এবং সমজাতীয় ভিন্ন ভিন্ন তথ্যের মধ্যে তুলনামূলক আলোচনা সম্ভবপর নহে। তাহা ছাড়া, পরিসংখ্যানের তথ্যাবলী সব সময়ই কৌতূহলোদ্দীপক নহে; এবং তাহাদের আকার সংখ্যাবৃদ্ধির সঙ্গে সঙ্গে এতই জটিল হইয়া পড়ে যে বিশেষ কৌতূহলী ছাড়া অন্য কেহ ঐসব তথ্য যত্নসহকারে পড়ে না। এইজন্য, তথ্যাবলীর উপযোগিতা ও তাৎপর্য সর্বজনগ্রাহ্য করিবার উদ্দেশ্যে উহাদিগকে লেখচিত্রের সাহায্যে প্রকাশ করা হয়। কেবলমাত্র সংখ্যার পরিবর্তে অঙ্কিত চিত্রাবলীর আকর্ষণ অধিকতর এবং মৌলিক মূল্যও যথেষ্ট আছে। ভারতের বিভিন্ন রাজ্যের জনসংখ্যার তালিকা হইতে অধিকতম ঘনবসতিপূর্ণ রাজ্য কোনটি বা বিভিন্ন রাজ্যে জনসংখ্যার পরিবর্তন বিচার করিতে যথেষ্ট মনোযোগ ও অনুরাগের দরকার হয়। কিন্তু যদি লেখচিত্রের মাধ্যমে নির্দিষ্ট পরিমাপ অনুযায়ী এক একটি রেখার সাহায্যে এক একটি রাজ্যের জনসংখ্যার পরিমাণ দেখান হয়, তাহা হইলে প্রয়োজনীয় তথ্য সংগ্রহ করিতে কম সময় ও কম মানসিক পরিশ্রম লাগিবে এবং মনের উপর ইহার ধারণা বহুদিন থাকিয়া যাইবে। এইজন্যই লেখচিত্রের উপযোগিতা এতবেশী এবং ক্রমেই এই পদ্ধতি অনেক বিখ্যাত পুস্তকে, পত্রিকায়, সংবাদপত্রে, সরকারী প্রচার কার্যে বাড়িয়া যাইতেছে।

4·2. লেখচিত্রাঙ্কনের প্রাথমিক নিয়মাবলী :

(i) প্রথম ও প্রধান গুরুত্বপূর্ণ বস্তুটি হইল উপযুক্ত মাপনী (scale) নির্বাচন। মাপনী নির্বাচনের জন্য কোন নির্দিষ্ট বাঁধাধরা নিয়ম নাই। অঙ্কিত চিত্রটি অধিক বৃহৎও হইবে না অথবা খুব ছোটও হইবে না যাহাতে উহা অস্পষ্ট বা জটিল দেখায়। তথ্যগুলি সমস্ত প্রয়োজনীয় বৈশিষ্ট্যই চিত্রের সাহায্যে স্পষ্টভাবে প্রতীয়মান হইবে ও কাগজের আকারের উপযুক্ত হইবে।

(ii) চিত্রের মধ্যে উল্লম্ব (Vertical) ও অনুভূমিক (Horizontal)

পরিমাপগুলি স্পষ্টভাবে দেখান হইবে। প্রথমটি চিত্রের বামদিকে এবং শেষোক্তটি চিত্রের নীচে প্রদর্শিত হইবে।

(iii) পরিচ্ছন্নতা নিখুঁতভাবে বজায় রাখিয়া চিত্রটি জ্যামিতিক যন্ত্রপাতির সাহায্যে অঙ্কন করিতে হইবে।

(iv) অনেক সময় ভিন্ন ভিন্ন রঙের সাহায্যে তথ্যের প্রধান বিষয়গুলি চিত্রের সাহায্যে এমন সুন্দরভাবে দেখানো যাইতে পারে, যাহাতে উহা সহজেই চোখে আকৃষ্ট হয়।

পরিসংখ্যানের পরিমাণগত তথ্যাবলীকে চিত্রসহযোগে উপস্থাপিত করিবার জন্য বিভিন্ন প্রকার চিত্র (Diagrams) ও লেখচিত্রের (Graphs) ব্যবহার করা হয়। তথ্যগত বৈশিষ্ট্য অনুসারে তাহাদের একটিকে বাছিয়া লইতে হয়। নিম্নলিখিত পদ্ধতিগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়—

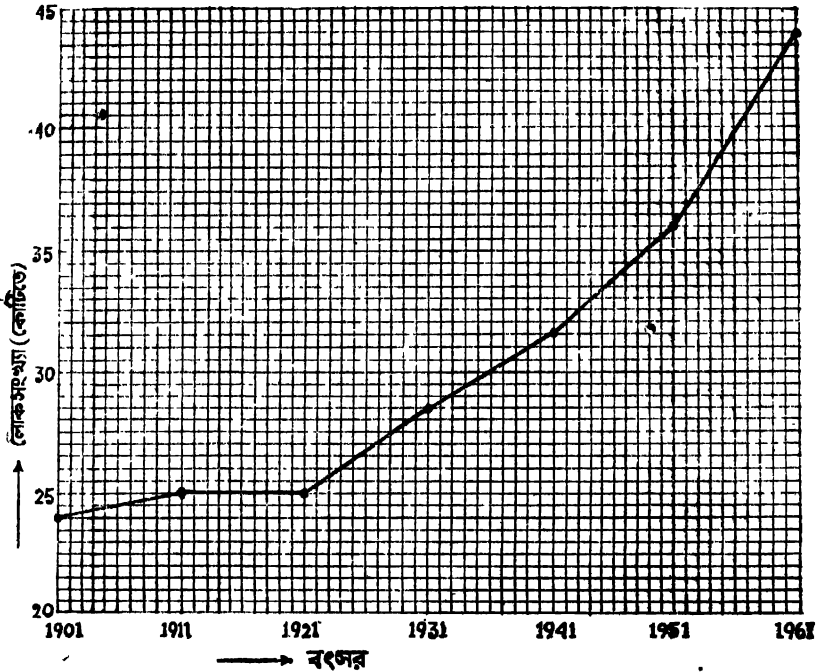
(i) রৈখিক চিত্র বা লেখচিত্র (Line chart or Graph chart)
(ii) অর্গললেখ (Bar chart)
(iii) স্তম্ভলেখ (Column chart)
(iv) বর্গক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র, বৃত্ত, পাইচিত্র (Pie chart), প্রভৃতি
(v) আয়ত লেখ (Histogram)
(vi) পরিসংখ্যা বহুভুজ (Frequency Polygon)
(vii) পরিসংখ্যা রেখা (Frequency Curve)

4·3. রৈখিক চিত্র বা লেখচিত্র :

বীজগণিতে লেখচিত্র অঙ্কনের পদ্ধতি সম্বন্ধে বিশেষভাবে আলোচনা করা হইয়াছে। রৈখিক চিত্রের সাহায্যে সংখ্যাগত তথ্যের উপস্থাপনার প্রচলন খুবই বেশী। উহা সাধারণের সহজবোধ্য এবং অঙ্কন পদ্ধতিও জটিল নহে। নিম্নের উদাহরণ হইতে উহার সম্বন্ধে সম্যক্ বুঝিতে পারা যাইবে।

উদাহরণ 1. আদমসুমারীর (Census-এর) হিসাব অনুযায়ী 1901 সাল হইতে 1961 সাল পর্যন্ত প্রতি দশ বৎসর অন্তর ভারতের লোকসংখ্যা (আনুমানিক কোটিতে) নিম্নের তালিকায় দেওয়া হইল। উহা হইতে রৈখিক চিত্র অঙ্কন কর।

বৎসর	1901	1911	1921	1931	1941	1951	1961
লোকসংখ্যা (কোটিতে)	24	25	25	28·5	31·5	36	44

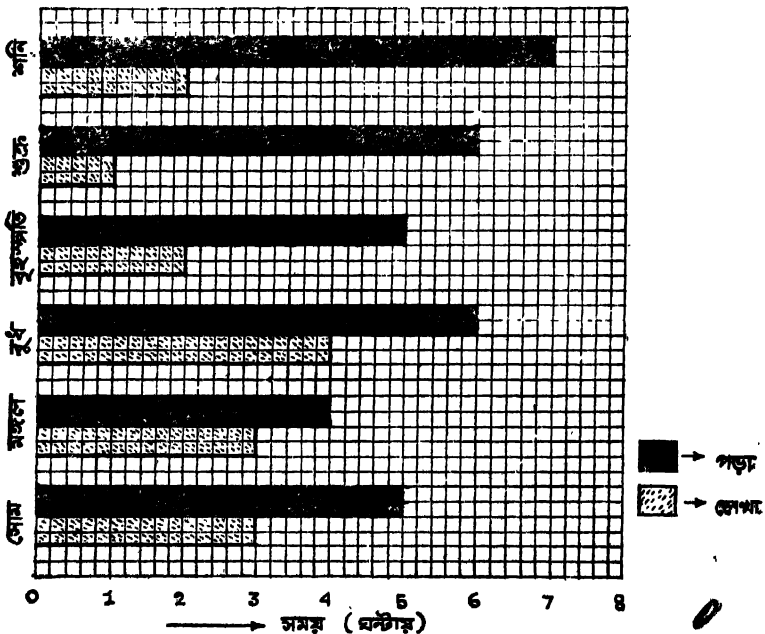
বর্গাঙ্কিত কাগজের যথাসম্ভব নীচে একটি অনুভূমিক সরলরেখাকে (Horizontal line) X-অক্ষ এবং যথাসম্ভব বামদিকে একটি উল্লম্ব রেখাকে (Vertical line) Y-অক্ষ ধরা হইল। উহারা পরস্পর যে-বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাই হইতেছে কেন্দ্র বিন্দু বা প্রারম্ভিক বিন্দু (Starting point or origin)।

প্রথমে ঠিক করা হইল যে, X-অক্ষের উপর বৎসর এবং Y-অক্ষের উপর লোক-সংখ্যার মান স্থাপন করা হইবে। যেহেতু, 1901 সালের লোকসংখ্যা সর্বাপেক্ষা কম অর্থাৎ 24 কোটি; সুতরাং, 1901 সাল এবং 20 কোটিকে কেন্দ্রবিন্দুতে ধরা হইল। X-অক্ষের উপর ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে 1 বৎসর এবং Y-অক্ষের উপর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের দুই বাহুকে 1 কোটি ধরিয়া বিভিন্ন বৎসরের লোকসংখ্যার মানগুলি বর্গাঙ্কিত কাগজে স্থাপন করা হইল। এইভাবে যে বিন্দুগুলি পাওয়া গেল, তাহাদিগকে পর পর ভিন্ন ভিন্ন সরলরেখা দ্বারা সংযুক্ত করা হইলে, নির্ণেয় রৈখিক চিত্র পাওয়া যায়। চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, 1901 সাল হইতে লোকসংখ্যা ক্রমশঃ বাড়িতে বাড়িতে 1911 এবং 1921 সালে প্রায়ই এক ছিল; এবং তাহার পর ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইয়া 1961 সালে সর্বাপেক্ষা অধিক হইয়াছে।

4.4. অর্গললেখ ও স্তম্ভলেখ :

লেখচিত্র (graph) অঙ্কনের মতই রাশি-বিজ্ঞানে কোন চলরাশিমানের তুলনা করিবার জন্য মানগুলির সমানুপাতী দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট অর্গললেখ ও স্তম্ভলেখ অঙ্কন করা হয়। নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে উহাদের অঙ্কন-প্রণালী পরিস্ফুট হইবে।

উদাহরণ 2. একাদশ শ্রেণীর কোন একটি ছাত্রের এক সপ্তাহের দৈনিক লেখা ও পড়ার সময় তালিকা হইতে একটি অর্গললেখ (Bar graph) অঙ্কন করা হইল।

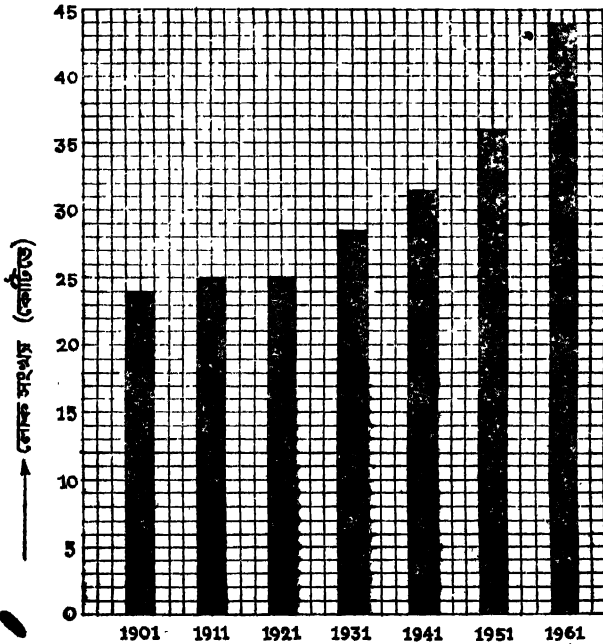
বার	সোম	মঙ্গল	বুধ	বৃহস্পতি	শুক্র	শনি
পড়া	5 ঘ.	4 ঘ.	6 ঘ.	5 ঘ.	6 ঘ	7 ঘ
লেখা	3 ঘ.	3 ঘ	4 ঘ.	2 ঘ.	1 ঘ.	2 ঘ.

বর্গাঙ্কিত কাগজের উপর যথাসম্ভব নীচে একটি অনুভূমিক রেখাকে সময় নির্দেশক অক্ষ ধরা হইয়াছে এবং উহার বামদিকে একটি উল্লম্বরেখার পার্শ্বে সমান সমান দূরে

চিত্র—অর্গললেখ।

বারের নামগুলি লেখা হইল। ছোট ছোট বর্গক্ষেত্রের পাঁচটি বাহুকে একক ধরিয়া এক ঘণ্টা প্রকাশিত হইল। একই দিনে লেখা ও পড়া নির্দেশক সরলরেখাগুলির প্রভেদ চিত্র হইতে পরিস্ফুট হইবে।

উদাহরণ 3. আদমসুমারীর বিবরণী হইতে 10 বৎসর অন্তর ভারতের লোক-সংখ্যার পরিসংখ্যান দেওয়া হইল। উহা হইতে একটি স্তম্ভলেখ (Column graph) অঙ্কন করিতে হইবে।

খৃষ্টাব্দ বা সাল	1901	1911	1921	1931	1941	1951	1961
লোকসংখ্যা (কোটিতে)	24	25	25	28·5	31·5	36	44

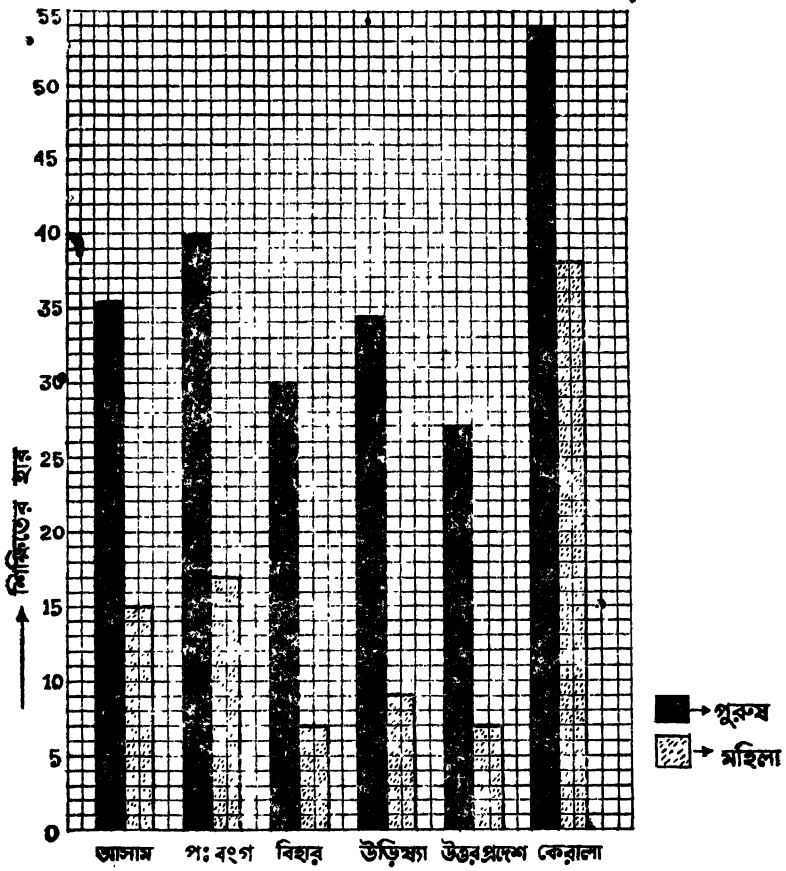
বর্গাঙ্কিত কাগজের উপর যথাসম্ভব নীচে একটি অনুভূমিক সরলরেখার দ্বারা বিভিন্ন বৎসরকে এবং যথাসম্ভব বামদিকে একটি উল্লম্বরেখার দ্বারা লোকসংখ্যাকে (আনুমানিক

চিত্র—স্তম্ভলেখ।

কোটিতে) সূচিত করা হইল। ছোট ছোট বর্গক্ষেত্রের এক বাহুকে 1 কোটি ধরিয়া লেখটি অঙ্কন করা হইল। স্তম্ভগুলিকে সাধারণের দৃষ্টি আকর্ষণের জন্য সমান প্রস্থ-বিশিষ্ট কালো সরলরেখা দ্বারা প্রদর্শিত করা হইয়াছে।

উদাহরণ 4. স্তম্ভলেখ অঙ্কন করিয়া নিম্নলিখিত রাজ্যগুলির পুরুষ ও মহিলার শিক্ষিতের হার তুলনা কর।

ক্রমিক নম্বর	রাজ্যের নাম	শতকরা শিক্ষিতের হার	
		পুরুষ	মহিলা
1.	আসাম	35·5	15
2.	পশ্চিমবঙ্গ	40	17
3.	বিহার	30	7
4.	উড়িষ্যা	34·4	9
5.	উত্তরপ্রদেশ	27	7
6.	কেরালা	54	38

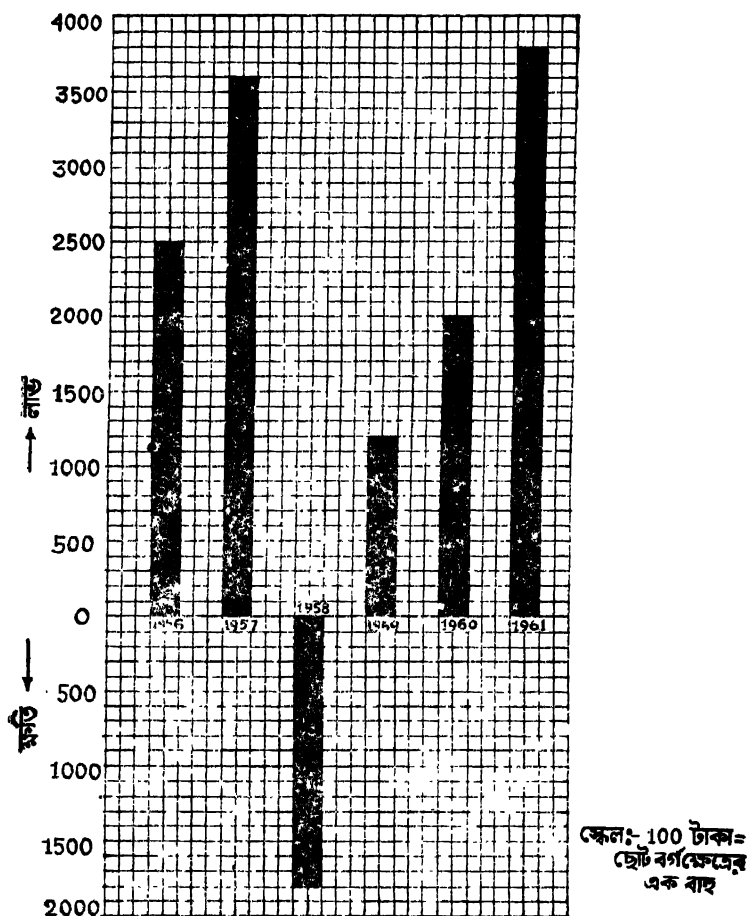
পরপৃষ্ঠায় প্রদত্ত স্তম্ভলেখ হইতে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, স্ত্রী-পুরুষ নির্বিশেষে শিক্ষাগত যোগ্যতায় কেরালার প্রথম স্থান এবং পশ্চিমবঙ্গ দ্বিতীয় স্থান অধিকার করিয়াছে। উত্তরপ্রদেশ এবং বিহারের মহিলাদের শিক্ষার হার সমান।

বিভিন্ন রাজ্যের পুরুষ ও মহিলাদিগের মধ্যে শিক্ষাগত তুলনা উপস্থাপিত করিবার জন্য উহাদিগকে পাশাপাশি ভিন্ন ভিন্ন সাঙ্কেতিক চিহ্ন দ্বারা দেখানো হইয়াছে।

চিত্র—স্তম্ভলেখ।

উদাহরণ 5. নিম্নের তালিকায় কোন এক ব্যবসায় প্রতিষ্ঠানের পরপর ছয় বৎসরের লাভ ও ক্ষতির পরিসংখ্যান দেওয়া হইল। উহা হইতে একটি স্তম্ভলেখ অঙ্কন কর।

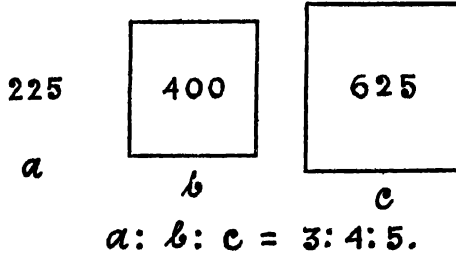
সাল	1956	1957	1958	1959	1960	1961
লাভ	2500	3600	—	1200	2000	3800
ক্ষতি	—	—	1800	—	—	—

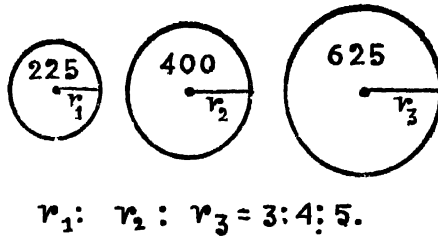
বর্গাঙ্কিত কাগজের মধ্যভাগের কিছু নীচে কেন্দ্রবিন্দু দিয়া অঙ্কিত একটি অনুভূমিক রেখার উপর বৎসরগুলিকে সংস্থাপিত করা হইয়াছে। কেন্দ্রবিন্দুর উপরের দিকে লাভ এবং নীচের দিকে ক্ষতিকে দেখানো হইয়াছে।

চিত্র—স্তম্ভলেখ।

:4·5. বর্গক্ষেত্র দ্বারা তথ্যসমূহের তুলনা :

যখন সংখ্যাগত তথ্যাবলীর মানগুলির মধ্যে পারস্পরিক অনুপাত খুব বেশী হয়, তখন বর্গক্ষেত্র দ্বারা প্রকাশ করা সহজসাধ্য এবং ইহার দ্বারা তথ্যগুলির মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ বজায় থাকে। সংখ্যাগুলির বর্গমূল বাহির করিয়া ঐ সকল বর্গমূলের

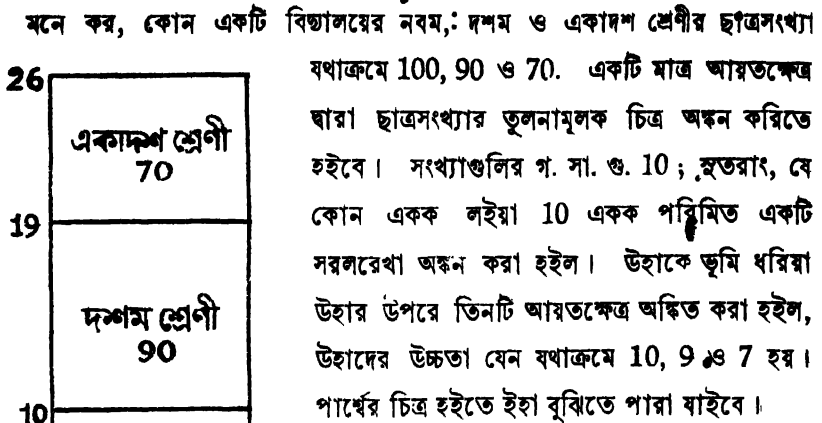
সমানুপাতী দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হয়। ঐ সমস্ত বর্গক্ষেত্রের দ্বারা তথ্যসমূহ সূচিত হয়।

মনে কর, একটি বিদ্যালয়ের পরপর তিন বৎসরের ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 225, 400 ও 625. তাহা হইলে এমন তিনটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহাদের

ক্ষেত্রফলের অনুপাত 225 : 400 : 625; সুতরাং, বর্গক্ষেত্রগুলির বাহুর অনুপাত যথাক্রমে 15 : 20 : 25 অর্থাৎ 3 : 4 : 5. উপরের চিত্র হইতে ইহা বুঝা যাইবে।

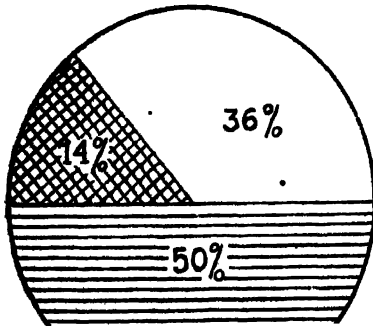
উপরের তথ্যগুলিকে তিনটি বৃত্ত দ্বারাও প্রকাশ করা যায়। এস্থলে এমন তিনটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে, যাহাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 225 : 400 : 625 অর্থাৎ

যাহাদের ব্যাসার্ধের অনুপাত 3 : 4 : 5. অতএব, সুবিধামত কোন এককের 3 একক, 4 একক ও 5 একক ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইল। এইরূপ চিত্রকে **বৃত্তীয় চিত্র** (Circular or pie-chart) বলে।

মন্তব্য : বর্গমূল পূর্ণসংখ্যা না হইলে, বর্গমূলের এক দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান লইতে হয়।

4·6. আয়তক্ষেত্রের সাহায্যে তথ্যসমূহের তুলনামূলক আলোচনা :

মনে কর, কোন একটি বিদ্যালয়ের নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 100, 90 ও 70. একটি মাত্র আয়তক্ষেত্র দ্বারা ছাত্রসংখ্যার তুলনামূলক চিত্র অঙ্কন করিতে হইবে। সংখ্যাগুলির গ. সা. গু. 10 ; সুতরাং, যে কোন একক লইয়া 10 একক পরিমিত একটি সরলরেখা অঙ্কন করা হইল। উহাকে ভূমি ধরিয়া উহার উপরে তিনটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করা হইল, উহাদের উচ্চতা যেন যথাক্রমে 10, 9 ও 7 হয়। পার্শ্বের চিত্র হইতে ইহা বুঝিতে পারা যাইবে।

দ্রষ্টব্য : যেহেতু, মোট ছাত্রসংখ্যা 260, অতএব, 10 একক পরিমিত ভূমির উপর 26 একক উচ্চতা বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন করিয়া উহার উচ্চতা নির্দেশক একটি বাহুকে 10 এবং 19 একক সূচক বিন্দুগুলি দিয়া ভূমির সমান্তরাল সরলরেখা অঙ্কিত করিলে তিনটি অনুপাতিক আয়তক্ষেত্র পাওয়া যাইবে।

4·7. পাইচিত্র দ্বারা তথ্যসমূহের তুলনামূলক আলোচনা :

পরিসংখ্যানের তথ্যগুলির তুলনা করিবার জন্য অনেক সময় বৃত্ত অঙ্কন করিয়া, যদি সেই বৃত্তকে তথ্যগুলির মানের অনুপাতে বিভক্ত করা হয় তবে **পাইচিত্র** (Pie diagram) পাওয়া যায়।

মনে কর, কোন বিদ্যালয়ের কলা বিভাগে 125 জন, বিজ্ঞান বিভাগে 90 জন এবং বাণিজ্য বিভাগে 35 জন ছাত্র পড়ে। পাইচিত্র দ্বারা উহাদের তুলনা করিতে হইবে।

মোট ছাত্রসংখ্যা 250 জন। যে কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে, উহার ক্ষেত্রফল মোট ছাত্রসংখ্যা সূচিত করে।

বিভাগ	ছাত্রের সংখ্যা	মোট সংখ্যার শতাংশ
কলা	125	$\frac{125}{250} \times 100 = 50\%$
বিজ্ঞান	90	$\frac{90}{250} \times 100 = 36\%$
বাণিজ্য	35	$\frac{35}{250} \times 100 = 14\%$

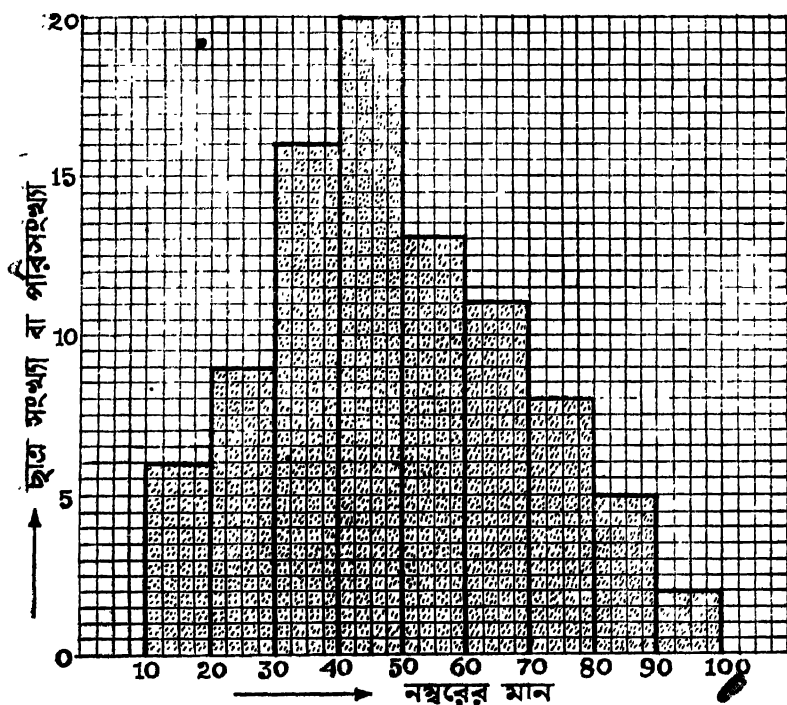
সুতরাং, বৃত্তটির পরিধিকে 100 ভাগে বিভক্ত করিয়া, উহার 50, 36 ও 14 ভাগ দ্বারা যথাক্রমে বিভিন্ন বিভাগের ছাত্রসংখ্যা সূচিত হইবে।

4·8. আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভুজ :

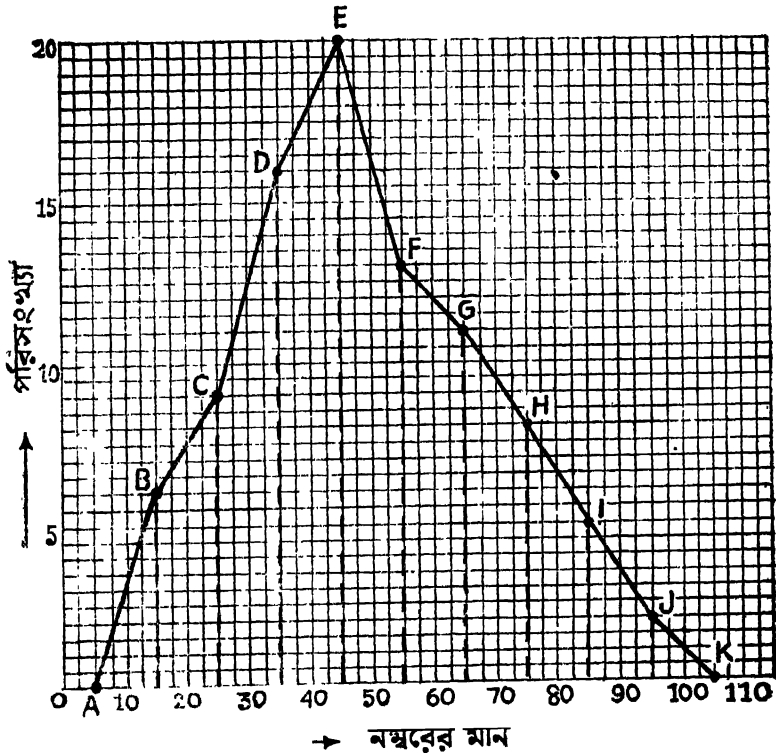
পরিসংখ্যা বিভাজনের তথ্যসমূহকে **আয়তলেখ** (Histogram) ও **পরিসংখ্যা বহুভুজ** (Frequency polygon)—সাধারণতঃ এই দুই চিত্রের দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পূর্বে স্তম্ভলেখ অঙ্কন যেরূপে হইয়াছে—ঠিক অনুরূপ পদ্ধতিতে আয়তলেখ অঙ্কন করা হয়। বর্গাঙ্কিত কাগজে প্রতি শ্রেণী-অন্তরের উপর এরূপ একটি করিয়া আয়ত-ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন উহার ক্ষেত্রফল পরিসংখ্যার মান অনুযায়ী হয়। অঙ্কন করিবার সময় শ্রেণী-অন্তরগুলিকে X-অক্ষের উপর এবং উহাদের ক্রমিক পরিসংখ্যাগুলিকে Y-অক্ষের উপর সংস্থাপিত করিতে হয় এবং অনুভূমিক রেখার উপর উভয়দিকে দুইটি অতিরিক্ত শ্রেণী-বিভাগ লওয়া হয়। শ্রেণী-অন্তরকে ভূমি এবং ঐ শ্রেণীগত পরিসংখ্যাকে উচ্চতা ধরিয়া যে সকল আয়তক্ষেত্র পাওয়া যায়, তাহাদের দ্বারা **আয়তলেখ** (Histogram) সূচিত হয়। ঐ চিত্রের জ্যামিতিক বিশ্লেষণ করিলে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, প্রত্যেকটি আয়তের ক্ষেত্রফল শ্রেণীগত পরিসংখ্যার সমান এবং সমস্ত আয়তলেখ-এর ক্ষেত্রফল মোট পরিসংখ্যার সমান।

পরিসংখ্যা-বিভাজনের আয়তলেখ অঙ্কিত করিয়া উহার প্রত্যেকটি আয়তক্ষেত্রের উপর দিকের বাহুর মধ্যবিন্দু নির্ণয় করা হয়। ঐ মধ্যবিন্দুগুলিকে পরপর সরলরেখার দ্বারা সংযুক্ত করিয়া, উহাদিগকে অনুভূমিক রেখার উপর উভয়প্রান্তে যে দুইটি অতিরিক্ত শ্রেণী লওয়া হইয়াছে তাহাদের মধ্যবিন্দু পর্যন্ত যুক্ত করিলে, অনুভূমিক রেখা এবং উক্ত রেখাগুলির দ্বারা যে বহুভুজ উৎপন্ন হয় তাহাকে **পরিসংখ্যা-বহুভুজ** (Frequency polygon) বলে। পরবর্তী পৃষ্ঠায় উদাহরণটি লক্ষ্য করিলে চিত্রটি বুঝিতে পারা যাইবে।

উদাহরণ 6. 90 জন ছাত্রের প্রাপ্ত-নম্বরের পরিসংখ্যা-ছক হইতে আয়তলেখ অঙ্কন করা হইল।

নম্বরের শ্রেণী	ছাত্রসংখ্যা
10 হইতে 20 এর নীচে	6
20 „ 30 „ „	9
30 „ 40 „ „	16
40 „ 50 „ „	20
50 „ 60 „ „	13
60 „ 70 „ „	11
70 „ 80 „ „	8
80 „ 0 „ „	5
90 „ 100 „ „	2
মোট ছাত্রসংখ্যা =	90

চিত্র—উপরের পরিসংখ্যা ছকের আয়তলেখ।

বর্গাঙ্কিত কাগজের যথাসম্ভব নীচে একটি অনুভূমিক রেখা ও যথাসম্ভব বামে একটি উলম্ব রেখা লইয়া যথাক্রমে উহাদের উপর 10—20, 20—30, 30—40, ইত্যাদি শ্রেণীগুলি এবং 0, 5, 10, 15,……ইত্যাদি ছাত্রসংখ্যা বসান হইল। লক্ষ্য কর, ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের দুই বাহুর দ্বারা 1 জন ছাত্র সূচিত হইতেছে। প্রথম শ্রেণীতে অর্থাৎ (10—20) শ্রেণীতে ছাত্রসংখ্যা 6 ; সুতরাং উহার আয়তলেখ এমন একটি আয়তক্ষেত্র যাহার ভূমি (10—20) দ্বারা চিহ্নিত অনুভূমিক রেখার অংশ এবং উচ্চতা উলম্ব-রেখার বরাবর 6 একক (অর্থাৎ 12টি বাহুর সমান)। মোট 9-টি শ্রেণীর জন্য 9টি আয়তক্ষেত্র হইবে এবং উহাদের মোট ক্ষেত্রফল প্রদত্ত পরিসংখ্যা বিভাজনের আয়তলেখ হইবে।

এখন, অঙ্কিত আয়তক্ষেত্রগুলির উপরের দিকের বাহুর মধ্যবিন্দুগুলি নির্ণয় করা

চিত্র—পূর্বপৃষ্ঠার ছকের পরিসংখ্যা-বহুভুজ।

হইল। উহারা যথাক্রমে B, C, D, E, F, G, H, I এবং J বিন্দুগুলি হইতেছে এইবার, অনুভূমিক রেখার দুই প্রান্তে (0—10) এবং (100—110)—যে দুই

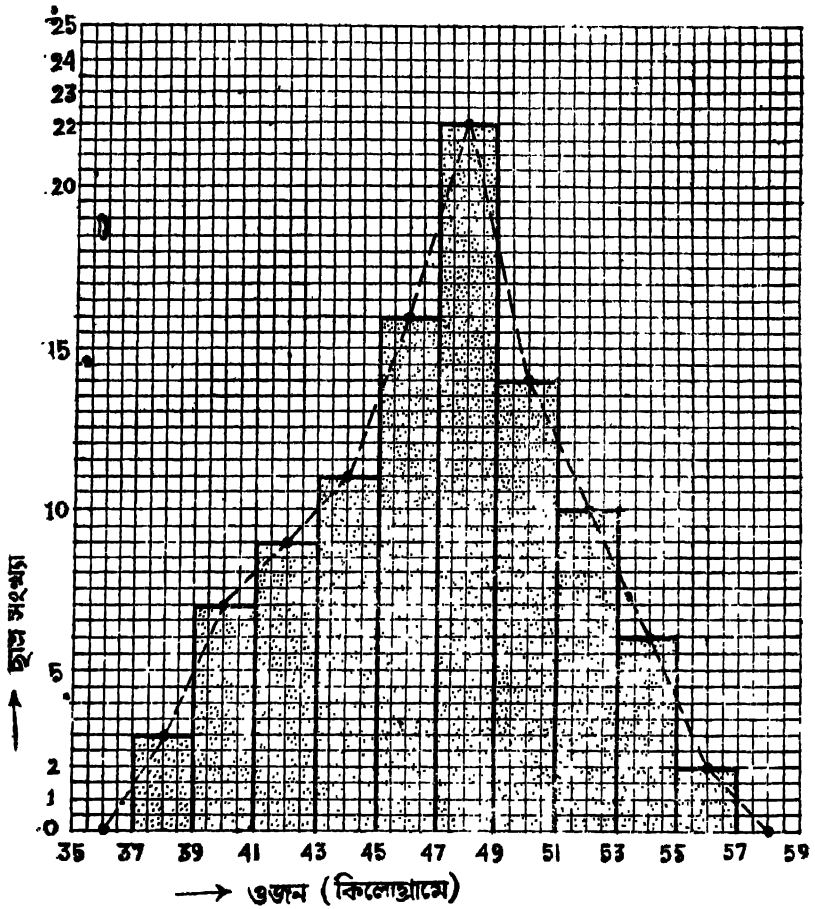
অতিরিক্ত শ্রেণী লওয়া হইয়াছে, তাহাদের মধ্যবিন্দু বাহির করিয়া, উহাদিগকে যথাক্রমে A এবং K নাম দেওয়া হইল। AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ এবং JK রেখাগুলি টানা হইল। ABCDEFGHIJKA-এই বদ্ধ বহুভুজ-(Closed polygon)টিই নির্ণেয় পরিসংখ্যা বহুভুজ।

দ্রষ্টব্য : উপরের উদাহরণে (0—10) এবং (100—110) এই দুইটি শ্রেণীর মধ্যবিন্দু A ও K না লইয়া, কেবল B হইতে J পর্যন্ত মধ্যবিন্দুগুলি যুক্ত করিলে যে বক্ররেখা উৎপন্ন হয় তাহাকে **পরিসংখ্যা-রেখা** (Frequency-curve) বলে। ইহা বদ্ধ-রেখা (Closed curve) নহে।

উদাহরণ 7. নিম্নের ছকে 100 জন ছাত্রের ওজন (আনুমানিক কিলোগ্রামে) দেওয়া হইল। উহা হইতে আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা-বহুভুজ অঙ্কন কর।

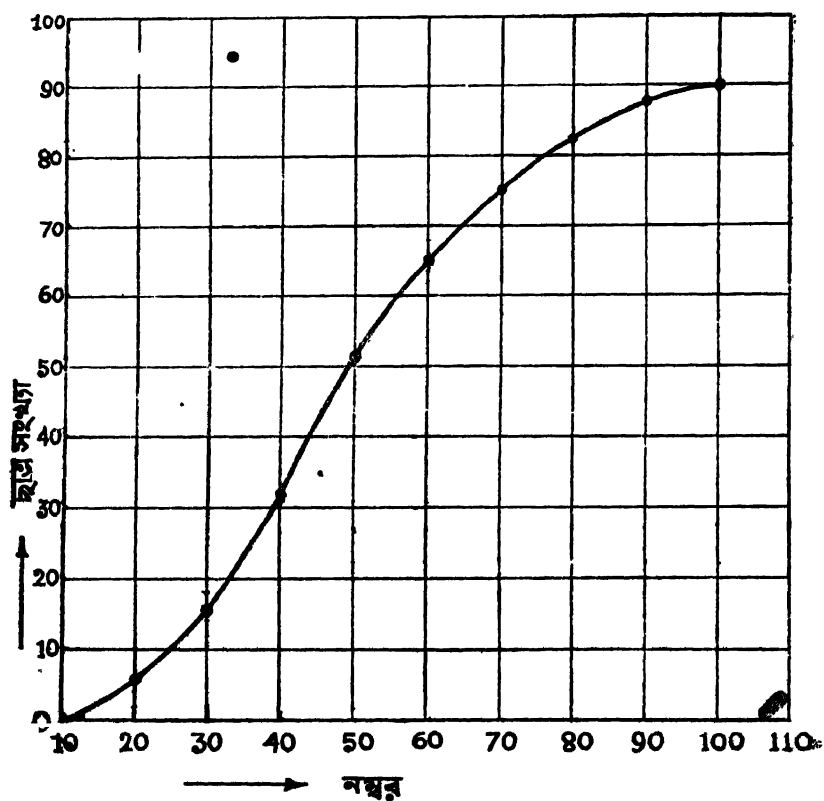
ওজন (কিলোগ্রামে)	ছাত্রসংখ্যা বা পরিসংখ্যা
37—39	3
39—41	7
41—43	9
43—45	11
45—47	16
47—49	22
49—51	14
51—53	10
53—55	6
55—57	2
মোট =	100

পর-পৃষ্ঠায় একই চিত্রে আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা-বহুভুজ পরিবেশিত হইল।

এস্থলে, যেহেতু সর্বনিম্ন শ্রেণী হইতেছে 37—39 ; সুতরাং অনুভূমিক রেখার উপর 35-কে কেন্দ্রবিন্দুতে ধরিয়া 35—37, 37—39, ইত্যাদি শ্রেণীগুলি লেখা হইয়াছে।

চিত্র—আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভুজ।

4·9. ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা-রেখা :

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যাসম্বন্ধে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে। এই বিভাজনের লেখকে **ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা-রেখা** (Cumulative frequency curve or Ogive) বলে। পরবর্তী পৃষ্ঠায়, উদাহরণ 6-এর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা-ছক এবং তাহার লেখ অর্থাৎ ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা-রেখা দেওয়া হইল।

প্রাপ্ত নম্বর	ছাত্রসংখ্যা
10 এর নীচে	0
20 " "	6
30 " "	15
40 " "	31
50 " "	51
60 " "	64
70 " "	75
80 " "	83
90 " "	88
100 " "	90

চিত্র—উপরের ছকের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা-রেখা।

এখন, ছক্ কাগজে পূর্বের মতই একটি অনুভূমিক রেখা ও একটি উল্লম্ব রেখা লওয়া হইল। উল্লম্ব রেখার উপর ছাত্রসংখ্যা সংস্থাপিত করার জন্য ক্ষুদ্রবর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দ্বারা 2 জন ছাত্র সূচিত করা হইয়াছে। যেহেতু, কোন ছাত্র 10-এর নীচে নম্বর পায় নাই, অতএব নির্দেয় রেখাটিকে 0 পর্যন্ত বর্ধিত করা হইয়াছে। ছক্ কাগজের উপর (20, 6), (30, 15), (40, 31), ইত্যাদি বিন্দুগুলি সংস্থাপনপূর্বক বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া যে রেখা পাওয়া গেল, তাহাই হইতেছে প্রদত্ত পরিসংখ্যা-বিভাজনের নির্দেয় ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা-রেখা।

প্রশ্নমালা 2

1. রাশিবিজ্ঞানের বিভিন্নপ্রকার লেখচিত্রের নাম কর এবং উহাদের ব্যবহার কিরূপ?

2. পাই-চিত্র বলিতে কি বুঝ? উদাহরণ সহযোগে উহার ব্যবহার দেখাও।

3. নিম্নের তালিকা হইতে একটি অর্গললেখ ও স্তম্ভলেখ অঙ্কন কর :—

রাজ্যের নাম	পশ্চিমবঙ্গ	বিহার	উত্তর প্রদেশ	মাদ্রাজ	বোম্বাই
* লোকসংখ্যা (আনুমানিক লক্ষ)	250	400	630	570	360

(* লোকসংখ্যা 1951 সালের আদমসুমারী অনুসারে দেওয়া হইল)

4. কোন একটি বিদ্যালয়ে সপ্তম হইতে একাদশ শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা যথাক্রমে 100, 90, 75, 60 এবং 40। একটিমাত্র আয়তক্ষেত্র অঙ্কিত করিয়া উহাদের তুলনামূলক চিত্র অঙ্কন কর।

5. কোন একটি বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণীতে 100 জন ছাত্রের মধ্যে 60 জন হিউম্যানিটিজ, 25 জন সায়েন্স এবং 15 জন কমার্স বিষয় লইয়াছে। পাই-চিত্র দ্বারা উহাদের তুলনামূলক আলোচনা কর।

6. একটি কারখানায় তিনজন নির্দিষ্ট শ্রমিকের মাসিক আয় যথাক্রমে 36 টাকা, 64 টাকা এবং 81 টাকা। তিনটি বর্গক্ষেত্রের এবং বৃত্তের সাহায্যে তুলনামূলক লেখচিত্র অঙ্কন কর।

7. একটি বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণীর 100 জন ছাত্র গণিত পরীক্ষায় যে যে নম্বর পাইয়াছে, তাহা তাহাদের নম্বর অনুযায়ী দেওয়া হইল।

74	82	47	57	90	82	31	2	43	31
22	17	40	38	37	7	67	38	64	16
46	5	69	72	70	61	63	32	16	42
34	29	42	28	65	16	63	10	34	66
65	41	28	3	62	29	28	43	80	68
68	53	20	12	56	70	52	48	72	52
15	45	40	16	58	36	62	3	28	20
32	38	20	37	42	47	48	55	24	37
37	70	6	41	16	52	56	43	29	32
16	64	48	37	42	27	60	10	26	40

সুবিধামত শ্রেণীর দৈর্ঘ্য লইয়া পরিসংখ্যা বিভাজন প্রস্তুত কর এবং উহা হইতে একটি আয়তলেখ ও পরিসংখ্যা বহুভুজ অঙ্কন কর।

8. নিম্নে কোন একটি বিদ্যালয়ের 250 জন ছাত্রের ওজনের তালিকা দেওয়া আছে। উহা হইতে আয়তলেখ, পরিসংখ্যা বহুভুজ ও ক্রম-যৌগিক পরিসংখ্যা রেখা অঙ্কন কর।

ওজন (কিলোগ্রামে)	ছাত্রসংখ্যা
30 — 33	9
33 — 36	25
36 — 39	30
39 — 42	49
42 — 45	62
45 — 48	39
48 51	20
51 — 54	11
54 — 57	3
57 — 60	2
মোট =	250

9. নীচের তালিকায় সিমলা ও কলিকাতার মাসিক গড় উষ্ণতার পরিমাপ আসন্ন সেন্টিগ্রেডে দেওয়া হইয়াছে। উপযুক্ত লেখচিত্রের সাহায্যে উহাদের তুলনা কর।

নাম	সিমলা	কলিকাতা
জানুয়ারী	46	77
ফেব্রুয়ারী	47	82
মার্চ	55	91
এপ্রিল	65	95
মে	72	95
জুন	73	91
জুলাই	69	89
আগস্ট	67	88
সেপ্টেম্বর	66	88
অক্টোবর	63	87
নভেম্বর	56	82
ডিসেম্বর	50	77

10. দুইটি স্কুলের নবম, দশম ও একাদশ শ্রেণীর ছাত্রসংখ্যা নিম্নের তালিকায় ও দ্বারা উহাদের তুলনামূলক লেখচিত্র অঙ্কন কর।

শ্রেণী	ছাত্রসংখ্যা	
	প্রথম স্কুল	দ্বিতীয় স্কুল
নবম	90	110
দশম	80	100
একাদশ	70	90
মোট—	240	300

পঞ্চম অধ্যায়

মধ্যগামিতার মান

(Measures of Central Tendency)

5·1 কিরূপে বহু সংখ্যক পরিসংখ্যানগত তথ্যাবলীকে ছকে সাজাইয়া সঙ্কুচিত (condensed) করা হয় তাহার সম্বন্ধে পূর্বে আমরা আলোচনা করিয়াছি। কিন্তু কেবলমাত্র ছক-বিন্যাসের দ্বারা সজ্জিত তথ্যাবলীর পরিসংখ্যানগত তাৎপর্য কিরূপ তাহা সম্যক উপলব্ধি করা যায় না। তাহা ছাড়া ব্যবহারিক কার্যের জন্য যদি দুই বা ততোধিক শ্রেণীর তথ্যাবলী দেওয়া থাকে তাহা হইলে, তাহাদের মধ্যে তুলনামূলক বিচার করা প্রায় অসম্ভব হইয়া উঠে। এইজন্য তথ্যাবলীর আরও সঙ্কোচন প্রয়োজন এবং উহাদিগকে কোন গাণিতিক মানের দ্বারা প্রকাশ করা দরকার। পরিসংখ্যা-বিভাজনে প্রায়শঃই আমরা দেখিতে পাই যে প্রথমে বা শেষের দিকের শ্রেণীগত পরিসংখ্যা কম এবং মধ্যকার শ্রেণীগুলির পরিসংখ্যা কিছু কিছু বেশী—এমনকি কোন বিশেষ শ্রেণীর পরিসংখ্যা সর্বাপেক্ষা অধিক। ইহার দ্বারা বুঝা যায় যে, বিভাজনের মধ্যদিকে চলকের মানের কোন প্রতিনিধি (Representative) পাওয়া যাইতে পারে।

মনে কর, কোন ব্যক্তির বার্ষিক আয় 6000 টাকা; তাহা হইলে তাহার মাসিক আয় গড়ে 500 টাকা। কিন্তু, এমন হইতে পারে যে, কোন মাসেই তাহার আয় 500 টাকা হয় নাই; ইহার কিছু কম বা বেশী হইতে পারে। কিন্তু এই সকল আয়ের প্রতিনিধিস্বরূপ 500 টাকা ধরা যাইতে পারে। আবার মনে কর, কোন বিদ্যালয়ের দশম ও একাদশ শ্রেণীর ছাত্রদের উচ্চতা তুলনামূলক ভাবে বিচার করিতে হইবে। এক্ষেত্রে উভয় শ্রেণীর প্রত্যেক ছাত্রের উচ্চতার পরিমাপ-তালিকা পাশা-পাশি রাখিয়া তুলনা করা শক্ত, শ্রমসাধ্য ও সময়সাপেক্ষ। কিন্তু যদি আমরা উভয় শ্রেণীর উচ্চতার প্রতিনিধি হিসাবে কোন বিশেষ দুইটি মান বাহির করিতে পারি, তাহা হইলে তাহাদের সাহায্যে অল্প সময়ে সমস্ত ছাত্রের উচ্চতা সম্বন্ধে স্পষ্ট ও তুলনামূলক ধারণা করা যায়।

সুতরাং, পরিসংখ্যানে চলকের মানের সংখ্যা অধিক হইলে উহাদের মানের গুরুত্ব বা প্রকৃতিকে একটিমাত্র প্রতিনিধিমূলক মানের (Representative value) দ্বারা প্রকাশ করা প্রয়োজন। যে এই একটিমাত্র রাশিকে প্রতিনিধি হিসাবে ধরা হয়, তাহাকে **মধ্যগামী মান** বা **মধ্যগামিতার মান** (Measure of Central

Tendency) বলা হয়। যে একটিমাত্র রাশি দ্বারা চলকের বিভিন্ন মানের প্রকৃতি সম্যক প্রকাশ পায়, রাশিবিজ্ঞানে তাহা অতীব প্রয়োজনীয় এবং ঐ মানটিকে অনেক সময় রাশিবিজ্ঞানের **গড়** (Average) বলা হয়। এই কারণেই, অনেক পরিসংখ্যানবিদের মতে রাশিবিজ্ঞানকে **"গড়-বিজ্ঞান"** (Science of averages)-ও বলা হয়।

'গড়' (average) বলিতে স্বভাবতঃই আমরা পাটিগণিতীয় গড় (arithmetic average or mean) বলিয়া জানি। কিন্তু রাশিবিজ্ঞানে এই কথাটি অধিকতর ব্যাপক অর্থে ব্যবহৃত হয়।

5·2. রাশিবিজ্ঞানে একাধিক প্রণালীতে (প্রধানতঃ তিনটি বিভিন্ন উপায়ে) মধ্যগামিতার মান নির্ণয় করা হয় : (1) **গাণিতিক গড়** (Average or Mean), (2) **মধ্যক বা মধ্যমমান** (Median) এবং (3) **ভূয়িষ্ঠক বা সংখ্যাগুরুমান** (Mode). ইহাদের মধ্যে আবার গাণিতিক গড় তিন প্রকারের—

(1) **পাটীগণিতীয় গড় বা যৌগিক গড় (Arithmetic Mean)**

(2) **গুণোত্তর গড় (Geometric Mean)**

(3) **প্রতিগাণিতিক গড় (Harmonic Mean)**

রাশিবিজ্ঞানে সাধারণতঃ যৌগিক গড়েরই প্রচলন বেশী; শেষ দুইটি গড়ের প্রচলন খুবই কম। গুরুত্বানুসারে যৌগিক গড়কে সেইজন্য 'গাণিতিক গড়' বা শুধু 'গড়' বলিয়া ব্যবহার করা হয়।

5·3. প্রতীক চিহ্ন (Symbols) :

যৌগিক গড় (Arithmetic mean or, simply, mean) কে 'M' বা $\bar{x}$ (x-bar পড়িয়া) দ্বারা, মধ্যক (Median) কে M_d. এবং ভূয়িষ্ঠক (Mode) কে Mo. দ্বারা সাধারণতঃ প্রকাশ করা হয়। পরিমাণগত চলক 'x' এবং উহাদের মানের সংখ্যা 'n' দ্বারা প্রকাশিত হয়। চলকের 'n' সংখ্যক মান $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$-এর সমষ্টি $(x_1+x_2+\cdots+x_n)$-কে সংক্ষেপে Σx (Sigma-x উচ্চারণ করিয়া) বলা হইবে। অনুরূপভাবে, যদি $f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n$ যথাক্রমে $x_1, x_2 \cdots, x_n$ এই n-সংখ্যক চলকের মানের পরিসংখ্যা হয়, তাহা হইলে, $(f_1+f_2+\cdots+f_n)$-কে Σf দ্বারা এবং $(f_1 x_1+f_2 x_2+\cdots\cdots+f_n x_n)$-কে Σfx দ্বারা প্রকাশ করা হইবে।

সুতরাং, $(f_1 x_1+f_2 x_2+\cdots\cdots+f_n x_n)$-কে যদি $(f_1+f_2+\cdots\cdots+f_n)$ দ্বারা ভাগ করা যায়, ভাগফল হইবে $\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$ অর্থাৎ

$$\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots f_n}=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}.$$

5·4. গাণিতিক গড় (Arithmetic Mean or A. M.)

গাণিতিক গড় বা গড় দুই প্রকারের—(i) **সরল গড়** (Simple Arithmetic Mean) এবং (ii) **ভারযুক্ত গড়** (Weighted Arithmetic Mean).

(i) **সরল গড়** (Simple Arithmetic Mean) : দৈনন্দিন জীবনে এই প্রকার গড়ের ব্যবহারের প্রচলন খুব বেশী এবং সাধারণভাবে ইহার ব্যবহার সম্বন্ধে তোমরা পাটীগণিতে শিক্ষালাভ করিয়াছ।

একজাতীয় কতিপয় রাশির সমষ্টিকে রাশিগুলির সংখ্যাদ্বারা ভাগ করিলে, যে ভাগফল পাওয়া যায়, তাহাকে **সরল গড়** বলে।

মনে কর, 5 জন বালকের বয়স যথাক্রমে 5, 7, 13, 19 ও 16 বৎসর। সুতরাং, উহাদের বয়সের সরল গড় $=\frac{5+7+13+19+16}{5}=\frac{60}{5}=12$ বৎসর ;

অনুরূপভাবে, যদি x_1, x_2, $x_3,\cdots$, x_n যদি n-সংখ্যক চলকের মান হয়, তাহা হইলে, তাহাদের গড়—

$$M \text{ বা } \bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}=\frac{\Sigma x}{n}.$$

দ্রষ্টব্য : সরল গাণিতিক গড় $=\frac{\text{চলকের মানগুলির সমষ্টি}}{\text{উহার মানগুলির সংখ্যা}}$।

সুতরাং, চলকের মানগুলির সমষ্টি = উহার মানগুলির সংখ্যা × গাণিতিক গড়।

(ii) **ভারযুক্ত গড়** (Weighted Arithmetic Mean) : চলকের বিভিন্ন মান ও উহাদের পরিসংখ্যাসমূহের গুণফলের সমষ্টিকে, পরিসংখ্যাসমূহের সমষ্টি দ্বারা ভাগ করিলে যে ভাগ ফলটি পাওয়া যায়, তাহাকেই **ভারযুক্ত গড়** বলে। পরিসংখ্যা বিভাজন হইতে এই জাতীয় গড় নির্ণয় করা হয়।

মনে কর, 5 জন লোকের আয় 35 টাকা, 7 জন লোকের আয় 38 টাকা, 3 জন লোকের আয় 45 টাকা এবং 4 জন লোকের আয় 46 টাকা।

তাহা হইলে, 35 টাকা হিসাবে 5 জন লোকের মোট আয় $=5\times35=175$ টাকা

38 ,, ,, 7 ,, ,, ,, ,, $=7\times38=266$ টাকা

45 ,, ,, 3 ,, ,, ,, ,, $=3\times45=135$ টাকা

46 ,, ,, 4 ,, ,, ,, ,, $=4\times46=184$ টাকা

অতএব, 19 জন লোকের মোট আয় $=175+266+135+184$ বা 760 টাকা।

$\therefore$ গড় আয় $=\frac{760}{19}$ টাকা $=40$ টাকা।

অনুরূপভাবে, যদি $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ কোন চলকের n-সংখ্যক মান হয় এবং $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_n$ যদি উহাদের ক্রমিক পরিসংখ্যা হয়, তাহা হইলে উহাদের ভারযুক্ত গড়—

$$\text{'M' বা } \bar{x}=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}.$$

রাশিবিজ্ঞানে উল্লিখিত ভারযুক্ত গড় পরিসংখ্যা-বিভাজন-ছকের সাহায্যে নিম্নলিখিতভাবে দেখানো হয় :—

আয় (টাকায়) x	পরিসংখ্যা f	fx
35	5	175
38	7	266
45	3	135
46	4	184
মোট—	$\Sigma f=19$	$\Sigma fx=760$

$\therefore$ গড় $=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}=\frac{760}{19}$ টাকা $=40$ টাকা

উদাহরণ 1. কোন পরীক্ষায় একটি ছাত্র ইংরাজী, বাংলা, ইতিহাস, গণিত ও বিজ্ঞানে যথাক্রমে 48, 58, 64, 72 ও 43 পাইয়াছে। প্রতি বিষয়ের গড় নম্বর নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত নম্বরের যোগফল $= 48 + 58 + 64 + 72 + 43 = 285.$

$\therefore$ প্রতি বিষয়ের গড় নম্বর $= \frac{285}{5} = 57.$

উদাহরণ 2. 31 জন ছাত্রের ওজন আসন্ন পূর্ণসংখ্যক কিলোগ্রামে নিম্নের ছকে দেওয়া হইল। উহা হইতে ছাত্রদের গড় ওজন নির্ণয় কর।

ওজন (কিলোগ্রাম)	65	67	70	73	74	75	77	মোট
ছাত্রসংখ্যা	3	4	6	8	5	3	2	31

ওজন (কিলোগ্রামে) x	ছাত্রসংখ্যা f	fx
65	3	195
67	4	268
70	6	420
73	8	584
74	5	370
75	3	225
77	2	154
মোট—	$\Sigma f = 31$	$\Sigma fx = 2216$

নির্ণেয় ওজনের গড় $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{2216}{31}$ কিলোগ্রাম $= 71 \cdot 5$ কিলোগ্রাম

5·5. পার্থক্য (Deviation) :

একটি রাশি হইতে অপর একটি রাশির **পার্থক্য** (Deviation) বলিতে প্রথম রাশিটি অপেক্ষা দ্বিতীয় রাশিটি কত বেশি বা কম বুঝায়, উহাদের অন্তর বুঝায় না। বেশী বুঝাইবার জন্য '+' চিহ্ন এবং কম বুঝাইবার জন্য '−' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। 12 হইতে 18-এর পার্থক্য $=18-12=+6$ এবং 12 হইতে 5-এর পার্থক্য $=5-12=-7$. সুতরাং, একটি রাশি হইতে অপর একটি রাশির পার্থক্য নির্ণয় করিতে হইলে, দ্বিতীয় রাশিটি হইতে প্রথম রাশিটি বিয়োগ করিতে হইবে। প্রাপ্ত বিয়োগফল নির্ণেয় পার্থক্য হইবে। উহাকে সাধারণতঃ 'd' দ্বারা সূচিত করা হয়।

5·6. গাণিতিক গড়ের একটি গুরুত্বপূর্ণ ধর্ম :

কতিপয় রাশির গড় হইতে ঐ রাশিগুলির পার্থক্যের বীজগণিতীয় যোগফল শূন্য হইবে।

উদাহরণ 1 হইতে 48, 58, 64, 72, ও 43-এর গড় হইতেছে, 57. উহা হইতে রাশিগুলির পার্থক্য যথাক্রমে, $(48-57)$, $(58-57)$, $(64-57)$, $(72-57)$ এবং $(43-57)$ অর্থাৎ -9, 1, 7, 15 এবং -14. উহাদের বীজগণিতীয় যোগফল $=-9+1+7+15-14=0$.

নীচের পরিসংখ্যা বিভাজন ছক হইতে অনুরূপ ফল পাওয়া যাইবে।

ওজন কিলোগ্রামে) x	লোকসংখ্যা f	fx	$\bar{x}=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$	$d=x-\bar{x}$	fd
55	15	825	$\bar{x}=\frac{7625}{125}$	-6	-90
57·5	20	1150		$-3·5$	-70
60	25	1500		-1	-25
62·5	30	1875	$=61$	1·5	45
65	35	2275		4	140
মোট→	$\Sigma f=125$	$\Sigma fx=7625$	−	−	$\Sigma fd=0$

উপরের ছক হইতে দেখা গেল যে, পরিসংখ্যা-বিভাজনে কতিপয় রাশির গড় হইতে রাশিগুলির পার্থক্য ও তাহাদের ক্রমিক পরিসংখ্যার গুণফলের সমষ্টি শূন্য।

গাণিতিক সূত্রের সাহায্যে ঃ

(a) আমরা জানি, সরল গড়, $\bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}$.

অর্থাৎ, $n\bar{x}=\Sigma x$. বা, $\Sigma x-n\bar{x}=0$

বা, $(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+(x_3-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})=0$

বা, $\Sigma(x-\bar{x})=0$.

(b) আবার ভারযুক্ত গড়, $\bar{x}=\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

$$=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$$

বা, $(f_1+f_2+\cdots+f_n)\bar{x}=f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n$

বা, $(f_1x_1+f_2x_2+\cdots+f_nx_n)-(f_1+f_2+\cdots+f_n)\bar{x}=0$

বা, $f_1(x_1-\bar{x})+f_2(x_2-\bar{x})+\cdots+f_n(x_n-\bar{x})=0$

বা, $\Sigma f(x-\bar{x})=0$.

5·7. যদি পরিসংখ্যানের সংখ্যাগত তথ্যের সংখ্যা অধিক হয়, তাহা হইলে পূর্ব আলোচিত সরল যৌগিক পদ্ধতিতে গড নির্ণয় যথেষ্ট সময়সাপেক্ষ ও শ্রমসাধ্য। তাহাছাড়া, আমরা কিছু পূর্বেই দেখিয়াছি যে গড় হইতে রাশিগুলির পার্থক্যের সমষ্টি বা ভারযুক্ত পার্থক্যের (weighted deviations) সমষ্টি সর্বদাই শূন্য হইবে। সুতরাং কোন কল্পিত সংখ্যাকে যদি গড় ধরা যায়, তাহা হইলে ঐ সংখ্যা হইতে রাশিগুলির পার্থক্য বা ভারযুক্ত পার্থক্যের সমষ্টি শূন্য হইবে না। এই কল্পিত সংখ্যা যদি প্রকৃত গড় হইতে ছোট হয়, তাহা হইলে পার্থক্যের সমষ্টি ধনাত্মক রাশি হইবে ; কিন্তু যদি ঐ সংখ্যা প্রকৃত গড় অপেক্ষা বড় হয়, তাহা হইলে পার্থক্যের সমষ্টি ঋণাত্মক হইবে। যাহাই হউক-না-কেন, উক্ত কল্পিত সংখ্যা হইতে রাশিগুলির পার্থক্যের বীজগণিতীয় যোগফলকে ঐ সংখ্যা হইতে প্রকৃত গড়ের পার্থক্য দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল রাশিগুলির সংখ্যার সমান হইবে। ঐ কল্পিত সংখ্যাকে **কল্পিত-গড়** (Assumed mean) বলে। কল্পিত-গড়ের সাহায্যে প্রকৃতগড়-নির্ণয়কে গড়-নির্ণয়ের **সংক্ষিপ্ত উপায়** (Short-cut method) বলে।

5·8. গড়-নির্ণয়ের সংক্ষিপ্ত

(a) সরল গড় :

মনে কর, A = কল্পিত গড এবং $\bar{x}$ = প্রকৃত গড়।

কল্পিত গড় হইতে $x_1, x_2, \cdots, x_n$ রাশিগুলির পার্থক্য,

$$d'_1 = x_1 - A,\ d'_2 = x_2 - A,\ \cdots,\ d'_n = x_n - A$$

এখন, $\Sigma d' = (d_1' + d_2' + \cdots + d'_n)$

$$= (x_1 - A) + (x_2 - A) + \cdots + (x_n - A)$$

$$= (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) - nA$$

$$= n\bar{x} - nA = n(\bar{x} - A),$$

বা, $\dfrac{\Sigma d'}{n} = \bar{x} - A$

$$\therefore\ \bar{x} = A + \Sigma d'$$

(b) ভারযুক্ত গড় :

মনে কর, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ মানগুলির পরিসংখ্যা যথাক্রমে $f_1, f_2, \cdots, f_n$ এবং উহাদের প্রকৃত গড় = $\bar{x}$. আবার, মনে কর, A = কল্পিত গড়।

সুতরাং, $\Sigma fd' = f_1 d_1' + f_2 d_2' + \cdots + f_n d_n'$

$$= f_1(x_1 - A) + f_2(x_2 - A) + \cdots + f_n(x_n - A)$$

$$= (f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n) - A(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$$

$$= \Sigma fx - A\Sigma f$$

বা, $\dfrac{\Sigma fd'}{\Sigma f} = \dfrac{\Sigma fx}{\Sigma f} - A,$ [Σf দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$= \bar{x} - A,$$

$$A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f}.$$

সুতরাং, উল্লিখিত উপায়ে গড়-নির্ণয়ের জন্য নীচের নিয়মগুলি পালন করিলে গড় পাওয়া যাইবে।

(*i*) রাশিগুলির সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মানের মধ্যবর্তী কোন সংখ্যাকে কল্পিত গড় ধর।

(*ii*) উহা হইতে রাশিগুলির পার্থক্য নির্ণয় কর।

(*iii*) এই সমস্ত পার্থক্যের সমষ্টি (বা পরিসংখ্যাদ্বারা গুণ করিয়া তাহাদের সমষ্টি) নির্ণয় করিয়া উহাকে রাশিগুলির সংখ্যা (বা পরিসংখ্যা) দ্বারা ভাগ কর।

(*iv*) উক্ত ভাগফলের সহিত কল্পিত গড় যোগ করিলে, প্রকৃত গড পাওয়া যাইবে।

উদাহরণ 3. 20, 30, 60 এবং 80-এর গড নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, কল্পিত গড় = 50.

কল্পিত গড় হইতে সংখ্যাগুলির পার্থক্য হইতেছে যথাক্রমে $(20-50)$, $(30-50)$, $(60-50)$ এবং $(80-50)$ অর্থাৎ, $-30, -20, 10$ এবং 30 ; উহাদের সমষ্টি $= -30-20+10+30=-10$

$$\text{প্রকৃত গড়} = 50 + \frac{-10}{\ } \quad 50-2\tfrac{1}{2}=47\tfrac{1}{2}.$$

উদাহরণ 4. নিম্নে 100 জন শ্রমিকের সাপ্তাহিক আয়ের পরিসংখ্যা-ছক্ হইতে সংক্ষিপ্ত উপায়ে কল্পিত গড়ের সাহায্যে গড় আয় নির্ণয় করা হইল।

মনে কর, কল্পিত গড় = 20 টাকা

াপ্তাহিক আয় (টাকায়) x	শ্রমিক-সংখ্যা পরিসংখ্যা f	কল্পিত গড় হইতে আয়ের পার্থক্য $d'=(x-A)$	fd'	$\bar{x}=A+\frac{\Sigma fd'}{\Sigma f}$
10	5	-10	-50	$=20+\frac{143}{100}$
17	14	-3	-42	$=20+1{\cdot}43$
20	20	0	0	$=21{\cdot}43$
22	35	2	70	∴ নির্ণেয় গড়
25	19	5	95	আয় = 21 টাকা
30	7	10	70	43 ন.প.
মোট—	$\Sigma f=100$	—	$\Sigma fd'=143$	

5.9. শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা-বিভাজন হইতে গড় নির্ণয় (Determination of Mean from a Grouped Frequency Distribution) :

শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা-বিভাজনে চলকের প্রতিটি মান ও তাহার পরিসংখ্যা কত তাহা অজ্ঞাত; কিন্তু মানগুলিকে বিভিন্ন শ্রেণী বিরতিতে বিভক্ত করা থাকে এবং মানগুলির শ্রেণীগত পরিসংখ্যা দেওয়া থাকে। সুতরাং, পূর্বেকার উদাহরণগুলির মত ইহাতে গড় নির্ণয় করা যায় না। এরূপক্ষেত্রে, শ্রেণীগুলির মধ্যম-মান নির্ণয় করিয়া উহাদিগকে চলকের মান বলিয়া ধরা হয়। সুতরাং, প্রথমে শ্রেণীগুলির মধ্যম-মান নির্ণয় করিয়া উহাদিগকে চলকের মান ধরিতে হয়। এখন, ঠিক পূর্বের পদ্ধতিতেই গড় নির্ণয় করা হয়। নীচের উদাহরণটি লক্ষ্য করিলে বুঝিতে পারিবে।

উদাহরণ 5. কোন স্কুলের নির্বাচনী পরীক্ষায় 252 জন ছাত্রের বিজ্ঞানের নম্বর নীচের তালিকায় শ্রেণীবদ্ধভাবে দেওয়া হইল। উহা হইতে ছাত্রদের গড় নম্বর বাহির করিতে হইবে।

নম্বরের শ্রেণী	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	মোট ছাত্রসংখ্যা
ছাত্র-সংখ্যা	6	12	41	60	71	50	10	2	252

প্রথম পদ্ধতি :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

প্রতিটি শ্রেণী-বিরতির মধ্যম মান = নিম্নসীমা + $\frac{1}{2}$ × শ্রেণী-বিরতির দৈর্ঘ্য।

শ্রেণী-বিরতি (দৈর্ঘ্য = 10)	মধ্যম মান x	পরিসংখ্যা f	fx
10—19	15	6	90
20—29	25	12	300
30—39	35	41	1435
40—49	45	60	2700
50—59	55	71	3905
60—69	65	50	3250
70—79	75	10	750
80—89	85	2	170
মোট =	—	$\Sigma f = 252$	$\Sigma fx = 12600$

নির্ণেয় গড় $= \frac{12600}{252} = 50.$

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f}$$

সমাধানের সুবিধার জন্য, সাধারণতঃ শ্রেণীগুলির যে-কোন একটি মধ্যমানকে কল্পিত গড় ধরা হয়। যে শ্রেণীর পরিসংখ্যা সর্বাপেক্ষা বেশী তাহার মধ্যমানকে কল্পিত গড় ধরিলে উহা প্রকৃত গড়ের নিকটবর্তী হয়। মনে কর, কল্পিত গড় = 55.

শ্রেণী-বিরতি (দৈর্ঘ্য = 10)	মধ্যমান x	পরিসংখ্যা f	কল্পিত গড় হইতে মধ্যমানের পার্থক্য d'	fd'
10—19	15	6	−40	−240
20—29	25	12	−30	−360
30—39	35	41	−20	−820
40—49	45	60	−10	−600
50—59	55	71	0	0
60—69	65	50	10	500
70—79	75	10	20	200
80—89	85	2	30	60
মোট—	—	$\Sigma f = 252$	—	$\Sigma fd' = -1260$

নির্ণেয় গড়, $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} = 55 + \frac{-1260}{252} = 55 - 5 = 50.$

দ্রষ্টব্য : (i) গাণিতিক গড় নির্ণয়ের জন্য প্রত্যেকটি রাশিই লইতে হয়। রাশিগুলির মধ্যে কতিপয় বা কোন একটি রাশির মান খুব বেশী হইলে, নির্ণীত গড়ের দ্বারা রাশিগুলির মানের প্রকৃত তাৎপর্য বুঝা যায় না। যেমন, 7, 8, 10, 12, 13-এর গড় $\frac{7+8+10+12+13}{5} = 10$; কিন্তু উহার সংগে আর একটি রাশি 40 যুক্ত করিলে, গড় 15 হইবে।

(ii) শ্রেণী-বিরতিগুলির দৈর্ঘ্য অসমান হইলে, সাধারণতঃ উহাদের মধ্যমান ও ক্রমান্বক্রমিক পরিসংখ্যার গুণফলের সমষ্টিকে মোট পরিসংখ্যা দ্বারা ভাগ করিয়া গড় নির্ণয় করা হয়।

5·10. মধ্যমমান বা মধ্যক (Median) ঃ

কতকগুলি একজাতীয় রাশিকে তাহাদের মানের উর্ধ্বক্রমে বা অধঃক্রমে সজ্জিত করিলে, যে রাশিটি ঠিক মধ্যস্থলে থাকে, তাহাকে ঐ রাশিসমূহের **মধ্যমমান বা মধ্যক** (Median) বলে।

রাশিগুলির সংখ্যা অযুগ্ম (odd) হইলে, একটিমাত্র মধ্যমমান পাওয়া যায় ; অর্থাৎ রাশি-সংখ্যা n হইলে, $\frac{n+1}{2}$-তম রাশিটি নির্ণেয় মধ্যমমান। কিন্তু রাশি-সংখ্যা যুগ্ম (even) হইলে, দুইটি মধ্যরাশি পাওয়া যায় এবং ঐ দুইটি মধ্যরাশির গড়-ই হইবে রাশিগুলির মধ্যমমান ; অর্থাৎ রাশিসংখ্যা n হইলে, $\frac{n}{2}$-তম রাশি এবং $\left(\frac{n}{2}+1\right)$-তম রাশির গড় করিয়া মধ্যমমান বাহির করিতে হইবে। সুতরাং, রাশিসমূহের মধ্যমমান উহাদিগকে উভয়দিকে দুইটি প্রায় সমান শ্রেণীতে বিভক্ত করে।

উদাহরণ 6. 14, 12, 6, 9, 28, 23, 25, 15, 18 এই রাশিগুলির মধ্যমমান নির্ণয় কর।

রাশিগুলিকে মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাইলে, 6, 9, 12, 14, 15, 18, 23, 25, 28 হয়। উহাদের সংখ্যা 9.

$\therefore$ মধ্যরাশি $=\frac{9+1}{2}$ বা 5-তম পদ।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমমান $=15$.

[লক্ষ্য কর, 15-এর উপরে এবং নীচে সমানসংখ্যক রাশি রহিয়াছে।]

উদাহরণ 7. 36, 43, 15, 28, 19, 29, 31, 46 রাশিগুলির মধ্যমমান নির্ণয় কর।

মানের উর্ধ্বক্রম অনুসারে রাশিগুলি সজ্জিত করিয়া পাই 15, 19, 28, 29, 31, 36, 43, 46 ; উহাদের সংখ্যা $=8$.

$\therefore$ মধ্যরাশিদ্বয়, $\frac{n}{2}$ এবং $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ বা $\frac{8}{2}$ এবং $\frac{8}{2}+1$-তম রাশিদ্বয় অর্থাৎ 4-তম ও 5-তম রাশিদ্বয়।

$\therefore$ মধ্যরাশিদ্বয় হইল, 29 এবং 31 ; উহাদের গড় $=\frac{29+31}{2}=30$.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমমান $=30$.

উদাহরণ 8. নিম্নের ছকে 115 জন ছাত্রের ভূগোলের (পূর্ণসংখ্যা—50) নম্বর দেওয়া হইল। উহা হইতে মধ্যমমান নির্ণয় কর।

নম্বর	15	16	17	18	19	20	21	22	23
ছাত্রসংখ্যা	6	12	14	15	18	25	14	7	4

এখানে ছাত্রসংখ্যা = 115

$\therefore$ মধ্যরাশি $= \frac{115+1}{2}$ বা 58-তম রাশি।

এখানে 58-তম রাশি 18 পরিসংখ্যাযুক্ত শ্রেণীতে পড়িতেছে এবং ঐ শ্রেণীর চলকের মান 19.

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যমমান = 19

উদাহরণ 9. নিম্নলিখিত রাশিমালা হইতে মধ্যমমান নির্ণয় কর :—

8, 13, 9, 12, 11, 10, 9, 12, 14, 13, 9, 8, 10, 9, 9, 8, 12, 11, 13, 12

অসজ্জিত রাশিগুলিকে পংক্তিক্রমে সাজাইয়া পাই,

8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, 14

রাশিগুলির সংখ্যা = 20 এবং একই রাশি একাধিক বার আসিয়াছে।

$\therefore$ মধ্যরাশিদ্বয় $= \frac{20}{2}$ এবং $\frac{20}{2}+1$ অর্থাৎ 10-তম এবং 11-তম রাশি। এখন 10-তম রাশি = 10 এবং 11-তম রাশি = 11

$\therefore$ উহাদের গড় $= \frac{10+11}{2} = 10\cdot5$;

অতএব, নির্ণেয় মধ্যমমান = 10·5.

***5·10 পরিসংখ্যা-বিভাজন হইতে মধ্যক বা মধ্যমমান নির্ণয় (Determination of Median from frequency distribution) :** তথ্যগুলি যদি কোন পরিসংখ্যা-বিভাজনে সজ্জিত থাকে, তাহা হইলে প্রথমে শ্রেণীগুলির ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা নির্ণয় করিতে হয়। পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, কোন শ্রেণীর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা সেই শ্রেণীর পরিসংখ্যা এবং পূর্ববর্তী সকল শ্রেণীর পরিসংখ্যাসমূহের সমষ্টির সমান। আবার, পরিসংখ্যাসমূহের সমষ্টিই চলকের মানগুলির সংখ্যা।

সুতরাং মানসংখ্যা n হইলে, মধ্যকটি এরূপ বিন্দুতে অবস্থিত হইবে যাহা মানসংখ্যাকে $\frac{n}{2}$ সংখ্যক মানবিশিষ্ট সমান দুইভাগে বিভক্ত করে অর্থাৎ উহা এরূপ শ্রেণীতে অবস্থিত হইবে, যে শ্রেণীর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{n}{2}$-এর সমান বা বড় এবং যে শ্রেণীর ঠিক পূর্বের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $\frac{n}{2}$-এর ছোট।

নিম্নের সূত্রটির সাহায্যে শ্রেণীবদ্ধ পরিসংখ্যা-বিভাজন হইতে মধ্যক বা মধ্যমমান নির্ণয় করা হয় :

$$M_d = l_1 + \frac{m-c}{f_1} \times i$$

যেখানে, l_1 = যে শ্রেণী বা বিভাগে মধ্যকটি অবস্থিত, তাহার নিম্ন-সীমা

m = মধ্যক-সংখ্যা অর্থাৎ মধ্যকের অবস্থিতি নির্দেশক-সংখ্যা

c = যে শ্রেণীতে মধ্যকটি অবস্থিত, তাহার পূর্ব পর্যন্ত ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা

f_1 = মধ্যক শ্রেণীর পরিসংখ্যা

i = শ্রেণী-অন্তর।

মধ্যকের সংজ্ঞা হইতে, ইহা স্পষ্ট যে যদি মোট পরিসংখ্যা n হয়, তাহা হইলে n-এর মান যুগ্ম বা বিযুগ্ম যাহাই হউক-না-কেন, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$-তম রাশিটিই মধ্যকের মান।

উদাহরণ 10. নিম্নের ছকে 80 জন ছাত্রের কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত-নম্বর দেওয়া হইল। নম্বরের মধ্যক নির্ণয় কর।

নম্বরের শ্রেণী	পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 — 10	3	3
10 — 20	9	12
20 — 30	15	27
30 — 40	30	57
40 — 50	18	75
50 — 60	5	80

যেহেতু, মোট ছাত্রসংখ্যা (বা পরিসংখ্যা) = 80 ;

অতএব নির্ণেয় মধ্যক (বা মধ্যমমান) $\left(\frac{80+1}{2}\right)$-তম বা 40·5-তম রাশি হইবে।

প্রদত্ত ছকে তৃতীয় শ্রেণীর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 27 এবং চতুর্থ শ্রেণীর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা 57 ; সুতরাং মধ্যকটি চতুর্থ শ্রেণীতে অবস্থিত এবং ঐ শ্রেণীর নিম্নসীমা 30 এবং শ্রেণীগত পরিসংখ্যাও 30.

অতএব, নির্ণেয় মধ্যক $= 30 + \frac{(40{\cdot}5 - 27)}{30} \times 10$

$$= 30 + \frac{13{\cdot}5}{3} = 30 + 4{\cdot}5 = 34{\cdot}5.$$

***5·11. লেখ-চিত্র সাহায্যে মধ্যক নির্ণয় (Graphical method) :**

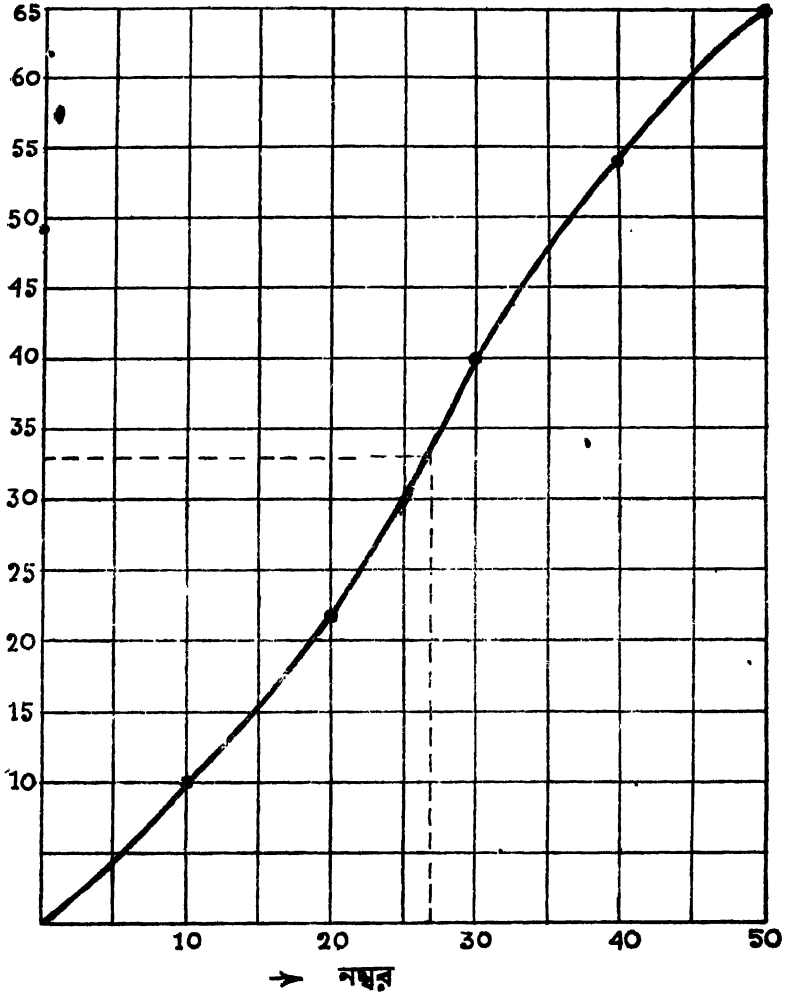
বর্গাঙ্কিত কাগজের উপর ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যার তথ্যগুলি সংস্থাপিত করিয়া যে ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা-রেখা পাওয়া যায়, তাহা হইতে মধ্যকের মান আসন্ন ভাবে নির্ণয় করা যায়। নিম্নের উদাহরণ দ্বারা উহা বুঝানো হইল।

উদাহরণ 11. কোন বিদ্যালয়ের দশম শ্রেণীর 65 জন ছাত্রের ভূগোলের পরীক্ষার নম্বরের তালিকা দেওয়া হইল। ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা রেখা অংকন করিয়া নম্বরগুলির মধ্যক নির্ণয় করিতে হইবে।

নম্বরের শ্রেণী	ছাত্রসংখ্যা বা পরিসংখ্যা	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা
0 — 10	10	10
10 — 20	12	22
20 — 30	18	40
30 — 40	14	54
40 — 50	11	65

উপরিউক্ত ছকটির তথ্যগুলি লইয়া ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা-রেখা অঙ্কিত করা হইল।

[পরবর্তী পৃষ্ঠায় চিত্র দ্রষ্টব্য।]

যেহেতু, মোট ছাত্র-সংখ্যা বা পরিসংখ্যা 65; সুতরাং $\frac{65+1}{2}$ বা 33তম ছাত্রের নম্বরই মধ্যক হইবে। y-অক্ষরেখা হইতে 33 মানটি বাহির করিয়া উক্ত বিন্দুতে

ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা-রেখা পর্যন্ত একটি লম্ব টানা হইল। উহাদের ছেদবিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর একটি লম্ব অংকিত করিয়া দেখা গেল, উহা যে বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করিয়াছে তাহার মান 27; অর্থাৎ লেখচিত্র হইতে দেখা গেল যে, y-এর মান 33 হইলে, x-এর মান 27.

অতএব, নির্ণেয় মধ্যক $=27$.

5·12. সংখ্যাগুরুমান বা ভূযিষ্ঠক (Mode) :

সমজাতীয় কতকগুলি রাশির মধ্যে যে রাশিটি অন্যান্যদের তুলনায় সর্বাপেক্ষা বেশী বার থাকে, তাহাকে রাশিগুলির **সংখ্যাগুরুমান বা ভূযিষ্ঠক** (Mode) বলে ; অর্থাৎ কোন চলরাশির বিভিন্ন মানের মধ্যে যে মানটির পরিসংখ্যা সর্বাধিক হইতেছে, সেই মানটিকে ভূযিষ্ঠক বলা হয়। মনে কর, কিছুসংখ্যক ছাত্রের বয়স (বৎসরে) 12, 14, 9, 11, 13, 14, 12, 12, 13, 9, 12, 12, 15, 10, 12, 14, 13, 12, 12 ; উহাদের মধ্যে 12 বৎসরের ছাত্রই অধিক বলিয়া, বয়সের ভূযিষ্ঠক হইতেছে 12 বৎসর। ভুল এড়াইবার জন্য অসজ্জিত তথ্যগুলিকে পংক্তিক্রমে সজ্জিত করিয়া লইতে হয়।

পরিসংখ্যা-বিভাজনের যে শ্রেণীতে মানগুলির ভূযিষ্ঠক থাকে, তাহাকে **ভূযিষ্ঠক-শ্রেণী** (Modal class) বলে। 192 পৃষ্ঠার পরিসংখ্যা-বিভাজনে (20—30) এই শ্রেণীর পরিসংখ্যা সর্বাপেক্ষা বেশী (অর্থাৎ 18) বলিয়া, উহাকে ভূযিষ্ঠক-শ্রেণী বলা যাইতে পারে [উদা. 11]।

পরিসংখ্যা-বিভাজন হইতে ভূযিষ্ঠক নির্ণয়ের জন্য অনেক স্থলে নীচের সূত্রটি ব্যবহৃত হয় :—

$$M_0 = l_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i.$$

যেখানে, l_1 = ভূযিষ্ঠক শ্রেণীর নিম্নসীমা,

f_1 = „ „ পরিসংখ্যা,

f_0 = „ „ পূর্ববর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যা,

f_2 = „ „ পরবর্তী „

এবং i = শ্রেণী-অন্তর।

192 পৃষ্ঠার উদাহরণে (উদা. 11) (20 − 30) শ্রেণীটি ভূযিষ্ঠক-শ্রেণী ; যেহেতু উক্ত শ্রেণীর পরিসংখ্যা সর্বাধিক অর্থাৎ 18.

ঐ শ্রেণীর নিম্নসীমা 20, উহার পূর্ববর্তী ও পরবর্তী শ্রেণীর পরিসংখ্যা যথাক্রমে 12 ও 14 এবং শ্রেণী-অন্তর = 10.

$\therefore$ নির্ণেয় ভূয়িষ্ঠক, $M_0 = 20 + \frac{18-12}{2\times18-12-14}\times10$

$$= 20 + \frac{6}{36-26}\times10$$

$$= 20 + \frac{6}{10}\times10 = 20+6$$

$$= 26.$$

5·13. রাশিবিজ্ঞানে গড়গুলির পারস্পরিক সম্বন্ধ :

চলকের যে মানের দ্বারা ভূয়িষ্ঠক প্রকাশিত হয়, তাহার দ্বারা মানগুলির বিভাজনের প্রকৃত চিত্র পাওয়া যায়। এই কারণে ইহাকে রাশিবিজ্ঞানের গড়গুলির মধ্যে সর্বোৎকৃষ্ট বলা হয়। কোন কোন স্থলে একাধিক ভূয়িষ্ঠকও পাওয়া যায়।

কোন চলরাশির মানগুলির বিভাজন প্রতিসম (Symmetrical distribution) হইলে গাণিতিক গড়, মধ্যক এবং ভূয়িষ্ঠকের মান পরস্পর সমান হয়। কিন্তু বিভাজন যদি প্রতিসম না হয়, তাহা হইলে উহাদের মধ্যে একটি পারস্পরিক সম্বন্ধ পাওয়া যায়।

গাণিতিক গড় − ভূয়িষ্ঠক = 3 × (গাণিতিক গড় − মধ্যক

যদি কোন অ-প্রতিসম বিভাজনে ভূয়িষ্ঠক ও মধ্যক যথাক্রমে 26 এবং 24 হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিতভাবে গাণিতিক গড়টির আসন্ন মান পাওয়া যাইবে।

উপরের সূত্র হইতে, 2 × গাণিতিক গড় = 3 × মধ্যক − ভূয়িষ্ঠক

$$= 3\times24-26$$

$$= 72-26 = 46$$

$\therefore$ গাণিতিক গড় = 23.

উদাহরণ 12. নিম্নের রাশিগুলির গাণিতিক গড় ও মধ্যক নির্ণয় কর। উহাদের দ্বারা ভূয়িষ্ঠক কত হইবে বাহির কর।

1, 3, 5, 7, 8, 1, 3, 2, 1, 2

$$\text{গাণিতিক গড়} = \frac{1+3+5+7+8+1+3+2+1+2}{10}$$

$$= \frac{33}{10} = 3 \cdot 3$$

রাশিগুলিকে মানের উর্ধ্বক্রমানুসারে সাজাইলে পাই-

1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 7, 8

যেহেতু, রাশিগুলির সংখ্যা 10 ; অতএব $\frac{10}{2}$ এবং $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ বা 5 এবং 6-তম রাশিদ্বয়ের গড়ই হইবে রাশিগুলির মধ্যক।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যক $= \frac{2+3}{2} = 2 \cdot 5$

$\therefore$ ভূয়িষ্ঠক = গাণিতিক গড় − 3 (গাণিতিক গড়—মধ্যক)

$= 3 \cdot 3 - 3(3 \cdot 3 - 2 \cdot 5)$

$= 3 \cdot 3 - 3 \times \cdot 8 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = \cdot 9 = 1$ (আসন্ন)।

মন্তব্য : উপরোক্ত উদাহরণে রাশিগুলির মধ্যে 1 সর্বাপেক্ষা অধিক বার রহিয়াছে, সুতরাং নির্ণেয় ভূয়িষ্ঠক = 1 ; কিন্তু বিভিন্ন গড়গুলির পারস্পরিক সম্বন্ধ হইতে দেখা গেল যে, উহার মান ·9.

***উদাহরণ 13.** নিম্নের তালিকায় 49 জন ছাত্রের কোন পরীক্ষায় প্রাপ্ত নম্বর দেওয়া হইল। উহা হইতে নম্বরের গাণিতিক গড়, মধ্যক ও ভূয়িষ্ঠক নির্ণয় কর।

নম্বরের শ্রেণী	ছাত্রসংখ্যা বা পরিসংখ্যা
5 হইতে 10	5
10 „ 15	6
15 „ 20	15
20 „ 25	10
25 „ 30	5
30 „ 35	4
35 „ 40	2
40 „ 45	2
মোট =	49

নম্বরের শ্রেণী	মধ্যবিন্দু x	পরিসংখ্যা f	ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা	কল্পিত গড়(17·5) হইতে পার্থক্য-d'	fd'
5—10	7·5	5	5	−10	−50
10—15	12·5	6	11	−5	−30
15—20	17·5	15	26	0	0
20—25	22·5	10	36	5	50
25—30	27·5	5	41	10	100
30—35	32·5	4	45	15	60
35—40	37·5	2	47	20	40
40—45	42·5	2	49	25	50
মোট =	—	49	—	—	170

$\therefore$ গাণিতিক গড়, $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} = 17·5 + \frac{170}{49} = 20·97$

মধ্যক $= \frac{49+1}{2}$ বা 25-তম ছাত্রের নম্বর।

$$\therefore \quad M_d. = 15 + \frac{(25-11)}{15} \times 5 = 15 + \frac{14}{3} = 15 + 4·67 = 19·67$$

ভূয়িষ্ঠক, $M_o. = 15 + \frac{15-6}{2 \times 15 - 6 - 10} \times 5$

$$= 15 + \frac{9}{30-16} \times 5 = 15 + \frac{9}{14} \times 5$$

$$= 15 + \frac{45}{14} = 15 + 3·2 = 18·2$$

উদাহরণ 14. কোন বিদ্যালয়ের বিজ্ঞান বিভাগের 25 জন ছাত্রের গণিতের গড় নম্বর 61 এবং কলা বিভাগের 35 জন ছাত্রের গড় নম্বর 58. সমুদয় ছাত্রের গড় নম্বর নির্ণয় কর।

25 জন ছাত্রের মোট প্রাপ্ত নম্বর $= 25 \times 61 = 1525$

35 „ „ „ „ „ $= 35 \times 58 = 2030$

$\therefore$ 60 „ „ „ „ „ $= 1525 + 2030 = 3555$

$\therefore$ সমুদয় ছাত্রের গড় নম্বর $= \frac{3555}{60} = 59\frac{1}{4}$.

প্রশ্নমালা 3

1. গড়, মধ্যক ও ভূয়িষ্ঠক কাহাকে বলে? উহাদের মধ্যে পারস্পরিক সম্বন্ধ লিখ।

2. 40, 58, 72, 64, 54, 45, 61 রাশিগুলির গাণিতিক গড় ও মধ্যক নির্ণয় কর।

3. 1, 3, 7, 4, 7, 6, 4, 3, 2, 3, 1, 3, 2, 3 রাশিগুলির গড়, মধ্যক ও ভূয়িষ্ঠক নির্ণয় কর।

4. কোন বিদ্যালয়ের একাদশ শ্রেণীর 27 জন ছাত্রের পরীক্ষার নম্বর দেওয়া হইল। উহা হইতে নম্বরের গড় ও মধ্যক নির্ণয় কর।

36 34 39 33 50 57 42 46 53
38 41 37 35 32 36 54 48 37
49 52 47 53 43 51 40 50 45

5. নিম্নলিখিত রাশিগুলির গড় ও মধ্যক বাহির কর :—

3, 4, 5, 5, 4, 3, 6, 7, 8, 4, 5, 6, 8, 9, 9, 7, 5, 6, 6, 7

6. নিম্নের পরিসংখ্যা ছকে 72 জন শ্রমিকের মাসিক আয় দেওয়া আছে। বিভিন্ন পদ্ধতিতে মাসিক গড় আয় কত বাহির কর :—

মাসিক আয় (টাকায়)	58	60	62	64	66	68	মোট
শ্রমিক সংখ্যা	12	14	20	13	8	5	$\Sigma f = 72$

*7. নিম্নের ছক হইতে গড় ও মধ্যক নির্ণয় কর :—

শ্রেণী-বিরতি	পরিসংখ্যা
15—20	4
20—25	20
25—30	38
30—35	24
35—40	10
40—45	4
মোট =	100

গড় এবং মধ্যকের মান হইতে ভূয়িষ্ঠক নির্ণয় কর

*8. কোন বিদ্যালয়ের স্কুল-ফাইন্যাল পরীক্ষায় 70 জন ছাত্রের ভূগোলে প্রাপ্ত-নম্বরের তালিকা :

নম্বরের শ্রেণী	ছাত্রসংখ্যা
12—17	4
17—22	14
22—27	16
27—32	13
32—37	8
37—42	6
42—47	4
মোট =	70

উক্ত তালিকা হইতে গড় নম্বর ও মধ্যক নির্ণয় কর। উহা হইতে দেখাও যে, নম্বরগুলির সংখ্যা-গুরুমান 24·5.

9. একদল ছাত্রের বয়সের পরিসংখ্যা-বিভাজন দেওয়া হইল। বয়সের গড় নির্ণয় কর :

বয়স (বৎসরে)	10—11	11—12	12—13	13—14	14—15	15—16	16—17
ছাত্রসংখ্যা	4	11	20	30	19	10	6

10. কোন একটি প্রতিষ্ঠানের কর্মচারীদের গড় আয় মাসিক 60 টাকা। উহাদের 12 জন পদস্থ কর্মচারীর গড় আয় মাসিক 400 টাকা এবং অপর সকল কর্মচারীর মাসিক আয় গড়ে 56 টাকা হইলে, মোট কর্মচারীর সংখ্যা কত ?

11. একটি রাশি হইতে অপর একটি রাশির পার্থক্য বলিতে কি বুঝায় ? উদাহরণসহ রাশি-বিজ্ঞানে গড় নির্ণয়ের জন্য ইহার প্রয়োজনীয়তা কি বুঝাইয়া দাও। সংক্ষিপ্ত উপায়ে পরপৃষ্ঠার ছকটি হইতে গাণিতিক গড় নির্ণয় কর—

শ্রেণী-অন্তর	পরিসংখ্যা
5—10	1
10—15	10
15—20	20
20—25	8
25—30	6
30—35	3
35—40	1
মোট =	49

12. ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা কাহাকে বলে? নীচের ছক্ হইতে গড় এবং ছকটির লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া মধ্যক নির্ণয় কর। উহাদের মান হইতে ভূয়িষ্ঠকের মান কত হইতে পারে বাহির কর।

নম্বর	ছাত্রসংখ্যা	নম্বর	ছাত্রসংখ্যা
0-এর ঊর্ধ্বে	80	60-এর ঊর্ধ্বে	28
10 " "	77	70 " "	16
20 " "	72	80 " "	10
30 " "	65	90 " "	8
40 " "	55	100 " "	0
50 " "	43		

ষষ্ঠ অধ্যায়

বিস্তৃতি ও উহার মান

(Dispersion and its Measures)

6·1. পরিসংখ্যা-বিষয়ক যে-কোন গবেষণার প্রধান লক্ষ্য হইল যতদূর সম্ভব নির্ভুলভাবে সংখ্যাগত তথ্যাবলীর বিশেষ গুণবিশিষ্ট একটি প্রতিনিধি নির্বাচন করা। সুতরাং, আপাতদৃষ্টিতে মনে হয় যে তথ্যসমূহের শ্রেণীগত মানের মধ্যগামী মান যদি জানা থাকে, তাহা হইলে শ্রেণীগুলির মানের সম্যক পরিচয় পাওয়া যাইবে। কিন্তু এ ধারণা ভুল; কারণ মধ্যগামী মান (গড়, মধ্যক বা ভূয়িষ্ঠক) জানা থাকিলেও মানসমূহের পরিবর্তনের ধারা এবং শ্রেণীর উভয় প্রান্তের পার্থক্য সম্বন্ধে কিছুই জানা যায় না। উদাহরণস্বরূপ, নীচে দুই শ্রেণীর নম্বর লওয়া হইল :—

(i) 12, 16, 24, 20, 28, 36, 32, 40

(ii) 21, 25, 19, 23, 29, 27, 33, 31

উপরোক্ত শ্রেণী দুইটির সমষ্টি, মধ্যক ও গড় সমান হইলেও, মানগুলির পরিবর্তনের ধারা মধ্যগামী মান হইতে বিবিধ মানের পার্থক্য বা শ্রেণীগুলিকে সজ্জিত করিলে উহাদের উভয় প্রান্তের মানের পার্থক্য সম্পূর্ণ বিভিন্ন। সুতরাং, কেবলমাত্র মধ্যগামী মান দেখিয়া শ্রেণীর মানগুলির প্রকৃতি সম্বন্ধে সম্যক ধারণা করা যায় না।

সমজাতীয় কতিপয় রাশির মধ্যগামী মান অর্থাৎ যে-কোন প্রকার গড় হইতে রাশিগুলির চিহ্ন-নিরপেক্ষ ভিন্ন ভিন্ন পার্থক্য (Deviation or Variation)-কে **বিস্তৃতি** (Dispersion) বলা হয়।

সাধারণতঃ চারিটি ভিন্ন ভিন্ন উপায়ে বিস্তৃতির পরিমাপ করা হয়।

(i) **প্রসার** (Range), (ii) **গড়-পার্থক্য** (Mean or Average Deviation), (iii) **সমক পার্থক্য** (Standard Deviation) এবং (iv) **চতুর্থক পার্থক্য** (Quartile Deviation).

6·2. প্রসার (Range) :

কোন চলকের মানগুলিকে পংক্তিক্রমে সজ্জিত করিলে যে সর্বনিম্ন মান ও সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়, তাহাদের অন্তর বা পার্থক্যকে **প্রসার** বলে। যেমন, পূর্ব অনুচ্ছেদে

প্রথম শ্রেণীর মানের প্রসার (40 – 12) = 28 এবং দ্বিতীয় শ্রেণীর মানের প্রসার (33 – 19) = 14.

যদিও কোন শ্রেণীর মধ্যগামী মান ও প্রসার দেখিয়া শ্রেণীটির মানসমূহের বিস্তৃতি সম্বন্ধে একটি স্থূল ধারণা করা যায়, কিন্তু ব্যবহারিক কার্যে উহা মোটেই সন্তোষজনক নহে। কারণ, ইহা কেবলমাত্র প্রান্তীয় মানদ্বয়ের উপর নির্ভর করে; 8 জন ছাত্রের ওজন (কিলোগ্রামে) যথাক্রমে, 30, 45, 32, 35, 41, 43, 45 এবং 67। উহাদের প্রসার (67 – 30) বা 47 কি গ্রা.; কিন্তু ইহার দ্বারা মানগুলির বিস্তৃতি অর্থাৎ কিভাবে ছড়ানো রহিয়াছে তাহার সম্বন্ধে প্রকৃত ধারণা করা যায় না।

6·3. গড়-পার্থক্য (Mean Deviation):

সমজাতীয় কতিপয় রাশির পরিসংখ্যা-বিভাজনে কোন মধ্যগামী মান (যে-কোন প্রকার গড়) হইতে ভিন্ন ভিন্ন রাশির চিহ্ন-নিরপেক্ষ পার্থক্যগুলির গাণিতিক গড়কে **গড়-পার্থক্য** (Mean or Average Deviation) বলে। যেহেতু, আমাদের আলোচনার মধ্যে 'গড়' বলিতে শুধু "গাণিতিক গড"কে ধরা হইয়াছে; অতএব, বিপরীতক্রমে, গড়-পার্থক্যের সংজ্ঞা হইতেছে—কোন চলরাশির বিভিন্ন মানগুলির গড হইতে উহাদের পার্থক্যসমূহের গাণিতিক গড় (পার্থক্যগুলিকে ধনাত্মক বলিয়া ধরা হইবে)। নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ্য কর।

উদাহরণ 1. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের গড-পার্থক্য নির্ণয় কর:—

20, 22, 27, 30, 31, 32, 35, 40, 45, 48.

$$\text{রাশিগুলির গড়} = \frac{20+22+27+30+31+32+35+40+45+48}{10} = 33.$$

33 হইতে রাশিসমূহের পার্থক্যগুলি হইতেছে যথাক্রমে, (33 – 20), (33 – 22), (33 – 27), (33 – 30), (33 – 31), (33 – 32), (33 ~ 35), (33 ~ 40), (33 ~ 45) এবং (33 ~ 48) অর্থাৎ 13, 11, 6, 3, 2, 1, 2, 7, 12 এবং 15.

$$\therefore \quad \text{গড়-পার্থক্য} = \frac{13+11+6+3+2+1+2+7+12+15}{10} = \frac{27}{10} = 2{\cdot}7.$$

নিয়ম: (i) প্রথমে রাশিগুলির গড় নির্ণয় করিতে হইবে।

(ii) এই গড হইতে রাশিগুলির চিহ্ন-নিরপেক্ষ পার্থক্যসমূহ (অর্থাৎ পার্থক্য-সমূহকে ধনাত্মক ধরিয়া) বাহির কর।

(iii) এই পার্থক্যগুলির সমষ্টিকে রাশি-সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে প্রাপ্ত ভাগফলই হইবে নির্ণেয় গড় পার্থক্য।

কিন্তু রাশিগুলি যদি পরিসংখ্যা-বিভাজন আকারে সজ্জিত করা থাকে, তাহা হইলে উপরোক্ত প্রণালীতে পার্থক্যগুলি বাহির করিবার পর, উহাদিগকে যথানুক্রমিক পরিসংখ্যার দ্বারা গুণ করিয়া লইতে হয়। ঐ সমস্ত গুণফলের সমষ্টিকে পরিসংখ্যার সমষ্টি দ্বারা ভাগ করিলেই নির্ণেয় গড-পার্থক্য পাওয়া যাইবে।

দ্রষ্টব্য : মনে রাখিও, গড় হইতে বিভিন্ন রাশির পার্থক্যসমূহের বীজগণিতীয় যোগফল(বা পরিসংখ্যা-বিভাজনে উক্ত পার্থক্যসমূহ ও ক্রমিক পরিসংখ্যার গুণফলের সমষ্টি) শূন্য হয়। এ সম্বন্ধে পূর্ববর্তী অধ্যায়ে বিশদ্‌ভাবে আলোচনা করা হইয়াছে।

গড়-পার্থক্য নির্ণয়ের গাণিতিক সূত্র :

(i) যদি চলরাশির মানগুলি x_1, x_2, $x_3, \cdots, x_n$ এবং $\bar{x}$ উহাদের গড হয়, তাহা হইলে, নির্ণেয় গড পার্থক্য $= \dfrac{(x_1 \sim \bar{x}) + (x_2 \sim \bar{x}) + \cdots + (x_n \sim \bar{x})}{x}$

$$= \frac{\Sigma (x \sim x)}{n} = \frac{\Sigma d}{n},$$

যেখানে, গড় হইতে রাশিগুলির চিহ্ন-নিরপেক্ষ পার্থক্য $= d = (x \sim x)$.

(ii) যদি x_1, $x_2, \cdots, x_n$ মানসমূহের ক্রমযৌগিক পরিসংখ্যা $f_1, f_2, \cdots, f_n$ হয়, তাহা হইলে,

$$\text{গড়-পার্থক্য} = \frac{f_1(x \sim \bar{x}) + f_2(x \sim \bar{x}) + \cdots + f_n(x_n \sim \bar{x})}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n} = \frac{\Sigma f(x \sim \bar{x})}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fd}{\Sigma f}$$

উদাহরণ 2. নিম্নের তালিকায় 90 জন ছাত্রের যে যেমন নম্বর পাইয়াছে তাহা দেওয়া হইল। উহা হইতে গড-পার্থক্য নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত-নম্বর	ছাত্রসংখ্যা	প্রাপ্ত-নম্বর	ছাত্রসংখ্যা
30 — 35	10	55 — 60	19
35 — 40	8	60 — 65	18
40 — 45	18	65 — 70	3
45 — 50	3	70 — 75	
50 — 55	4	75 — 80	2

মনে কর, কল্পিত গড় = 52·5

প্রাপ্ত-নম্বর	মধ্য-বিন্দু x	ছাত্র-সংখ্যা f	কল্পিত গড় 52·5 হইতে পার্থক্য d'	fd'	গড় 52 হইতে পার্থক্য d	fd
30—35	32·5	10	−20	−200	19·5	195
35—40	37·5	8	−15	−120	14·5	116
40—45	42·5	18	−10	−180	9·5	171
45—50	47·5	3	− 5	− 15	4·5	13·5
50—55	52·5	4	0	0	0·5	2
55—60	57·5	19	5	95	5·5	104·5
60—65	62·5	18	10	180	10·5	189
65—70	67·5	3	15	45	15·5	47·5
70—75	72·5	5	20	100	20·5	102·5
75—80	77·5	2	25	50	25·5	51
মোট—		$\Sigma f=90$		$\Sigma fd'=-45$		$\Sigma fd=991$

$$\text{গড়} = A + \frac{\Sigma fd'}{\Sigma f} = 52\cdot5 + \frac{-45}{90} = 52\cdot5 - \cdot5 = 52$$

$$\text{গড়-পার্থক্য} = \frac{\Sigma fd}{\Sigma f} = \frac{991}{90} = 11 \text{ (প্রায়)}$$

6·4. সমক-পার্থক্য (Standard Deviation) :

কোন চলকের মানসমূহের গাণিতিক গড় হইতে মানসমূহের পার্থক্যগুলির বর্গ-সমূহের গড়ের বর্গমূলকে ঐ মানসমূহের **সমক-পার্থক্য** (Standard Deviation) বলে। ইহাকে সংক্ষেপে S. D. বা σ (Sigma) দ্বারা সূচিত করা হয়।

যদি $x_1, x_2, \cdots, x_n$—n সংখ্যক মানসমূহের গড় $\bar{x}$ হয়, তবে,

$$\text{S. D.} = \sqrt{\left[\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}\right]}$$

আবার, যদি ঐ n-সংখ্যক মানের ক্রমিক পরিসংখ্যা $f_1, f_2, \cdots, f_n$ হয়, তাহা হইলে,

$$\text{S.D.} = \sqrt{\left[\frac{f_1(x_1-\bar{x})^2 + f_2(x_2-\bar{x})^2 + \cdots\cdots + f_n(x_n-\bar{x})^2}{f_1+f_2+\cdots\cdots+f_n}\right]}$$

$$= \sqrt{\left[\frac{\Sigma f(x-\bar{x})^2}{\Sigma f}\right]}$$

অনেক স্থলে, সমক-পার্থক্য নিম্নলিখিত সূত্রদ্বয় হইতে বাহির করা যায়।

(i) $\text{S.D.} = \sqrt{\left(\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2\right)}$

(ii) সমক-পার্থক্য, $\text{S.D.} = \sqrt{\left[\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\right)^2\right]}$

অতএব সাধারণভাবে, **সমক-পার্থক্য** =

√[রাশিসমূহের বর্গের গড় − রাশিসমূহের গড়ের বর্গ]

উদাহরণ 3. 10 জন ছাত্রের বয়স যথাক্রমে 15, 16, 13, 15, 12, 16, 18, 15 16 এবং 14 বৎসর। বয়সের সমক-পার্থক্য নির্ণয় কর।

বয়সের গড় $= \frac{15+16+13+15+12+16+18+15+16+14}{10}$

$= \frac{150}{10} = 15$ বৎসর।

গড় হইতে বয়সগুলির পার্থক্য যথাক্রমে,

(15 − 15), (16 − 15), (13 − 15), (15 − 15), (12 − 15), (16 − 15), (18 − 15), (15 − 15), (16 − 15) এবং (14 − 15) অর্থাৎ, 0, 1, −2, 0, −3, 1, 3, 0, 1 এবং −1.

উহাদের বর্গগুলির সমষ্টি $= 0+1+4+0+9+1+9+0+1+1 = 27$

∴ সমক-পার্থক্য $= \sqrt{\frac{27}{10}} = 1{\cdot}64$ বৎসর (আসন্ন)

উদাহরণ 4. কোন একটি বিদ্যালয়ের সাপ্তাহিক পরীক্ষায় নবম শ্রেণীর 136 জন ছাত্র পূর্ণসংখ্যা 10-এর মধ্যে যে যে নম্বর পাইয়াছে তাহা দেওয়া হইল। উহা হইতে সমক-পার্থক্য নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত-নম্বর	2	3	4	5	6	7	8	9	মোট
ছাত্রসংখ্যা	7	13	28	40	22	15	10	1	136

$$\text{সমক-পার্থক্য} = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fx}{\Sigma f}\right)^2}$$

প্রাপ্ত-নম্বর (x)	ছাত্রসংখ্যা (f)	fx	fx^2
2	7	14	28
3	13	39	117
4	28	112	448
5	40	200	1000
6	22	132	792
7	15	105	735
8	10	80	640
9	1	9	81
মোট =	136	691	3841

$$\therefore \quad \text{সমক-পার্থক্য} = \sqrt{\frac{3841}{136} - \left(\frac{691}{136}\right)^2}$$

$$= \sqrt{28{\cdot}24 - 25{\cdot}81} = \sqrt{2{\cdot}43} = 1{\cdot}56 \text{ (আসন্ন)।}$$

প্রশ্নমালা 4

1. বিস্তৃতি বলিতে কি বুঝায়? কি কি উপায়ে ইহার পরিমাপ করা যায়?

2. গড়-পার্থক্য ও সমক-পার্থক্য কাহাকে বলে? উহাদের মান নির্ণয় করিবার প্রণালী বর্ণনা কর।

3. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের গড়-পার্থক্য ও সমক-পার্থক্য নির্ণয় কর

 (i) 20, 85, 120, 40, 60.

 (ii) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

4. কোন একটি বিদ্যালয়ের সাপ্তাহিক পরীক্ষায় এক বিষয়ে (পূর্ণসংখ্যা 20) 300 জন ছাত্র যে যে নম্বর পাইল, তাহা নীচের তালিকায় দেওয়া হইল। উহা হইতে সমক-পার্থক্য নির্ণয় কর।

প্রাপ্ত-নম্বর	ছাত্রসংখ্যা
7	2
8	8
9	12
10	29
11	58
12	92
13	67
14	25
16	7
মোট—	300

*5. কোন বিদ্যালয়ের দশম ও একাদশ শ্রেণীর উচ্চতার তালিকা দেওয়া হইল উহা হইতে ছাত্রদের উচ্চতার সমক-পার্থক্য বাহির কর।

উচ্চতা সে. মি.	131-135	135-139	139-143	143-147	147-151	151-155	155-159	159-163	163-167
ছাত্রসংখ্যা	8	12	18	22	13	12	9	4	2

$\Sigma f = 100$

*6. নিম্নের তালিকা হইতে গড়-পার্থক্য ও সমক-পার্থক্য নির্ণয় কর।

বয়স (বৎসর)	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	মোট
লোকসংখ্যা	16	17	19	26	19	12	109

রাশি-বিজ্ঞান

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 197—200)

2. 56·3, 58 **3.** 3·5, 3, 3 **4.** 43·63, 43

5. 5·85, 6 **6.** 62·17 **7.** 28·9, 28·49, 27·67

8. 27·2, 26·3 **9.** 13·53 **10.** 1032

11. 19·64 **12.** 51·75, 52·33, 55

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 206—207)

3. (i) 30, 34·9 (ii) 3·43, 16

4. 1·56 **5.** 7·88 **6.** 13·3, 15·49

বীজগণিত

বীজগণিত

(নবম শ্রেণী)

প্রথম অধ্যায়

নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা ও মৌলিক নিয়মাবলী
(Directed Numbers and Fundamental Laws)

[পুনরালোচনা]

নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা : 5 কিলোগ্রাম চাউলের মূল্য 2 টা. 75 ন. প. বা ছেলেটির বয়স 13 বৎসর ইত্যাদি কথার অর্থ বুঝিতে কষ্ট হয় না ; কিন্তু যদি বলা হয়, 9টায় যাইতে হইবে, বাড়ী হইতে বিদ্যালয় 8 কিলোমিটার বা ঘরের মেঝে হইতে উঠান 1 মিটার, তাহা হইলে কথার অর্থ ঠিক বোধগম্য হয় না। সকাল 9টায়, 8 কিলোমিটার দক্ষিণে, 1 মিটার নীচু প্রভৃতি কালবাচক, দিগ্বাচক প্রভৃতি উক্তি ব্যবহার করিলে অর্থ পরিষ্কার হইয়া যায়। এইরূপ বিশিষ্টার্থে ব্যবহৃত সংখ্যাকে **নিয়ন্ত্রিত সংখ্যা** (Directed Numbers) বলে।

বীজগণিতে এইরূপ নিয়ন্ত্রিত সংখ্যার প্রকৃতিগত পার্থক্য বুঝাইবার জন্য সংখ্যাটির পূর্বে '+' বা '−' চিহ্ন স্থাপন করা হয়। '+' বা '−' চিহ্নের যে-কোন একটি চিহ্ন-দ্বারা এক অর্থ প্রকাশ করিলে অপর চিহ্নদ্বারা তাহার বিপরীত অর্থ ব্যক্ত করা হয়।

যেমন, '+3' টাকা দ্বারা যদি 3 টাকা আয় প্রকাশ করা হয়, তবে '−3' টাকা দ্বারা 3 টাকা ব্যয় বুঝা যাইবে ; '+2' মিটার দ্বারা যদি 2 মিটার উচ্চতা ব্যক্ত করা হয়, তবে '−2' মিটার দ্বারা অবশ্যই 2 মিটার গভীরতা বুঝিতে হইবে।

এই ব্যাখ্যানুযায়ী সমজাতীয় দুইটি বিপরীত রাশিকে যথাক্রমে '+' ও '−' চিহ্নদ্বারা প্রকাশ করা হয় বলিয়া '+' এবং '−' চিহ্নকে **ভেদচিহ্ন** (Signs of affection) বলা হয়।

ধনসংখ্যা ও ঋণসংখ্যা : '+' চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে **ধনসংখ্যা** (Positive Number) এবং '−' চিহ্নযুক্ত সংখ্যাকে **ঋণসংখ্যা** (Negative Number

বলে। কোন চিহ্নযুক্ত না হইলেও সংখ্যাটিকে ধনসংখ্যা বলিয়া মনে করিতে হয় $a+b-c$ রাশিমালাটিতে a চিহ্নবিহীন হইলেও ইহা একটি ধনসংখ্যা।

ধনচিহ্ন বা ঋণচিহ্ন বর্জিত সংখ্যার মানকে ঐ সংখ্যার **পরম মান** (Absolute value) বলে। '$+a$' এবং '$-a$' সংখ্যা দুইটির উভয়েরই পরম মান a.

ধনসংখ্যা ও ঋণসংখ্যাকে চিত্রদ্বারা প্রকাশ :

মনে কর, RS একটি সোজা রাস্তা। ইহার উপর এক কিলোমিটার দূরে দূরে খুঁটি পোঁতা আছে। এক ব্যক্তি X চিহ্নিত খুঁটি হইতে ডান দিকে 10 কি. মি. হাঁটিয়া S পর্যন্ত গেল। এখন যদি সে S হইতে আবাব বাম দিকে 10 কি.মি. হাঁটিয়া আসে, তবে সে পূর্বস্থানেই প্রত্যাবর্তন .করিবে। কাজেই, দেখা যাইতেছে, 'ডান' এবং 'বাম' শব্দ দুইটি ব্যবহার করিয়া বিপরীত দিকে বুঝানো হইতেছে। এখন 10-এর পূর্বে '+' চিহ্ন দিয়া যদি ডানদিকের 10 কি. মি. বুঝানো হয়, তবে 10-এর পূর্বে '−' চিহ্ন দিয়া বামদিকের 10 কি.মি. বুঝাইবে। এখন যদি খুঁটিটির একটি নির্দিষ্ট বিন্দু 'X' মনে করা হয়, তাহা হইলে XQ = +5 কি.মি., XP = −5 কি.মি., XS = +10 কি.মি. এবং XR = −10 কি.মি. বলিতে পারা যায়।

প্রশ্নমালা 1

যথাস্থানে '+' চিহ্ন বা '−' চিহ্ন স্থাপন কর :

1. 15 টাকা লাভ, 12 টাকা ক্ষতি।
2. 36 মিটার উচ্চ, 9 মিটার গভীর।
3. 17 জনের আগমন, 12 জনের প্রস্থান।
4. আয়ের $\frac{1}{4}$ হ্রাস, আয়ের $\frac{1}{4}$ বৃদ্ধি।
5. 275 টাকা জমা, 187 টাকা খরচ।
6. কোন ঘড়ি 3 মিনিট স্লো, কোন ঘড়ি 8 মিনিট ফাস্ট
7. 35 বৎসর পূর্বে, 22 বৎসর পরে।
8. 13 কিলোমিটার উত্তরে, 20 কিলোমিটার দক্ষিণে।

মৌলিক নিয়মাবলী
(Fundamental Laws)

চিহ্নবিষয়ক নিয়ম (Laws of Signs) :

(a) যোগ ও বিয়োগ :

যদি 4 টাকা আয়কে +4 টাকা ধরা হয়, তবে 4 টাকা ব্যয়কে −4 টাকা ধরিতে হয়। কিন্তু 4 টাকা আয়, 4 টাকা ব্যয়েরই বিপরীত ; সুতরাং −(−4) টাকা বলিলে 4 টাকা ব্যয়ের বিপরীত, অর্থাৎ 4 টাকা আয় বুঝাইবে। সুতরাং −(−4) টাকা =+4 টাকা।

4 টাকা আয়ের বিপরীতকে −(+4) টাকা লেখা যায়। ইহার অর্থ 4 টাকা ব্যয়। সুতরাং −(+4) টাকা = −4 টাকা।

ধনচিহ্ন ও ঋণচিহ্ন সম্পর্কীয় এই সম্বন্ধগুলিকেই **চিহ্নবিষয়ক নিয়ম** বলে। সাধারণতঃ এই নিয়মকে নিম্নলিখিতভাবে লেখা হয় :—

(i) $+(+a)=+a$ (ii) $-(-a)=+a$

(iii) $+(-a)=-a$ (iv) $-(+a)=-a$

(b) গুণন :

সাধারণভাবে ধরিলে,—

(i) $(+a)\times(+b)=+ab$ (ii) $(-a)\times(+b)=-ab$

(iii) $(+a)\times(-b)=-ab$ (vi) $(-a)\times(-b)=+ab$

ইহাই গুণনের চিহ্নবিষয়ক নিয়ম।

(c) ভাগ :

সাধারণভাবে ধরিলে,—

(i) $ab\div b=a$ যেহেতু $a\times b=ab$

(ii) $(-ab)\div b=-a$ যেহেতু $(-a)\times b=-ab$

(iii) $ab\div(-b)=-a$ যেহেতু $(-a)\times(-b)=ab$

(iv) $(-ab)\div(-b)=a$ যেহেতু $a\times(-b)=-ab$

ইহাই ভাগের চিহ্নবিষয়ক নিয়ম।

যোগফল নির্ণয়-প্রণালী :

(1) $(+7)+(+5)=+(7+5)=12$; . $(+a)+(+b)=+(a+b)$

(2) $(-7)+(-5)=-(7+5)=-12$; . $(-a)+(-b)=-(a+b)$

(3) $(+7)+(-5)=+(7-5)=2$; . $(+a)+(-b)=+(a-b)$

(4) $(-7)+(+5)=-(7-5)=-2$; . $(-a)+(+b)=-(a-b)$

বিয়োগফল নির্ণয়-প্রণালী :

(1) $(+7)-(+5)=+(7-5)=2$; . $(+a)-(+b)=+(a-b)$

(2) $(+7)-(-5)=+(7+5)=12$; . $(+a)-(-b)=+(a+b)$

(3) $(-7)-(+5)=-(7+5)=-12$; . $(-a)-(+b)=-(a+b)$

(4) $(-7)-(-5)=-(7-5)=-2$; . $(-a)-(-b)=-(a-b)$

সংযোগ বিধি ও বিনিময় বিধি :

(i) রাশিমালার পদগুলির ক্রম (order) পরিবর্তন না করিয়া যে-কোন রূপে সংযুক্ত (group) করিলেও মানের তারতম্য হইবে না। ইহাকে **সংযোগ বিধি** (Associative Law) বলে। যথা,—

$$a-b+c-d=(a-b)+(c-d)=(a-b+c)-d=a-b+(c-d)$$

(ii) রাশিমালার পদগুলি চিহ্নসহ স্থান পরিবর্তন করিলেও মানের তারতম্য হইবে না। ইহাকে **বিনিময় বিধি** (Commutative Law) বলে। যথা,—

$$a-b+c-d=a+c-b-d=a-d+c-b=a-b-d+c$$

বন্ধনী অপসরণ :

(1) বন্ধনীর পূর্বে '+' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর মধ্যস্থিত রাশির পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন না করিয়াই বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়।

(2) বন্ধনীর পূর্বে '−' চিহ্ন থাকিলে বন্ধনীর মধ্যস্থিত রাশির পদগুলির চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়। যথা,—

(i) $a+(b-c)=a+b-c$ (ii) $a-(b+c)=a-b-c$

(3) বন্ধনী অপসারণ করিবার কালে সাধারণতঃ রেখাবন্ধনী হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমে ক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় বন্ধনী অপসারণ করিতে হয়।

(4) দুইটি বন্ধনীর মধ্যে অথবা কোন সংখ্যা ও তাহার পরবর্তী বন্ধনীর মধ্যে কোন চিহ্ন না থাকিলে উহাদের মধ্যে 'এর' আছে মনে করিয়া উহাদিগকে গুণ করিতে হয়।

উদাহরণ। সরল কর : $x-[y-2x-\{3y+(z-\overline{2x+3y})\}]$

প্রদত্ত রাশিমালা $=x-[y-2x-\{3y+(z-2x-3y)\}]$

$=x-[y-2x-\{3y+z-2x-3y\}]$

$=x-[y-2x-3y-z+2x+3y]$

$=x-y+2x+3y+z-2x-3y$

$=3x-2x+3y-4y+z$

$=x-y+z$

প্রশ্নমালা 2

সরল কর :

1. $-2x-[-3y+\{-4z-(x-\overline{2y+3z})\}]$
2. $a-[b-c+a-\{b-(a+b-\overline{c+a-b}+c)\}]$
3. $a^2-[c^2-\{a^2-(a^2-c^2-b^2)-b^2\}-b^2]$
*4. যদি $V=5a+4b-6c$, $X=-3a-9b+7c$, $Y=20a+7b-5c$ এবং $Z=13a-5b+9c$ হয়, তাহা হইলে

   $V-(X+Y)+Z$-এর মান কত ?
5. $5c-4b$-কে $2a-3b+4c$, $2a+3b-4c$ এবং $-2a+3b+4c$-এর সমষ্টি হইতে বিয়োগ কর।
6. $a=3$, $b=4$ এবং $c=5$ হইলে দেখাও যে,

   $a-[-b-\{-c-(-a-\overline{b-c})-a\}-b]-c=0$

গুণন :

সংযোগ বিধি ও বিনিময় বিধি :

গুণফলের উৎপাদকগুলিকে যে-কোন প্রকারে সজ্জবদ্ধ করা যাইতে পারে ইহাকেই গুণনের সংযোগ বিধি বলে। যথা,—

$abc=a\times b\times c=(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$

গুণফলের উৎপাদকগুলি যে-কোন ক্রম অনুসারে সাজানো যাইতে পারে। ইহাকে **গুণনের বিনিময় বিধি** বলে। যথা,—

$$abc=(a\times b)\times c=(b\times a)\times c=b\times(a\times c)=b\times(c\times a)$$

সূচক বিধি (Index Law):

সংজ্ঞানুযায়ী $a^2=a\times a=aa$

সুতরাং $a^2\times a^3=aa.aaa=a^5=a^{2+3}$

সাধারণভাবে, m ও n কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে,

$a^m\times a^n=(a\,a\,a\cdots\cdots m$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত $)\times$

$(a\,a\,a\cdots\cdots n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত $)$

$=a\,a\,a\cdots\cdots(m+n$-সংখ্যক গুণনীয়ক পর্যন্ত $)$

a^{m+n}

বিচ্ছেদ বিধি:

একটি বহুপদ রাশিকে কোন অখণ্ড সংখ্যা দ্বারা গুণ করিতে হইলে, অখণ্ড সংখ্যাটি দ্বারা রাশির প্রত্যেকটি পদকে গুণ করিতে হয়। ইহাকে **গুণনের বিচ্ছেদ বিধি** (Distributive Law) বলে। যেমন,—

(i) $(a+b)\times x=ax+bx$

(ii) $(a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$

ভাগ:

সংযোগ বিধি, বিনিময় বিধি ও বিচ্ছেদ বিধি:

যদিও ভাগ ক্রিয়া গুণনের বিপরীত প্রক্রিয়া, তথাপি গুণনের সংযোগ বিধি ভাগ প্রক্রিয়ার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নহে, কিন্তু বিনিময় বিধি ও বিচ্ছেদ বিধি প্রযোজ্য হইবে।

(i) $a\div b\div c=a\div c\div b$—ইহা **ভাগের বিনিময় বিধি।**

(ii) $(a+b)\div x=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x}$—ইহা **ভাগের বিচ্ছেদ বিধি।**

কিন্তু $a\div b\div c=a\div(b\div c)=(a\div b)\div c$—ইহা সত্য নহে।

অপসারণ বিধি (Rule of Cancellation) :

বীজগণিতের ভাজ্য এবং ভাজকের সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ করিয়া ভাগফল নির্ণয় করা যায়। যথা,—

$$15abc \div 5b = \frac{15abc}{5b} = \frac{3 \times 5 \times a \times b \times c}{5 \times b} = 3ac$$

[অপসারণ প্রক্রিয়ায় কেবলমাত্র সাধারণ গুণনীয়কগুলিই অপসারণ করা চলে।]

সূচক বিধি :

সূচক m এবং n অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে এবং $m > n$ হইলে,

$a^m \div a = a^{m-n}$

যেহেতু $m > n$, সুতরাং $m-n$ একটি অখণ্ড ধনসংখ্যা।

$\times a^n = a^{m-n+n} = a^m$

উদাহরণ। সরল কর : $7a-5b-2[3a-2b-\{4(a-b)-3a\}]$

রাশিমালা $= 7a-5b-2[3a-2b-\{4a-4b-3a\}]$

$= 7a-5b-2[3a-2b-4a+4b+3a]$

$= 7a-5b-6a+4b+8a-8b-6a$

$= 7a-6a+8a-6a-5b+4b-8b$

$= 15a-12a-13b+4b$

$= 3a-9b$

প্রশ্নমালা 3

সরল কর :

1. $10a-2(x-\frac{1}{2}a)+6(x+\frac{1}{3}a)$
2. $3(2a-b)-4(3a-\overline{2b-a})+5\{b-(a-b)\}$
3. $5a^2-3[a^2-2\{a-5(a+1)\}-3\{5a^2-2(5a-\overline{1-a^2})\}]$
4. $\frac{2}{3}x(6a-3b)-\frac{4}{5}x(5b-15c)+\frac{2}{3}x(9c+6a)$
5. $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-d}{cd}+\frac{d-a}{da}$

*6. $A = 3\{3x-3(3x-3.3x-y)\}$ হইলে,

$x-3(3x-A-y)-y$-এর মান কত হইবে ?

দ্বিতীয় অধ্যায়

সরল সমীকরণ ও তদ্বিষয়ক প্রশ্নাবলী

(Simple Equations and Allied Problems)

[পুনরালোচনা]

বীজগণিতীয় দুইটি রাশি সমান চিহ্ন (=) দ্বারা সংযুক্ত থাকিলে উভয়ের পরস্পর সম্পর্ককে **সমীকরণ** (Equation) বলে। সমান চিহ্নের বাম দিকের রাশিকে **বাম পক্ষ** (Left Side) এবং ডান দিকের রাশিকে **দক্ষিণ পক্ষ** (Right Side) বলে। উভয়পক্ষের রাশিতে ব্যবহৃত অক্ষরের একটি মাত্র বা একাধিক বিশেষ (particular) মানের দ্বারা সমীকরণের উভয় পার্শ্বের সমতা বজায় থাকে। যেমন,

$4x+7=15$, $x^2=5x-6$, ইত্যাদি।

যখন রাশি দুইটির সমতা উহাতে ব্যবহৃত অক্ষরের মান-নিরপেক্ষ হয়, তখন সমীকরণটিকে **অভেদ** (Identity) বলে। যেমন,

$x+4+2x+3=3x+7$, $x^2-1=(x-1)(x+1)$ ইত্যাদি

সমীকরণ সমাধান (Solving an Equation) :

সমীকরণের সমাধান-প্রণালী নিম্নলিখিত স্বতঃসিদ্ধগুলির উপর নির্ভর করে :—

(a) সমান সমান বস্তুর সহিত সমান সমান বস্তু যোগ করিলে যোগফলগুলি সমান হয়।

(b) সমান সমান বস্তু হইতে সমান সমান বস্তু বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি সমান হয়।

(c) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান সংখ্যা দ্বারা গুণ করিলে গুণফলগুলি সমান হয়।

(d) সমান সমান বস্তুকে সমান সমান সংখ্যা দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফলগুলি সমান হয়।

উদাহরণ 1. $6(4x+1)-8(2x-5)=10(3x+2)-18$, সমীকরণটি সমাধান

$6(4x+1)-8(2x-5)=10(3x+2)-18$

বা, $24x+6-16x+40=30x+20-18$

বা, $24x-16x-30x=20-18-6-40$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $-22x=-44$

বা, $x=\frac{-44}{-22}=2$ নির্ণেয় বীজ $x=2$

উদাহরণ 2. $\frac{x-6}{4}-\frac{2(2x-15)}{9}+2=\frac{2x}{15}-\frac{x-12}{3}$, সমীকরণটি সমাধান কর।

$$\frac{x-6}{4}-\frac{2(2x-15)}{9}+2=\frac{2x}{15}-\frac{x-12}{3}$$

উভয়পক্ষের হরগুলির ল. সা. গু. 180 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া,

$$180.\frac{x-6}{4}-180.\frac{2(2x-15)}{9}+180.2=180.\frac{2x}{15}-180.\frac{x-12}{3}$$

বা, $45(x-6)-20.2(2x-15)+360=12.2x-60(x-12)$

বা, $45x-270-80x+600+360=24x-60x+720$

বা, $-35x+690=-36x+720$

বা, $36x-35x=720-690$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $x=30$ $\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=30$

উদাহরণ 3. সমাধান কর: $\frac{x+\cdot75}{\cdot125}-\frac{x-\cdot25}{\cdot25}=9$

$$\frac{x+\cdot75}{\cdot125}-\frac{x-\cdot25}{\cdot25}=9$$

উভয়পক্ষের হরগুলির ল. সা. গু. ·25 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া

$$\cdot25\times\frac{x+\cdot75}{\cdot125}-\cdot25\times\frac{x-\cdot25}{\cdot25}=\cdot25\times9$$

বা, $2(x+\cdot75)-(x-\cdot25)=2\cdot25$

বা, $2x+1\cdot5-x+\cdot25=2\cdot25$

বা, $x+1\cdot75=2\cdot25$

বা, $x=2\cdot25-1\cdot75=\cdot5$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ $x=\cdot5$

প্রশ্নমালা 4

সমীকরণগুলি সমাধান কর :

1. $6x-10+8x=14x+8-8x$
2. $8(5x-6)-4(4x-3)=6(5-x)-6$
3. $4(3x-4)+6(4x+5)=8(2x+1)+14(x+3)$
4. $(2x+5)(x+3)=2(x+2)(x+4)$
5. $2(x+2)(x+3)+3(x+5)(x+2)=5(x+3)(x-1)$
6. $\frac{x}{2}-2=\frac{x}{4}+\frac{x}{5}-1$
7. $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}+\frac{x-3}{4}=1$
8. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{5}+\frac{x+3}{6}=4$
9. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}=16$
10. $\frac{2x+1}{5}-\frac{3x-2}{6}=\frac{1}{2}$
11. $\frac{5x-1}{7}+\frac{9x-5}{11}=\frac{9x-7}{5}$
12. $\frac{5x+6}{12}+\frac{3x-4}{5}=2(x-9)$ [C. U. 1915]

*13. $\frac{3(5x-1)}{4}-\frac{5(4x-1)-3}{3}=2+3x$ [D. B. 1942]

14. $\frac{1}{8}(x-2)-\frac{1}{7}(x-4)=\frac{1}{12}(2x-3)-2\frac{3}{4}$
15. $\frac{1}{3}(x-4)+\frac{3}{7}(2x-7)-\frac{7}{9}(1+5x)=4(1-x)$
16. $\cdot125x-\cdot05(4x-1)=\cdot1(3-x)-\cdot15$
17. $2\cdot1x-3(2x-\cdot3)=1\cdot5(5-x)$

*18. $\frac{x}{\cdot5}-\frac{1}{\cdot05}+\frac{x}{005}-\frac{1}{\cdot0005}=0$

19. $\cdot65x+\frac{\cdot585x-\cdot975}{\cdot6}=\frac{1\cdot56}{\cdot[illegible]}-\frac{\cdot39x-\cdot78}{\cdot9}$
20. $\frac{1\cdot05x+10}{50}+\frac{1\cdot35x-2}{20}-\frac{1\cdot5x-18}{10}+\frac{1\cdot5x-3}{15}=1\cdot854$

সরল সমীকরণ বিষয়ক প্রশ্নাবলী :

পাটীগণিতের নানারূপ প্রশ্ন সমীকরণের সাহায্যে সমাধান করা যায়। পাটীগণিতের প্রশ্নে কতকগুলি রাশি থাকে জ্ঞাত এবং কতকগুলি রাশি থাকে অজ্ঞাত

প্রশ্নে-প্রদত্ত সর্তাদি সাঙ্কেতিক বাক্যের (Symbolic expression) সাহায্যে সমীকরণে প্রকাশ করিয়া অজ্ঞাত রাশিগুলির মান নির্ণয় করাকে সমস্যার সমাধান (Solution of a problem) বলে। সমীকরণের জ্ঞাত রাশির সাহায্যে অজ্ঞাত রাশিটি নির্ণয় করা হয়।

উদাহরণ 1. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার সমষ্টি 189 হইলে সংখ্যা তিনটি কত?

মনে কর, একটি সংখ্যা $= x$.

$\therefore$ উহার পূর্বের সংখ্যাটি $=(x-1)$ এবং পরের সংখ্যাটি $=(x+1)$

এখন, প্রদত্ত সর্তানুসারে, $(x-1)+x+(x+1)=189$

বা, $x-1+x+x+1=189$

বা, $x+x+x=189+1-1$

বা, $3x=189$ $\therefore$ $x=\frac{189}{3}=63$

আবার, $x-1=63-1=62$ এবং $x+1=63+1=64$

$\therefore$ ক্রমিক সংখ্যা তিনটি $=62, 63$ এবং 64

উদাহরণ 2. কোন্ সংখ্যার এক-চতুর্থাংশ উহার এক-ষষ্ঠাংশ অপেক্ষা 12 বেশী?

মনে কর, সংখ্যাটি $=x$

$\therefore$ সংখ্যাটির এক-চতুর্থাংশ $=\frac{x}{4}$ এবং এক-ষষ্ঠাংশ $=\frac{x}{6}$

এখন, প্রদত্ত সর্তানুসারে, $\frac{x}{4}-\frac{x}{6}=12$

বা, $12\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{6}\right)=12\times 12$

বা, $3x-2x=12\times 12$

বা, $x=144$ $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=144$

উদাহরণ 3. এক নৃপতি 32 বৎসর বয়সে সিংহাসনে আরোহণ করেন এবং তাঁহার জীবনের $\frac{5}{13}$ অংশ রাজত্ব করেন। নৃপতি কত বৎসর বয়সে পরলোক গমন করেন? [C. U. 1951]

মনে কর, নৃপতি x বৎসর বয়সে পরলোক গমন করেন।

$\therefore$ প্রদত্ত সর্তানুসারে, তিনি রাজত্ব করেন $(x-32)$ বৎসর।

নৃপতির জীবনের $\frac{5}{13}$ অংশ $= x$ এর $\frac{5}{13}$ বা, $\frac{5x}{13}$ বৎসর।

সর্তানুসারে, $x-32=\frac{5x}{13}$

বা, $13(x-32)=5x$

বা, $13x-5x=13\times32$

বা, $8x=13\times32$

বা, $x=\frac{13\times32}{8}=52$ $\therefore$ নির্ণেয় বয়স $=52$ বৎসর।

উদাহরণ 4. একটি থলিতে মোট 44টি মুদ্রা আছে ; তন্মধ্যে কতিপয় '10 ন প.' মুদ্রা এবং অবশিষ্টগুলি '5 ন প.' মুদ্রা। থলিতে মোট 3 টা 50 ন.প. থাকিলে কোন্ প্রকারের কতগুলি মুদ্রা আছে ?

মনে কর, থলিতে '20 ন.প.' মুদ্রার সংখ্যা x

$\therefore$ '5 ন.প.' মুদ্রার সংখ্যা $=(44-x)$

এখন, 1টি '10 ন.প.' $=\frac{1}{10}$ টাকা ; $\therefore$ x-সংখ্যক '10 ন.প.' $=\frac{x}{10}$ টাকা ;

আবার, 1টি '5 ন.প.' $=\frac{1}{20}$ টাকা ;

$\therefore$ $(44-x)$-সংখ্যক '5 ন.প.' $=\frac{44-x}{20}$ টাকা।

$\therefore$ সর্তানুসারে, $\frac{x}{10}+\frac{44-x}{20}=3\frac{1}{2}$

বা, $2x+44-x=70$

বা, $x=70-44=26$

$\therefore$ '10 ন প.' মুদ্রা $=26$টি এবং '5 ন.প.' মুদ্রা $=(44-26)$ বা 18টি।

প্রশ্নমালা 5

1. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 456 এবং অন্তর 178; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

2. 54-কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন এক অংশের দ্বিগুণ অপর অংশের তিনগুণ অপেক্ষা 8 বেশী হয়। [W. B. S. B 1954 (Spl.)]

3. কোন্ সংখ্যার এক-তৃতীয়াংশ, এক-চতুর্থাংশ এবং এক-পঞ্চমাংশের সমষ্টি 282 হইবে ?

4. তিনটি ক্রমিক সংখ্যার সমষ্টি 264 ; সংখ্যা তিনটি কি কি ?

5. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার অর্ধেক, উহার পরবর্তী সংখ্যাটির এক-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা 2 বেশী। [C. U. 1917]

6. বর্তমানে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ। 8 বৎসর পর পিতার বয়স পুত্রের বয়সের পৌনে দুই গুণ হইলে, পুত্রের বর্তমান বয়স কত ?

7. এক নৃপতি 30 বৎসর বয়সে সিংহাসনে আরোহণ করিয়া জীবনের $\frac{5}{11}$ অংশ রাজত্ব করেন। তিনি কত বৎসর রাজত্ব করেন ? [C. U. 1930]

8. এক ব্যক্তি তাহার ঋণের এক-তৃতীয়াংশ অপেক্ষা 200 টাকা অধিক দিয়া দেখিল যে, সে যাহা দিয়াছে তাহা অপেক্ষা আরও 210 টাকা অধিক দিলে সে ঋণমুক্ত হয়। তাহার ঋণের পরিমাণ কত ?

9. A, B ও C-এর মধ্যে কিছু টাকা ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। A সমস্ত টাকার অর্ধেক পাইল, A ও B একত্রে 76 টাকা এবং A ও C একত্রে 62 টাকা পাইল। টাকার পরিমাণ কত এবং কে কত টাকা পাইল ? [A. U. 1925]

10. একটি বাক্সে যত টাকা আছে, তাহার 3 গুণ '10 ন.প.', 4 গুণ '5 ন.প.' এবং 5 গুণ '2 ন.প.' মুদ্রা আছে। বাক্সটিতে মোট 51 টা. 20 ন.প. আছে। কোন্ মুদ্রা কতগুলি আছে ?

11. 150 জন বালক-বালিকাকে 49 টা. 75 ন.প. এরূপে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল যেন, প্রত্যেক বালক 50 ন.প. এবং প্রত্যেক বালিকা 25 ন.প. পাইল। বালকের সংখ্যা কত ?

*12. 248 টাকা A ও B-কে এরূপে ভাগ করিয়া দাও যেন A-র অংশের $\frac{3}{4}$, B-এর অংশের $\frac{4}{5}$-এর সমান হয়।

13. একটি বাক্সে যত অর্থ ছিল, তাহার $\frac{1}{2}$ তুলিয়া লইয়া উহার $\frac{1}{3}$ বাক্সে রাখিলাম। ইহাতে আমার নিকট 40 টা. 50 ন.প. রহিল। বাক্সে প্রথমে কত ছিল ?

14. দৈনিক 3 টা. 50 ন.প. মজুরী পাইবে, কিন্তু যেদিন কামাই করিবে সেদিন সে 1 টা. 75 ন.প. জরিমানা দিবে, এই সর্তে এক মজুরকে নিযুক্ত করা হইল। মজুর এক মাস পরে 78 টা. 75 ন.প. মজুরী পাইল। সে কত দিন কামাই করিয়াছিল ?

15. এক ব্যক্তি 6 ঘণ্টায় 80 কি.মি. গেল। কিছু পথ সে ঘণ্টায় 10 কি.মি. বেগে এবং বাকি পথ সে ঘণ্টায় 18 কি.মি. বেগে গেল। সে কোন্ বেগে কত পথ গেল ?

16. ঘণ্টায় 4 কি মি. বেগে গেলে কোন স্থানে যাইতে যে সময় লাগে ঘণ্টায় 6 কি মি. বেগে গেলে তদপেক্ষা 1 ঘণ্টা বেশী সময় লাগে। স্থানটির দূরত্ব কত?

•17. কোন স্থান হইতে A ঘণ্টায় $3\frac{1}{2}$ কি মি. বেগে চলিতে লাগিল। তাহার $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা পর B ঐ স্থান হইতে ঘণ্টায় $4\frac{1}{2}$ কি.মি. বেগে A-র অভিমুখে চলিতে লাগিল। B, A-কে কতদূরে যাইয়া ধরিবে?

*18. A 72-টি এবং B 36-টি মার্বেল লইয়া খেলিতে আরম্ভ করিল। A কতকগুলি মার্বেল হারিয়া দেখিল যে, তাহার মার্বেলের 4 গুণ, B-এর মার্বেলের 5 গুণের সমান হইয়াছে। A কতগুলি মার্বেল হারিয়াছিল?

*19 এক ব্যক্তি 4000 টাকায় একটি বাড়ী বিক্রয় করায় কিছু ক্ষতি হইল। যদি সে বাড়ীটি 5000 টাকায় বিক্রয় করিত, তবে তাহার পূর্বেকার ক্ষতির $\frac{2}{3}$ লাভ হইত। বাড়ীটির ক্রয়মূল্য কত? [D B 1924 ; C. U. 1949]

20. 8000 টাকায় একটি বাড়ী বিক্রয় করায় বিক্রয়মূল্যের $\frac{1}{5}$ লাভ হইল। বাড়ীটি কত টাকায় বিক্রয় করিলে ঐ বিক্রয়মূল্যের $\frac{1}{7}$ ক্ষতি হইত?

তৃতীয় অধ্যায়

সূত্রাবলী ও উহাদের প্রয়োগ

(Formulae and their applications)

[পুনরালোচনা]

এস্থলে সপ্তম ও অষ্টম শ্রেণীতে পঠিত কতিপয় সূত্রের পুনরালোচনা করা হইতেছে।

সূত্র 1. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

সূত্র 2. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$

(ii) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$

(iii) $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

(iv) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

(v) $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

সূত্র ৪. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

(ii) $2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

সূত্র ৫. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

আসলে সূত্রটি একটি গুণন প্রক্রিয়া। বীজগণিতের গুণন প্রক্রিয়ার বহু অঙ্ক এই সূত্রের সাহায্যে কষা যায়।

উদাহরণ 1. বর্গ নির্ণয় কর : $2a+3b-4c$

$(2a+3b-4c)^2=\{2a+(3b-4c)\}^2$

$=(2a)^2+2.2a.(3b-4c)+(3b-4c)^2$

$=4a^2+4a(3b-4c)+\{(3b)^2-2.3b.4c+(4c)^2\}$

$=4a^2+9b^2+16c^2+12ab-24bc-16ca$

উদাহরণ 2. সরল কর :

$(x+y+z)^2-2(x+y+z)(y+z-x)+(y+z-x)^2$

$(x+y+z)$-এর পরিবর্তে a এবং $(y+z-x)$-এর পরিবর্তে b ধরিলে,

রাশিমালা $=a^2-2ab+b^2$

$=(a-b)^2$

$=\{(x+y+z)-(y+z-x)\}^2$

$=(x+y+z-y-z+x)^2=(2x)^2=4x^2$

উদাহরণ 3. $m-\frac{1}{m}=6$ হইলে $m^2+\frac{1}{m^2}$-এর মান কত ?

$m^2+\frac{1}{m^2}=\left(m-\frac{1}{m}\right)^2+2.m.\frac{1}{m}$

$=6^2+2=36+2=38$

[এই অঙ্কটি কষিবার সময় $\left(m-\frac{1}{m}\right)$-এর মান দেওয়া আছে বলিয়া $m^2+\frac{1}{m^2}$ $=\left(m-\frac{1}{m}\right)^2+2m.\frac{1}{m}$ লেখা হইয়াছে। যদি $\left(m+\frac{1}{m}\right)$-এর মান দেওয়া থাকিত, তাহা হইলে $m^2+\frac{1}{m^2}=\left(m+\frac{1}{m}\right)^2-2m.\frac{1}{m}$ লিখিতে হইত।]

✓ **উদাহরণ 4.** ab-কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

$$ab=\frac{1}{4}(4ab)=\frac{1}{4}(2ab+2ab)$$
$$=\frac{1}{4}(a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2)$$
$$=\frac{1}{4}\{(a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2)\}$$
$$=\frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\}$$
$$=\frac{1}{4}(a+b)^2-\frac{1}{4}(a-b)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

[মনে রাখিও, **দুইটি রাশির গুণফল**

=(রাশিদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধ)² − (রাশিদ্বয়ের অন্তরফলের অর্ধ)²]

✓ **উদাহরণ 5.** যদি $a+b+c=12$ এবং $a^2+b^2+c^2=50$ হয়, তাহা হইলে $ab+bc+ca$-র মান নির্ণয় কর।

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\times 2(ab+bc+ca)$$
$$=\frac{1}{2}\{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\}$$
$$=\frac{1}{2}(12^2-50)$$
$$=\frac{1}{2}(144-50)=\frac{1}{2}\times 94=47$$

✓ **উদাহরণ 6** $a+2b-3c$-কে $a-2b+3c$ দ্বারা গুণ কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(a+2b-3c)(a-2b+3c)$
$$=\{a+(2b-3c)\}\{a-(2b-3c)\}$$
$$=a^2-(2b-3c)^2$$
$$=a^2-(4b^2-12bc+9c^2)=a^2-4b^2-9c^2+12bc$$

✓ **উদাহরণ 7.** $3a^2+5b^2$, $3a^2-5b^2$ এবং $9a^4+25b^4$-এর ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গুণফল $=(3a^2+5b^2)(3a^2-5b^2)(9a^4+25b^4)$
$$=\{(3a^2)^2-(5b^2)^2\}(9a^4+25b^4)$$ [প্রথম দুইটি রাশি গুণ করিয়া]
$$=(9a^4-25a^4)(9a^4+25b^4)$$
$$=(9a^4)^2-(25b^4)^2=81a^8-625b^8$$

প্রশ্নমালা 6

1. বর্গ নির্ণয় কর :

(i) $\left(\frac{5}{6m}+\frac{4m}{15}\right)$ (ii) $\left(\frac{p}{2m}-\frac{3m}{4p}\right)$ (iii) $(x^2+2y^2-3z^2)$

2. সরল কর :

(i) $(5x+6y-7z)^2+(5x+7y-6z)^2-2(5x+6y-7z)(5x+7y-6z)$

(ii) $553{\cdot}6\times553{\cdot}6-1107{\cdot}2\times554{\cdot}8+554{\cdot}8\times554{\cdot}8$

মান নির্ণয় কর :

3. $x^2+\frac{1}{x^2}$, যখন $x+\frac{1}{x}=\sqrt{2}$ 4. $p^2+\frac{1}{p^2}$, যখন $p-\frac{1}{p}=5$

5. $m-n$, যখন $m+n=16$ এবং $mn=55$

6. $x^4+\frac{1}{x^4}$, যখন $x-\frac{1}{x}=2$ এবং $x+\frac{1}{x}=2$

7. $x^2+y^2+z^2$, যখন $x+y+z=13$ এবং $xy+yz+zx=50$

8. $a+b+c$, যখন $a^2+b^2+c^2=9$ এবং $ab+bc+ca=8$

9. $xy+yz+zx$, যখন $x+y+z=9$ এবং $x^2+y^2+z^2=31$

10. $(3x-2y)^2+(y-2x)^2-(3x-2y)(2y-4x)$, যখন $5x=3y$

11. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$, যখন $a=x+y$, $b=x-y$ এবং $c=x+2y$

12. $x^4+y^4-2x^2y^2$, যখন $x=a+\frac{1}{a}$ এবং $y=a-\frac{1}{a}$ [C. U. 1944]

13. (i) $4(2m+n)(m+2n)$-কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

i) $(a^2+b^2)^2$-কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

গুণফল নির্ণয় কর :

14. $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y)$ 15. $(\frac{2}{3}mn+\frac{3}{4}pq)(\frac{2}{3}mn-\frac{3}{4}pq)$

16. $(xy+\sqrt{z})(xy-\sqrt{z})$ 17. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

18. $(2x-3y-4z)(2x+3y+4z)$

19. $(3m-2n+5p)(2n-3m+5p)$

20. $(ab-\sqrt{ab}+1)(ab+\sqrt{ab}+1)$

ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর :

21. $(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

22. $(m^4n^4-m^2n^2+1)(m^2n^2-mn+1)(m^2n^2+mn+1)$

23. $(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$ [D. B. 1943]

সূত্র 5. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$......(i)

$=a^3+b^3+3ab(a+b)$.........(ii)

সূত্র 6. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$......(i)

$=a^3-b^3-3ab(a-b)$ ......(ii)

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

(ii) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

উদাহরণ 1. ঘন নির্ণয় কর : $2a+3b-4c$

$(2a+3b-4c)^3=\{(2a+3b)-4c\}^3$

$=(2a+3b)^3-3(2a+3b)^2.4c+3.(2a+3b).(4c)^2-(4c)^3$

$=(2a)^3+3.(2a)^2.3b+3.2a.(3b)^2+(3b)^3-3(4a^2+12ab+9b^2).4c$
$+3(2a+3b).16c^2-64c^3$

$=8a^3+27b^3-64c^3+36a^2b+54ab^2-108b^2c+144bc^2-48a^2c$
$+96ac^2-144abc$

উদাহরণ 2. সরল কর : $(x+y-z)^3+(x-y+z)^3+6x\{x^2-(y-z)^2\}$

মনে কর, $a=x+y-z$ এবং $b=x-y+z$

$\therefore\ a+b=x+y-z+x-y+z=2x$

এখন, রাশিমালা $=a^3+b^3+3.2x.(x+y-z)(x-y+z$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)$

$=(a+b)^3$

$=(2x)^3=8x^3$

উদাহরণ 3. $x-\frac{1}{x}=p$ হইলে, $x^3-\frac{1}{x^3}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3x.\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)=p^3+3p$$

উদাহরণ 4. যদি $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$ হয়, প্রমাণ কর, $a^3+\frac{1}{a^3}=0$

[C. U. 1945 ; D. B. 1930 ; Pat. U. 1928]

$$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3a.\frac{1}{a}\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\left(a+\frac{1}{a}\right)-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$$

$$=3\left(a+\frac{1}{a}\right)-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$$ $\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\right.$-এর পরিবর্তে 3 বসাইয়া]

$=0$ (প্রমাণিত)।

প্রশ্নমালা 7

1. ঘন নির্ণয় কর :

(i) $a+2b-3c$ (ii) $m^2-3n+pq$

সরল কর :

2. $(3x+2y)^3-(2x+3y)^3-3(3x+2y)(2x+3y)(x-y)$
3. $(m+n+p)^3+6m\{m^2-(n+p)^2\}+(m-n-p)^3$
4. $(x+y+z)^3-6(y+z)\{x^2-(y+z)^2\}-(x-y-z)^3$
5. $1{\cdot}34\times1{\cdot}34\times1{\cdot}34+8{\cdot}66\times8{\cdot}66\times8{\cdot}66+30\times1{\cdot}34\times8{\cdot}66$
6. $3{\cdot}1416\times3{\cdot}1416\times3{\cdot}1416-3\times3{\cdot}1416\times2{\cdot}1416-2{\cdot}1416\times2{\cdot}1416\times2{\cdot}1416$ [D. B. 1942]

মান নির্ণয় কর :

7. $x^3+\frac{1}{x^3}$; যখন $x+\frac{1}{x}=p$ [G. U. 1950]
8. $x^3-\frac{1}{x^3}$; যখন $x-\frac{1}{x}=c$ [P. U. 1933]
9. $x^3+\frac{1}{x^3}-10$; যখন $x+\frac{1}{x}=5$ [W. B. S. B. 1954 (comp.)]

10. a^3-8b^3-24ab ; যখন $a-2b=4$

11. $2x-\frac{2}{x}=3$ হইলে, প্রমাণ কর, $8\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)=63$ [B. U. 1929]

12. $a+b=3$ হইলে, প্রমাণ কর, $a^3+b^3+9ab=27$ [C. U. 1927]

13. $a-b=x$ হইলে, প্রমাণ কর, $a^3-b^3-3abx=x^3$

14. $a^3+b^3=28$ এবং $a+b=4$ হইলে, ab-এর মান কত ?

15. $x+y=5$ এবং $xy=7$ হইলে, $x^3+y^3+4(x-y)^2$-এর মান নির্ণয় কর। [Pat. U. 1950

16. $x=\sqrt[3]{3}+3$ হইলে, দেখাও যে, $x^3-9x^2+27x-30=0$

সূত্র 7. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

সূত্র 8. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

এই সূত্র দুইটিও আসলে গুণন প্রক্রিয়া। বীজগণিতের বহু গুণের অঙ্ক এই সূত্রে সাহায্যে কষা যায়।

উদাহরণ 1. ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর :

$$(x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)$$

$$\text{রাশিমালা}=(x-y)(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4)$$
$$=(x^2-y^2)\{(x^2)^2+x^2y^2+(y^2)^2\}$$
$$=(x^2)^3-(y^2)^3=x^6-y^6$$

উদাহরণ 2. সরল কর :

$$(m+3n)(m^2-3mn+9n^2)-(5m+6n)(25m^2-30mn+36n^2)$$
$$+(6m+7n)(36m^2-42mn+49$$

$$\text{রাশিমালা}=(m+3n)\{m^2-m.3n+(3n)^2\}-(5m+6n)$$
$$\{(5m)^2-5m.6n+(6n)^2\}+(6m+7n)\{(6m)^2-6m.7n+(7$$
$$=\{m^3+(3n)^3\}-\{(5m)^3+(6n)^3\}+\{(6m)^3+(7n)^3\}$$
$$=m^3+27n^3-(125m^3+216n^3)+216m^3+343n^3$$
$$=92m^3+154n^3$$

প্রশ্নমালা 8

গুণফল নির্ণয় কর :

1. $(2a+7b)(4a^2-14ab+49b^2)$
2. $\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)$
3. $(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}})(m^{\frac{2}{3}}-m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}})$
4. $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$
5. $\left(2a-\frac{1}{a}\right)\left(4a^2+\frac{1}{a^2}+2\right)$
6. $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}\right)$

ধারাবাহিক গুণফল নির্ণয় কর :

7. $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)(8x^3-27y^3)$
8. $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)(a^6-8a^3b^3+64b^6)$
9. $\left(p^3+\frac{1}{q^3}\right)\left(p^2+\frac{p}{q}+\frac{1}{q^2}\right)\left(p-\frac{1}{q}\right)$
10. $(m^{\frac{1}{3}}-n^{\frac{1}{3}})(m^{\frac{2}{3}}+m^{\frac{1}{3}}n^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{2}{3}})(m^2+n^2+mn)$

সরল কর :

11. $(3x+5y)(9x^2-15xy+25y^2)-(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$ $+(x+5y)(x^2-5xy+25y^2)$
12. $(p-q)(p^2+pq+q^2)+(3p-2q)(9p^2+6pq+4q^2)$ $-(4p-3q)(16p^2+12pq+9q^2)$
13. $(x-y)(x^2+xy+y^2)+(y-z)(y^2+yz+z^2)$ $+(z-x)(z^2+zx+x^2)$
14. $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}-1\right)-\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(a^2+1+\frac{1}{a^2}\right)$

চতুর্থ অধ্যায়

সহজ উৎপাদক

(Easy Factors)

[পুনরালোচনা]

কোন রাশি যদি একাধিক রাশির গুণফল হয়, তাহা হইলে শেষোক্ত রাশিগুলিকে প্রথমোক্ত রাশিটির **উৎপাদক** (Factor) বলে। গুণফলের উৎপাদকগুলিকে বিচ্ছিন্ন করিবার প্রণালীকে **উৎপাদক-বিশ্লেষণ** (Resolution into Factors) বলা হইয়া থাকে। সুতরাং উৎপাদক-বিশ্লেষণকে গুণনের বিপরীত প্রক্রিয়া বলা যাইতে পারে।

সূত্র হইতে পাওয়া যায় $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$; সুতরাং যে সকল রাশি a^2-b^2-এর আকারের, তাহাদিগকে আমরা উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিতে পারি।

$$a^2-b^2=a^2+ab-ab-b^2$$
$$=a(a+b)-b(a+b)$$
$$=(a+b)(a-b)$$

এমন অনেক রাশি আছে যাহারা ঠিক a^2-b^2-এর আকারে নাই। তাহাদিগকে উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করিতে হইলে তাহাদিগকে a^2-b^2-এর আকারে পরিণত করিয়া লইতে হয়।

উদাহরণ 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : a^4+64b^4

$$a^4+64b^4=(a^2)^2+(8b^2)^2$$
$$=(a^2+8b^2)^2-2\,a^2\,8b^2$$
$$=(a^2+8b^2)^2-(4ab)^2=(a^2+4ab+8b^2)(a^2-4ab+8b^2)$$

উদাহরণ 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^4+a^2b^2+b^4$

$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2)^2+(b^2)^2+a^2b^2$$
$$=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2+a^2b^2$$
$$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

উদাহরণ 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^4-14x^2y^2+y^4$

$$x^4-14x^2y^2+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2-14x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2-14x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-(4xy)^2$$
$$=(x^2+4xy+y^2)(x^2-4xy+y^2)$$

উদাহরণ 4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$

$$(a^2-b^2)(x^2-y^2)+4abxy$$
$$=a^2x^2-a^2y^2-b^2x^2+b^2y^2+2abxy+2abxy$$
$$=(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)-(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)$$
$$=(ax+by)^2-(ay-bx)^2$$
$$=(ax+by+ay-bx)(ax+by-ay+bx)$$

উদাহরণ 5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $4x^4+3x^2+9$

$$4x^4+3x^2+9=(2x^2)^2+(3)^2+3x^2$$
$$=(2x^2+3)^2-2.2x^2.3+3x^2$$
$$=(2x^2+3)^2-9x^2$$
$$=(2x^2+3)^2-(3x)^2$$
$$=(2x^2+3x+3)(2x^2-3x+3)$$

প্রশ্নমালা 9

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. x^2-4a^2
2. p^6-81
3. ax^4-ay^4
4. $225a^2-144b^2$
5. $27x-48x^3$
6. x^4-81y^4
7. $(a+b)^2-(3a-5b)^2$
8. $(2a+3b-5c)^2-(3c-2a-3b)^2$
9. x^4+4
10. $3a^4+12b^4$
11. $m^4+m^2n^2+n^4$
12. $a^8+a^4b^4+b^8$
13. x^4-8x^2+4
14. x^4-17x^2+16
15. $4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2$
16. $x^4-7x^2y^2+y^4$
17. $81x^5+64xy^4$
18. $x^2-y^2-6xa+2ya+8y^2$
19. $a^2-2bc+6ac-b^2+8c^2$
20. $x^2-9a^2+4xy+6ab+4y^2-b^2$
21. $16-x^2+9x^4$
22. x^2-y^2+2x+1 [W. B. S. B. 1954]
23. $a^2-b^2+4bc-4c^2$ [W. B. S. B. 1955]
24. $a^2b^2-a^2-b^2+1$
25. a^2-2a-b^2+2b
26. $a^2-b^2-c^2-2bc+a-b-c$ [A. U. 1948]
27. $a^4+2a^3b-2ab^3-b^4$

28. $3a^2-b^2-c^2-2ab-2bc-2ca$ 29. $x^4+x^2y^2-y^2z^2-z^4$

30. $y^2+z^2+2xy+2yz+2zx-3x^2$ 31. $(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$

32. $(m+n)^2(p+q)^2-(m-n)^2(p-q)^2$

33. $x^2+12yz-4y^2-9z^2$ 34. $2bc-b^2-c^2+4a^2$

35. $4(bc-ad)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)$

36. $a^2-b^2-c^2-16a+2bc+64$

37. $x^2+16(y^2-z^2)+8xy$ 38. $1+2a+2bc+$ [illegible]

39. $(x+y)^4+(x^2-y^2)^2+(x-y)^4$

40. $25m^2-30pm-q^2-4q+9p^2-4$

সূত্র 9. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab.$

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $(x-a)(x-b)=x^2-(a+b)x+ab$

(ii) $(x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab$

(iii) $(x+a)(x-b)=x^2+(a-b)x-ab$

উল্লিখিত সূত্র এবং অনুসিদ্ধান্তসমূহ হইতে দেখা যায়, 'x^2+px+q' আকারের কোন রাশিমালার $p=a+b$ এবং $q=ab$ হইলে উক্ত রাশিমালাকে $(x+a)(x+b)$, এই দুই উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়। এরূপ ক্ষেত্রে q-এর এমন দুইটি উৎপাদক নির্ণয় করিতে হয়, যাহাদের সমষ্টি বা অন্তর p-এর সমান হয়।

উল্লিখিত উদাহরণগুলি হইতে পদ্ধতিটি পরিষ্কার বুঝা যাইবে।

উদাহরণ 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^2+7x+12$

রাশিমালা $=x^2+7x+12$

$=x^2+(3+4)x+12$

$=x^2+3x+4x+12$

$=x(x+3)+4(x+3)$

$=(x+3)(x+4)$

[এই ক্ষেত্রে এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের গুণফল 12 এবং যাহাদের যোগফল 7 হয়। গুণফল $(+12)$ বলিয়া এই সংখ্যাটির উভয় উৎপাদকই ঋণাত্মক ও ধনাত্মক হইতে পারে। 12-এর 6 জোড়া উৎপাদক নির্ণয় করা যায়, যথা—1×12, 2×6, 3×4, $(-1)\times(-12)$, $(-2)\times(-6)$ এবং $(-3)\times(-4)$. দ্বিতীয় পদের সহগ $+7$; 4 এবং 3-এর যোগফলও $(+7)$ বলিয়া নির্ণেয় উৎপাদক দুইটি $+4$ এবং $+3$ হইবে। সুতরাং

7-কে ভাঙ্গাইয়া (3+4) লিখিয়া উৎপাদকটি বিশ্লেষণ করা যাইবে। দ্বিতীয় পংক্তিতে 7-এর পরিবর্তে (3+4)-ই লেখা হইয়াছে। তৃতীয় পংক্তিতে দ্বিতীয় পংক্তির গুণন ক্রিয়া করা হইয়াছে। চতুর্থ পংক্তিতে তৃতীয় পংক্তির প্রথম দুইটি রাশির এবং পরের দুইটি রাশির সাধারণ উৎপাদক যথাক্রমে x ও 4 বিচ্ছিন্ন করা হইয়াছে। পঞ্চম পংক্তিতে আবার চতুর্থ পংক্তির রাশি দুইটির সাধারণ উৎপাদক বিচ্ছিন্ন করিয়া প্রদত্ত রাশির উৎপাদক নির্ণয় করা হইয়াছে।]

[উদাহর]ণ 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^2-3x-18$

[এখা]নে এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় করা প্রয়োজন যাহাদের গুণফল (-18) এবং যোগফল (-3) হইবে। গুণফল ঋণাত্মক বলিয়া নির্ণেয় সংখ্যা দুইটির একটি ঋণাত্মক এবং অপরটি ধনাত্মক হইবে। যোগফল ঋণাত্মক ; সুতরাং সংখ্যা দুইটির মধ্যে যাহার পরম মান বড়, সেইটিই হইবে ঋণাত্মক। $-18=(-2)\times 9$ অথবা $(-18)\times 1$ অথবা $(-3)\times 6$ অথবা $(-9)\times 2$ অথবা $(-1)\times 18$ অথবা $(-6)\times 3$; ইহাদের মধ্যে 6 সংখ্যাটি ঋণাত্মক এবং 3 সংখ্যাটি ধনাত্মক হইলে রাশিমালাকে উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট করা যায়।]

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^2-3x-18$

$=x^2-(6-3)x-18$

$=x^2-6x+3x-18$

$=x(x-6)+3(x-6)=(x-6)(x+3)$

উদাহরণ 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $(a^2-5a)^2+10(a^2-5a)+24$

(a^2-5a)-এর পরিবর্তে x লিখিলে,

প্রদত্ত রাশিমালা $=x^2+10x+24$

$=x^2+6x+4x+24$

$=x(x+6)+4(x+6)=(x+6)(x+4)$

$=(a^2-5a+6)(a^2-5a+4)$ [x-এর মান বসাইয়া]

$=(a^2-3a-2a+6)(a^2-4a-a+4)$

$=\{a(a-3)-2(a-3)\}\{a(a-4)-1(a-4)\}$

$=(a-3)(a-2)(a-4)(a-1)$

[এই প্রকার অঙ্কের প্রথম পদে কোন বৈজিক রাশির ঘাত যত, দ্বিতীয় পদে সে রাশির ঘাত উহার অর্ধেক এবং তৃতীয় পদটি উক্ত বৈজিক রাশি বর্জিত থাকে।]

উদাহরণ 4. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $2a^2+a-15$ [W. B. S. B. 1952]

প্রদত্ত রাশিমালা $=2a^2+6a-5a-15$

$$=2a(a+3)-5(a+3)=(a+3)(2a-5)$$

[এরূপ স্থলে a^2-এর সহগ দ্বারা a-বর্জিত পদটিকে গুণ করিয়া, সেই গুণফলটির এমন দুইটি উৎপাদক নির্ণয় করিতে হইবে, যাহাদের সমষ্টি বা অন্তর a-র সহগের সমান হয়।]

উদাহরণ 5. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$$20(3m^2+5m)^2-7(3m^2+5m)(3m+7)-6(3m+7)^2$$

$(3m^2+5m)$ এবং $(3m+7)$-এর পরিবর্তে যথাক্রমে x এবং y ধরিলে

প্রদত্ত রাশিমালা $=20x^2-7xy-6y^2$

$$=20x^2-15xy+8xy-6y^2$$

$$=5x(4x-3y)+2y(4x-3y)=(4x-3y)(5x+2y)$$

$$=\{4(3m^2+5m)-3(3m+7)\}\{5(3m^2+5m)+2(3m+7)\}$$

[x ও y-এর মান বসাইয়া]

$$=(12m^2+11m-21)(15m^2+31m+14)$$

$$=(12m^2+11m-21)(15m^2+21m+10m+14)$$

$$=(12m^2+11m-21)\{3m(5m+7)+2(5m+7)\}$$

$$=(12m^2+11m-21)(5m+7)(3m+2)$$

প্রশ্নমালা 10

উৎপাদক বিশ্লেষণ কর :

1. x^2+6x+8
2. x^2-5x+6
3. x^2+x-20
4. $x^2-12x+20$
5. x^2-x-42
6. x^2-x-12
7. m^2-5m-6
8. x^2-x-6
9. $x^2-3x-28$
10. $2+a-a^2$
11. $6-5a+a^2$
12. $5-4x-x^2$
13. x^4-8x^2+7
14. $x^2+2x-323$
15. $x^4-5x^2y^2-500y^4$
16. $3x^2-5x-8$
17. $8a^4+2a^2-45$
18. $6-a-12a^2$

19. $2x^2-x-10$ [W. B. S. B. 1954] 20. $12x^2+65x+77$

21. $3x^2+10x+8$

22. $3x^2+14x+8$ [W. B. S. B. 1953] 23. $2x^2+x-15$

24. $4x^2-35x+24$ 25. $6x^2+18x-24$

26. $8x-3-4x^2$

27. $(a+b)^2-10(a^2-b^2)-56(a-b)^2$

28. $(a^2+2a)^2-12(a^2+2a)-45$

29. $6(a^2-b^2)^2-7ab(a^2-b^2)-24a^2b^2$

30. $3(x^2+y^2)^2+16xy(x^2+y^2)+20x^2y^2$

31. $am^2+(a^2+1)m+a$ 32. $(x-y)a^2-(x-z)ab+(y-z)b^2$

33. $(a+b)^2-5a-5b+6$ 34. $x^2+x-(a+1)(a+2)$

35. $a^2+a-(x-1)(x-2)$ 36. $3(2x^2-1)-7x$

37. $(x^2-4x)(x^2-4x-1)-20$ 38. $(x+5)(x+13)-9$

39. $a^2+2a-(x+1)(x+3)$ 40. $a^2-2a-(x^2-1)$

41. m^2+m-p^2-5p-6 42. $a^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)a+1$

তোমরা জান, $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$ এবং $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$. যেহেতু a^3+b^3 এবং a^3-b^3 প্রত্যেকে দুইটি রাশির গুণফলের সমান, সেইহেতু a^3+b^3 এবং a^3-b^3-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা

(1) a^3+b^3

$=(a+b)^3-3ab(a+b)$ [অনুসিদ্ধান্ত]

$=(a+b)\{(a+b)^2-3ab\}=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

(2) a^3-b^3

$=(a-b)^3+3ab(a-b)$ [অনুসিদ্ধান্ত]

$=(a-b)\{(a-b)^2+3ab\}=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

উদাহরণ 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $8a^3+125b^3$

প্রদত্ত রাশিমালা $=(2a)^3+(5b)^3$

$=(2a+5b)\{(2a)^2-2a.5b+(5b)^2\}$

$=(2a+5b)(4a^2-10ab+25b^2)$

উদাহরণ 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $27x^8-64x^2$

রাশিমালা $=x^2(27x^6-64)$

$=x^2\{(3x^2)^3-(4)^3\}$

$=x^2(3x^2-4)\{(3x^2)^2+3x^2.4+4^2\}$

$=x^2(3x^2-4)(9x^4+12x^2+16)$

ণ 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^3+6a^2+12a+9$

প্রদত্ত রাশিমালা $=(a^3+6a^2+12a+8)+1=(a+2)^3+1$

$=(a+2+1)\{(a+2)^2-(a+2).1+1\}$

$=(a+3)(a^2+4a+4-a-2+1)$

$=(a+3)(a^2+3a+3)$

প্রশ্নমালা 11

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $8a^3+27b^3$ 2. a^4-64a 3. a^6-b^6

4. m^6+n^6 5. $27(p+q)^3+r^3$ 6. $8(x+y)^3-z^3$

7. $125x^5y^2-27x^2y^5$ 8. $3a^3-81b^6$

9. x^6-729y^6 10. $8x^3+4x-3$

11. $1+3a+3a^2+9a^3$ 12. $2m^3-3m^2+3m-1$

13. $56x^3+144x^2y+108xy^2+27y^3$

14. $a^6-3a^4bc+4a^2b^2c^2-2b^3c^3$

15. প্রমাণ কর যে, $(ax+by)^3+(bx+ay)^3$-কে $(a+b)$ এবং $(x+y)$ দ্বারা ভাগ করিলে কোন ভাগশেষ থাকে না। [C. U. 1921, 1926]

16. $\left(a^6+\frac{b^6}{27}\right)$-কে $\left(a^2+ab+\frac{b^2}{3}\right)$ দ্বারা ভাগ কর। [C. U. 1930]

উৎপাদকে বিশ্লেষণের আরও কতিপয় প্রণালী :

উদাহরণ 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ [M. U. 1926 ; C. U. 1941]

রাশিমালা $=\{(x+1)(x+7)\}\{(x+3)(x+5)\}+15$

$=(x^2+8x+7)(x^2+8x-15)+15$

$=(a+7)(a+15)+15$ [(x^2+8x)-এর পরিবর্তে a ধরিয়া]

$= a^2+22a+105+15=a^2+22a+120$

$= a^2+12a+10a+120=a(a+12)+10(a+12)$

$=(a+12)(a+10)=(x^2+8x+12)(x^2+8x+10)$ [a-র মান বসাইয়া]

$=(x^2+6x+2x+12)(x^2+8x+10)$

$=\{x(x+6)+2(x+6)\}(x^2+8x+10)$

$=(x+6)(x+2)(x^2+8x+10)$

[এই প্রকার রাশির উৎপাদক বিশ্লেষণ করিতে দুই-দুইটি পদ লইয়া এরূপভাবে জোড়া গঠন করিতে হয় যেন, জোড়া ভাঙ্গাইলে প্রত্যেক জোড়ার x^2 এবং x সংযুক্ত পদগুলি সমান হয়। এই অঙ্কটিতে দেখা যায় $7+1=8$ এবং $5+3=8$; সুতরাং $(x+1)(x+7)$ এক জোড়া এবং $(x+3)(x+5)$ দ্বিতীয় জোড়া গঠন করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : x^4-4x+3

রাশিমালা $= x^4-x^3+x^3-x^2+x^2-x-3x+3$

$=x^3(x-1)+x^2(x-1)+x(x-1)-3(x-1)$

$=(x-1)(x^3+x^2+x-3)$

$=(x-1)(x^3-x^2+2x^2-2x+3x-3)$

$=(x-1)\{x^2(x-1)+2x(x-1)+3(x-1)\}$

$=(x-1)(x-1)(x^2+2x+3)=(x-1)^2(x^2+2x+3)$

[x-অক্ষরবিশিষ্ট কোন রাশিমালার x-এর মান a ধরিলে, যদি ঐ রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে $(x-a)$ উক্ত রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে। আবার $x=-a$ ধরিলে যদি রাশিমালার মান শূন্য হয়, তবে $(x+a)$ ঐ রাশিমালার একটি উৎপাদক হইবে। এই অঙ্কটিতে x-এর মান 1 ধরিলে রাশিমালার মান 0 হয় সুতরাং $(x-1)$ রাশিমালাটির একটি উৎপাদক। আবার (x^3+x^2+x-3) রাশিমালার x-এর মান 1 ধরিলে উহার মান 0 হয়। সুতরাং (x^3+x^2+x-3) $(x-1)$ দ্বারা বিভাজ্য এবং ইহাকে পুনরায় উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : x^3+2x^2-3

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^3-x^2)+(3x^2-3)=x^2(x-1)+3(x^2-1)$

$=x^2(x-1)+3(x-1)(x+1)$

$=(x-1)\{x^2+3(x+1)\}=(x-1)(x^2+3x+3)$

প্রশ্নমালা 12

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $x^4+x^3+2x^2+x+1$
2. $a^2+2ab+b^2-3a-3b$
3. $x^3+7x^2+14x+8$
4. $x(x-1)(x-2)-3x+3$
5. x^3-3x+2
6. x^3+2x^2-x-2
7. $a^3-19a-30$
8. $2m^3+3m^2+3m+2$
9. $a^4+5a^3+8a^2+5a+1$
10. $x^3-6x^2+11x-6$
11. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$
12. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$ [C. U. 1946]
13. $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+24$ [D. B. 1922]
14. $(a-1)(a-2)(2a-1)(2a-3)-2$
15. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)-63$
16. a^3-2a^2-3a+4
17. $a^3+5a^2+10a+8$
18. $x^3-2x^2-23x+60$
19. $x^4-4x^3-x^2+10a+6$
20. $2x^3+5x^2-2x-5$

পঞ্চম অধ্যায়

সরল অভেদ
(Simple Identities)

[পুনরালোচনা]

অভেদ :

অভেদ দুই প্রকার,—(a) **নিরপেক্ষ অভেদ** (Unconditional Identity) এবং (b) **সাপেক্ষ অভেদ** (Conditional Identity). যে অভেদে উভয় পক্ষের সমতা কোন সর্তের উপর নির্ভর করে না, তাহাকে নিরপেক্ষ অভেদ এবং যে অভেদে উভয়পক্ষের সমতা এক বা একাধিক সর্তের উপর নির্ভর করে, তাহাকে সাপেক্ষ অভেদ বলে।

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর : $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2-(ad-bc)^2$

প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ $=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$

$=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2-2abcd+b^2c^2$

$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 2. যদি $a+b+c=0$ হয়, প্রমাণ কর, $a^3+b^3+c^3=3abc$ [W. B. S. B. 1954]

$\because \ a+b+c=0, \ \therefore \ a+b=-c$ বা, $(a+b)^3=-c^3$

প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ $=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3$
$=-c^3-3ab(-c)+c^3=3abc$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 3. যদি $2s=a+b+c$ হয়,

প্রমাণ কর, $(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+s^2=a^2+b^2+c^2$

প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ
$=s^2-2as+a^2+s^2-2bs+b^2+s^2-2cs+c^2+s^2$
$=4s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2$
$=4s^2-2s.2s+a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 4. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর,

$(s-a)^2+(s-b)(s-c)+as=a^2+bc$ [W. B. S. B. 1961]

প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ $=s^2-2sa+a^2+s^2-bs-cs+bc+as$
$=2s^2-as-bs-cs+a^2+bc$
$=2s^2-(a+b+c)s+a^2+bc$
$=2s^2-2s^2+a^2+bc=a^2+bc$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 5. প্রমাণ কর : $2(a^2-ab)^2-2(ab-b^2)^2$
$=(a^2-b^2)^2+(a-b)^4$

প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ $=2\{a^2(a-b)^2\}+2\{b^2(a-b)^2\}$
$=2a^2(a-b)^2+2b^2(a-b)^2$
$=(a-b)^2(2a^2+2b^2)$
$=2(a-b)^2(a^2+b^2)$

প্রমাণিতব্যের দক্ষিণপক্ষ $=\{(a+b)(a-b)\}^2+(a-b)^2(a-b)^2$
$=(a+b)^2(a-b)^2+(a-b)^2(a-b)^2$
$=(a-b)^2\{(a+b)^2+(a-b)^2\}$
$=(a-b)^2\{2(a^2+b^2)\}$
$=2(a-b)^2(a^2+b^2)$

$\because$ বামপক্ষ = দক্ষিণপক্ষ, $\therefore$ অভেদটি প্রতিষ্ঠিত হইল।

উদাহরণ 6. $a+b+c=0$ হইলে,

প্রমাণ কর, $a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$

$\because \ a+b+c=0, \ \therefore \ a=-b-c, \ b=-c-a$ ও $c=-a-b$

এখন, a^2-bc | b^2-ca | c^2-ab

$=a.a-bc$ | $=b.b-ca$ | $=c.c-ab$

$=a(-b-c)-bc$ | $=b(-c-a)-ca$ | $=c(-a-b)-ab$

$=-ab-bc-ca$ | $=-ab-bc-ca$ | $=-ab-bc-ca$

$a^2-bc=b^2-ca=c^2-ab$ (প্রমাণিত)

প্রশ্নমালা 13

প্রমাণ কর :

1. $(1+xy)^2-(1-x^2)(1-y^2)=(x+y)^2$
2. $a^2-(a+b)(a+c)=b^2-(b+c)(b+a)=c^2-(c+a)(c+b)$
3. $(x+2a)(x^2-2ax+4a^2)-(x-2a)(x^2+2ax+4a^2)=16a^3$
4. $(x-y)(x+y-z)+(y-z)(y+z-x)+(z-x)(z+x-y)=0$
5. $x(x+y-z)+y(y+z-x)+z(z+x-y)=x^2+y^2+z^2$
6. $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=4ab(a^2+b^2)$
7. $(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2-a^2-b^2-c^2=(a+b+c)^2$
8. $(x+y)(x^2+y^2-z^2)+(y+z)(y^2+z^2-x^2)+(z+x)$ $(z^2+x^2-y^2)=2(x^3+y^3+z^3)$
9. $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)=0$
10. $a+b=1$ হইলে, প্রমাণ কর, $(a^2-b^2)^2=a^3+b^3-ab$
11. $a+b=1+ab$ হইলে, প্রমাণ কর, $a^3+b^3=1+a^3b^3$
12. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর,

(i) (a) $a^2-b^2-c^2=2bc$ (b) $b^2-c^2-a^2=2ca$
(c) $c^2-a^2-b^2=2ab$

(ii) $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)+3abc=0$

(iii) $a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2=c^2+ca+a^2$ [C. U. 1926]

13. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3+3abc=s^3$

(ii) $(2s-a-b)^3=(s-a)^3+(s-b)^3+3c(s-a)(s-b)$

(iii) $s^2+(s-a)(s-b)+(s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)=ab+bc+ca$

[W B. S. B. 1953]

14. $s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $(s-3a)^2+(s-3b)^2+(s-3c)^2=3\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}$

(ii) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=s(s-2a)(s-2b)(s-2c)$

15. $x=a+b,\ y=b+c,\ z=c+a$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

16. $3s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$

17. $ax+by=m,\ bx-ay=n,\ a^2+b^2=1$ হইলে, দেখাও যে,

$x^2+y^2=m^2+n^2$ [C. U. 1939]

ষষ্ঠ অধ্যায়

গ. সা. গু. এবং ল. সা. গু.

(H. C. F. and L. C. M.)

. গ. সা. গু.

দুই বা তদধিক বীজগণিতীয় রাশির মধ্যে, যতগুলি মৌলিক গুণনীয়ক সাধারণ ...ক, তাহাদের গুণফলকে পূর্বোক্ত রাশিগুলির **গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক** (Highest Common Factor) বা সংক্ষেপে **গ. সা. গু.** (H. C. F.) বলে।

গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার সময় সাধারণ গুণনীয়কগুলির সর্বোচ্চ শক্তিবিশিষ্ট ...ণনীয়কটি লইতে হয়।

উৎপাদক সাহায্যে গ. সা. গু. নির্ণয়ঃ

উদাহরণ 1. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : x^4-1 এবং x^2+3x+2

প্রথম রাশি $=x^4-1$
$=(x^2+1)(x^2-1)$
$=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

দ্বিতীয় রাশি $=x^2+3x+2$
$=x^2+x+2x+2$
$=x(x+1)+2(x+1)$
$=(x+1)(x+2)$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=x+1$

উদাহরণ 2. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $3(x+y)^3, 6(x+y)^2, 9(x^2-y^2)$

3, 6 ও 9-এর গ. সা. গু. = 3.

$(x+y)^3$, $(x+y)^2$ এবং (x^2-y^2) এই তিনটি রাশিমালার গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক $(x+y)$. $\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=3(x+y)$

প্রশ্নমালা 14

গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $3p^3+81$ এবং p^2-9
2. x^3-1 এবং x^5-x
3. a^3+b^3, $a^5+a^3b^2+ab^4$
4. $m^2-n^2, (m+n)^2$ এবং m^3+n^3
5. x^2-x-2, x^3+1 এবং $(x+1)^2$
6. $8(x^3+y^3)$, $16(x^2-y^2)$ এবং $12(x^2+3xy+2y^2)$
7. $x^2-3x+2, 3x^2-2x-8$ এবং $2x^2-9x+10$ [D. B. 1948]
8. x^3+x^2+x+1 এবং x^3+3x^2+3x+1
9. $6x^2+xy-15y^2$ এবং $21x^2+41xy+10y^2$ [C. U. 1947]
10. $x^2+9x+14$ এবং $x^3+10x^2+31x+30$ [W. B. S. B. 1953]
11. x^3-3x^2+x-3 এবং x^4+6x^2+5
12. x^3-2x^2-2x-3 এবং x^2-2x-3
13. $x^3-3x^2-9x+22$ এবং $x^3-19x+30$
14. $27x^4+x$, $87x^2+8x-7$ এবং $27x^3+27x^2+9x+1$

B. ল. সা. গু.

দুই বা তদধিক রাশির একাধিক সাধারণ গুণিতক থাকিতে পারে। ইহাদের মধ্যে সর্বনিম্ন মাত্রাবিশিষ্ট সাধারণ গুণিতকটিকেই প্রদত্ত রাশিগুলির **লঘিষ্ঠ সাধারণ গুণিতক** (Least Common Multiple) বা সংক্ষেপে **ল. সা. গু.** (L. C. M.) বলে।

উৎপাদক সাহায্যে ল. সা. গু. নির্ণয় :

উদাহরণ। ল. সা. গু. নির্ণয় কর : $a^2-b^2-c^2-2bc$, $b^2-c^2-a^2-2ca$ এবং $c^2-a^2-b^2-2ab$

প্রথম রাশি $=a^2-(b^2+c^2+2bc)$

$=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-c)$

দ্বিতীয় রাশি $= b^2-(c^2+a^2+2ca)$

$= b^2-(c+a)^2 = (b+c+a)(b-c-a)$

তৃতীয় রাশি $= c^2-(a^2+b^2+2ab)$

$= c^2-(a+b)^2 = (c+a+b)(c-a-b)$

∴ নির্ণেয় ল. সা. গু. $= (a+b+c)(a-b-c)(b-c-a)(c-a-b)$

প্রশ্নমালা 15

ল. সা. গু. নির্ণয় কর ঃ

1. $(x+y)^2$, x^3+y^3 এবং $x^4+x^2y^2+y^4$
2. $24xy(x^6-y^6)$ এবং $36(x^6-2x^4y^2+x^2y^4)$
3. $x^2-(a-c)x-ac$ এবং $x^2-(a+c)x+ac$
4. x^2-1, x^2+3x+2 এবং x^2+x-2
5. a^2-9b^2, $a^2-ab-6b^2$ এবং $a^2+ab-12b^2$
6. $1+2x+4x^2-16x^4$ এবং $1+2x-8x^3-16x^4$
7. $2x^2-x-1$, $2x^2+3x+1$ এবং x^2-1
8. $x^3-16x+24$ এবং $2x^3-5x^2+4$ [D. B. 1933]
9. $6x^3+11x^2+6x+1$ এবং $4x^3-7x-3$
10. x^3+2x^2-x-2 এবং x^3+x^2-4x-4 [B. U. 1923]
11. $8a^3-27b^3$, $3a^2-ab-2b^2$ এবং $6a^2-5ab-6b^2$
12. $2x^3-5x-39$ এবং $x^4-21x-18$ [A. U. 1904]
13. $8x^3+27$, $16x^4+36x^2+81$ এবং $7x^2-5x-6$ [D. B. 1926]
14. x-এর দ্বিঘাতবিশিষ্ট দুইটি রাশির গ. সা. গু. $(x-1)$ এবং ল. সা. গু. $(x-1)(x+1)(x+3)$; রাশি দুইটি নির্ণয় কর। [D. B. 1937 (Addl.)]

C. জটিলতর গ. সা. গু.

(1) বহুপদ রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় ঃ

উৎপাদকের সাহায্যে কিরূপে গ. সা. গু. নির্ণয় করা যায়, তাহা পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে ; কিন্তু যে সকল বৈজিক রাশিমালার উৎপাদক বিশ্লেষণ করা সহজ

নয়, তাহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে পাটীগণিতের প্রক্রিয়ার সাহায্য লইতে হয়।

দুইটি রাশিমালার এক পদ গুণনীয়ক না থাকিলে রাশিমালা দুইটিকে উহাদের কোন সাধারণ অক্ষরের শক্তির ঊর্ধ্বগ বা নিম্নগ ক্রমে সাজাইয়া উহাদের মধ্যে উচ্চতর মানের রাশিমালাকে নিম্নতর মানের রাশিমালা দ্বারা ভাগ কর। উভয়ের মান সমান হইলে যে-কোন একটিকে অপরটির দ্বারা ভাগ করা হয়। রাশিমালা দুইটির যে-কোন একটির প্রথম পদের সংখ্যাত্মক সহগ দ্বারা অপরটির প্রথম পদের সংখ্যাত্মক সহগ নিঃশেষে বিভাজ্য না হইলে সুবিধামত যে-কোনও রাশিমালাকে পাটীগণিতীয় সংখ্যা দ্বারা গুণ কর। গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার সময় ভাগ প্রক্রিয়ায় যদি ভাগশেষ না থাকে, তাহা হইলে ভাজকই হইবে নির্ণেয় গ. সা. গু.। কিন্তু যদি কোন ভাগশেষ থাকে, তাহা হইলে শেষ ভাগশেষকে নূতন ভাজক এবং পূর্ব ভাজককে নূতন ভাজ্যরূপে গণ্য করিয়া পুনরায় ভাগ কর। যে পর্যন্ত ভাগ সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া না যায়, সেই পর্যন্ত পূর্বের মত ভাগ করিয়া যাও।

শেষ ভাজকটি প্রদত্ত রাশিমালা দুইটির গ. সা. গু. হইবে।

ব্যাখ্যা ঃ

মনে কর, P এবং Q দুইটি বহুপদ রাশি। উহারা x-এর অধঃক্রম-ঘাত অনুসারে সজ্জিত এবং Q-এর মাত্রা P-এর মাত্রা অপেক্ষা বৃহত্তর।

Q-কে P দ্বারা ভাগ কর। মনে কর, ভাগফল $= a$ এবং ভাগশেষ $= R$; P-কে R দ্বারা ভাগ কর। মনে কর, ভাগফল $= b$ এবং ভাগশেষ $= S$; আবার R-কে S দ্বারা ভাগ কর। মনে কর, ভাগফল $= c$, ভাগশেষ $= T$. আবার S-কে T দ্বারা ভাগ কর। এবার ভাগফল d, কিন্তু কোন ভাগশেষ রহিল না।

$$
\begin{array}{l}
P)\,Q\,(a \\
\quad aP \\
\overline{R)\,P\,(b} \\
\quad bR \\
\overline{S)\,R\,(c} \\
\quad cS \\
\overline{T)\,S\,(d} \\
\quad S \\
\overline{\quad}
\end{array}
$$

এক্ষণে, উল্লিখিত নিয়মানুসারে, P ও Q-এর গ. সা. গু. $= R$ ও P-এর গ. সা. গু. $= S$ ও R-এর গ. সা. গু $= T$ ও S-এর গ. সা. গু.। T দ্বারা S নিঃশেষে বিভাজ্য।

$\therefore$ T-ই নির্ণেয় গ. সা. গু.।

1. x^3+4x^2+5x+2 এবং $x^3+8x^2+21x+18$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর। [C. U. 1943]

$$
\begin{array}{l}
x^3+4x^2+5x+2)\,x^3+8x^2+21x+18\,(1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad x^3+4x^2+5x+2 \\
\qquad\qquad\qquad 4\,|\,\underline{4x^2+16x+16} \\
\qquad\qquad\qquad\quad x^2+4x+4)\,x^3+4x^2+5x+2\,(x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x^3+4x^2+4x \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x+2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x+2)\,x^2+4x+4\,(x+2 \\
\qquad x^2+2x \\
\qquad\quad 2x+4 \\
\qquad\quad 2x+4
\end{array}
$$

নির্ণেয় গ. সা. গু. $= x+2$

[এখানে দ্বিতীয় বারের ভাগক্রিয়ায় ভাজক $4x^2+16x+16$-কে সুবিধার জন্য 4 দ্বারা ভাগ করা হইয়াছে এবং প্রাপ্ত ভাগফল x^2+4x+4 হইয়াছে নূতন ভাজক।]

(2) গ. সা. গু. নির্ণয় করিবার সময় একটি রাশিমালাকে অপরটির দ্বারা ভাগ করিতে হয়; কিন্তু উভয় রাশিমালাতে যদি একপদ উৎপাদক থাকে, তাহা হইলে প্রথমে ঐ সরল উৎপাদক বাহির করিয়া লইবে এবং অবশিষ্ট অংশ দুইটির গ. সা. গু. নির্ণয় করিবে। প্রথমে যে সরল উৎপাদকগুলি বাহির করা হয়, তাহাদের গ সা. গু.-এর সহিত অবশিষ্ট অংশদ্বয়ের গ. সা. গু.-এর গুণফলই হইবে নির্ণেয় গ. সা. গু।

পূর্বে আরও বলা হইয়াছে যে, প্রদত্ত রাশি দুইটির কোনটির মধ্যে সাধারণ নয়, এমন কোন একপদবিশিষ্ট রাশিদ্বারা কোন ভাজক বা ভাগশেষকে গুণ বা ভাগ করিলে রাশি দুইটির গ. সা. গু -এর কোন পরিবর্তন হয় না।

উদাহরণ 2. $12a^4-14a^3+2a$ এবং $16a^4+20a^2-12a$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$2a\,|\,\underline{12a^4-14a^3+2a} \qquad\qquad 4a\,|\,\underline{16a^4+20a^2-12a}$$
$$\quad 6a^3-7a^2+1 \qquad\qquad\qquad 4a^3+5a-3$$

সুতরাং, রাশি দুইটির মধ্যে $2a$ একটি সাধারণ গুণনীয়ক।

এক্ষণে, $6a^3-7a^2+1$ এবং $4a^3+5a-3$-এর মধ্যে অন্য কি সাধারণ গুণনীয়ক আছে, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

$$
\begin{array}{rl}
 & 6a^3-7a^2+1 \\
 & \qquad\qquad \times 2 \\
4a^3+5a-3) & 12a^3-14a^2+2\,(3 \\
 & 12a^3+15a\;\;-9 \\
-1\,| & -14a^2-15a+11 \\
 & \;\;\;14a^2+15a-11
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
 & 4a^3+5a-3 \\
 & \qquad\qquad \times 7 \\
14a^2+15a-11) & 28a^3+35a\;\;-21\,(2a \\
 & 28a^3+30a^2-22a \\
 & -30a^2+57a\;\;-21 \\
 & \qquad\qquad \times\; 7 \\
 & -210a^2+399a-147\,(-15 \\
 & -210a^2+225a+165 \\
312\,| & 624a-312 \\
2a-1) & 14a^2+15a-11\,(7a+11 \\
 & 14a^2-\;\;7a \\
 & \qquad 22a-11 \\
 & \qquad 22a-11
\end{array}
$$

$\therefore$ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=2a(2a-1)$

[এস্থলে সর্বাগ্রে প্রথম রাশিটির উৎপাদক $2a$ এবং দ্বিতীয় রাশিটির উৎপাদক $4a$ বাহির করা হইয়াছে; পরে অবশিষ্ট অংশ দুইটি, $(6a^3-7a^2+1)$ এবং $(4a^3+5a-3)$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় করা হইয়াছে। সর্বশেষে $2a$ এবং $4a$ উৎপাদক দুইটির গ. সা. গু. $2a$ দ্বারা প্রাপ্ত গ. সা. গু. $(2a-1)$-কে গুণ করিয়া প্রদত্ত রাশি দুইটির নির্ণেয় গ. সা. গু. পাওয়া গিয়াছে $2a(2a-1)$]

(3) গ. সা. গু. নির্ণয়ের একটি অভিনব প্রণালী :

যদি A এবং B দুইটি x-যুক্ত রাশি এবং l, m, p, q সংখ্যা চারিটি এমন হয় যে $(lq-mp)$-এর মান শূন্য নহে, তাহা হইলে $lA+mB$ ও $pA+qB$-এর গ. সা. গু. এবং A ও B-এর গ. সা. গু. একই হইবে।

প্রমাণ :

মনে কর, A এবং B-এর গ. সা. গু. $=H$ এবং $pA+qB$ ও $lA+mB$-এর গ. সা. গু. $=H'$. প্রমাণ করিতে হইবে, $H=H'$.

H যদি A এবং B-এর গ. সা. গু. হয়, তবে A এবং B-এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়ক H-এর মধ্যে আছে।

আবার, A এবং B-এর প্রত্যেক সাধারণ গুণনীয়ক $lA+mB$-এর মধ্যে আছে, $pA+qB$-এর মধ্যেও আছে।

$\therefore$ $lA+mB$ এবং $pA+qB$-এব একটি সাধারণ গুণনীয়ক H; কিন্তু $pA+qB$ এবং $lA+mB$-এর গ. সা. গু $=H'$.

$\therefore$ হয় $H=H'$, নতুবা H'-এর একটি গুণনীযক H, অর্থাৎ H' অপেক্ষা H ক্ষুদ্রতর মানবিশিষ্ট।

আবার, $pA+qB$ এবং $lA+mB$-এর গ. সা গু $=H'$; এবং ইহাদের প্রত্যেকটি সাধারণ গুণনীয়ক $q(lA+mB)-m(pA+qB)$-এব মধ্যে আছে, $l(pA+qB)-p(lA+mB)$-এর মধ্যেও আছে। H' উল্লিখিত রাশি দুইটির একটি সাধারণ গুণনীয়ক।

কিন্তু $q(lA+mB)-m(pA+qB)=(ql-mp)A$ এবং

$(pA+qB)-p(lA+mB)=(lq-mp)B$

কিন্তু, $lq-mp$-এব মান 0 নহে এবং উহা x-যুক্তও নহে।

$\therefore$ $(lq-mp)A$ এবং $(lq-mp)B$-এর গ. সা. গু. $=A$ ও B-এর গ. সা. গু. $=H$.

$\therefore$ হয়, $H'=H$, নতুবা H-এর একটি উৎপাদক H, অর্থাৎ H অপেক্ষা H' ক্ষুদ্রতব মানের।

কিন্তু, একই রাশি H', একই রাশি H অপেক্ষা একই সময়ে ক্ষুদ্রতর ও বৃহত্তর হইতে পাবে না। সুতরাং, অবশ্যই $H=H'$.

উদাহরণ 3. $2x^4-x^3-x^2-x-3$ এবং $2x^4-5x^3+x^2+5x-3$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

মনে কর, $A=2x^4-x^3-x^2-x-3$

এবং $B=2x^4-5x^3+x^2+5x-3$

$$\therefore A-B=(2x^4-x^3-x^2-x-3)-(2x^4-5x^3+x^2+5x-3)$$
$$=4x^3-2x^2-6x$$
$$=2x(2x^2-x-3)=2x(2x-3)(x+1)$$

আবার, $A+B=(2x^4-x^3-x^2-x-3)+(2x^4-5x^3+x^2+5x-3)$

$$=4x^4-6x^3+4x-6$$
$$=2x^3(2x-3)+2(2x-3)$$
$$=(2x-3)(2x^3+2)$$
$$=2(2x-3)(x^3+1)=2(2x-3)(x+1)(x^2-x+1)$$

নিয়মানুসারে সংখ্যা-গুণনীয়ক বর্জনীয় ;

∴ নির্ণেয় গ. সা. গু. $=(2x-3)(x+1)=2x^2-x-3$

(4) তিন বা তদধিক রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় :

পূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে, দুইটি রাশি x এবং y-এর গ. সা. গু. যদি F হয়, তাহা হইলে x এবং y-এর প্রত্যেকটির সাধারণ উৎপাদক F-এর মধ্যে আছে।

∴ x এবং y-এর মধ্যস্থিত যে কোন সাধারণ উৎপাদক, F-এরও উৎপাদক।

এখন, z একটি তৃতীয় রাশি হইলে x, y এবং z-এর মধ্যস্থিত প্রত্যেক সাধারণ উৎপাদক F এবং z-এর সাধারণ উৎপাদক।

∴ F এবং z-এর গ. সা. গু., x, y এবং z-এরও গ. সা. গু.।

মনে কর, F এবং z-এর গ. সা. গু. $=H$.

∴ H-ই x, y এবং z-এর নির্ণেয় গ. সা. গু.।

সুতরাং, তিনটি রাশির গ. সা. গু নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথমে দুইটি রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয় এবং তৎপরে লব্ধ গ সা গু. ও তৃতীয় রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়। এই গ. সা. গু.-ই রাশি তিনটির নির্ণেয় গ. সা. গু.।

তিনটির অধিক রাশি থাকিলে তিনটি রাশির প্রাপ্ত গ সা. গু. এবং চতুর্থ রাশির গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়।

আরও অধিক রাশি থাকিলে উক্ত প্রণালীতেই অগ্রসর হইতে হয়।

উদাহরণ 4. $6m^3-23m^2+29m-12$, $10m^3-19m^2+9$ এবং $15m^3-26m^2-m+12$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 10m^3-19m^2+9 \\
 & \times 3 \\
\hline
6m^3-23m^2+29m-12 & 30m^3-\;\;57m^2+27 \quad (5 \\
 & 30m^3-115m^2+145m-60 \\
\hline
 & 29 \,|\, 58m^2-145m+87 \\
\hline
 & 2m^2-5m+3
\end{array}
$$

$$2m^2-5m+3)\,6m^3-23m^2+29m-12\,(3m-4$$
$$6m^3-15m^2+9m$$
$$-8m^2+20m-12$$
$$-8m^2+20m-12$$

প্রথম দুইটি রাশির গ. সা গু $=2m^2-5m+3$

$$15m^3-26m^2-m+12$$
$$\times 2$$
$$2m^2-5m+3)\,30m^3-52m^2-2m+24\,(15m+23$$
$$30m^3-75m^2+45m$$
$$23m^2-47m+24$$
$$\times 2$$
$$46m^2-94m+48$$
$$46m^2-115m+69$$
$$21 \mid 21m-21$$
$$m-1)\,2m^2-5m+3\,(2m-3$$
$$2m^2-2m$$
$$-3m+3$$
$$-3m+3$$

নির্ণেয় গ. সা. গু. $= m-1$

প্রশ্নমালা 16

গ সা. গু. নির্ণয় কর :

1. x^3+4x^2+4x+3 এবং $x^3+8x^2+21x+18$ [C. U. 1943]
2. $x^3+6x^2+11x+6$ এবং $x^3+8x^2+19x+12$ [G. U. 1948]
3. $2x^3-3x^2-17x-12$ এবং $3x^3-7x^2-18x-8$ [C. U. 1937]
4. $2x^3+3x^2+2x-2$ এবং $4x^4-2x^3+2x-1$
5. $x^4-2x^3y-2x^2y^2-3xy^3$ এবং $3x^3y+2x^2y^2+2xy^3-y^4$
6. $2x^4-x^3-9x^2+13x-5$ এবং $7x^3-19x^2+17x-5$
7. $2x^4-6x+40$ এবং $15x^4-9x^3+192$ [C. U. 1939]
8. $3x^4+15x^3+5x^2+10x+2$ এবং $2x^4+9x^3+14x+3$
9. $3x^4+20x^3-3x^2+6x+1$ এবং $x^4+7x^3-x^2-14x-2$
10. $2m^4+3m^3n-9m^2n^2$ এবং $6m^4n-17m^3n^2+14m^2n^3-3mn^4$
11. x^5-x^2-4x-2 এবং $x^5+3x^4-x^3-7x^2-5x-1$

12. $x^5+11x-12$ এবং x^5+11x^3+54 [D. B. 194

13. $2x^5-11x^2-9$ এবং $4x^5+11x^4+81$ [D. B. 193

14. $x^3-9x^2+26x-24$, $x^3-10x^2+31x-30$ এবং x^3-11x^2+38x-

15. $4x^3-28x^2+39x+27$, $6x^3-47x^2+96x-27$ এবং $12x^3-52x^2-11x+$

16. x^4-x^2+6x-9, $x^4-2x^3-5x^2-6x+9$ এবং $x^5+x^4-4x^3+2x^2+6x-$

17. $12a^4-8a^3-37a^2+7a+6$, $a^4+a^3-39a^2+21a+90$ এবং $a^4+2a^3-25a^2-26a+12$

*18. x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$-এর গ. সা. গু. যদি $x+a$ হয়, তবে প্রমাণ কর, $(p-p')a=q-q'$ [C. U. 1941

D. জটিলতর ল. সা. গু.

(1) দুইটি বহুপদ রাশির ল. সা. গু. নির্ণয়ঃ

যে সকল রাশিকে প্রচলিত নিয়মাবলী দ্বারা কখনও উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যা না, তাহাদের ল. সা. গু. নিম্নোক্ত প্রণালীতে নির্ণয় করা হয়।

মনে কর, a এবং b দুইটি রাশি এবং ইহাদের গ. সা. গু $=H$ এব ল. সা. গু. $=L$

মনে কর, $a=xH$ এবং $b=yH$ ($\because$ a এবং b প্রত্যেকে উহাদের গ. সা. গু H দ্বারা বিভাজ্য।)

a এবং b-এর গ. সা. গু. H বলিয়া x এবং y-এর মধ্যে আর কোন সাধা উৎপাদক নাই।

$\therefore$ xH এবং yH-এর ল সা. গু. $=xyH$

$\therefore$ a এবং b-এর ল. সা. গু. $L=xyH=\frac{xH.yH}{H}=\frac{ab}{H}=\frac{a}{H}\times$

সুতরাং, দুইটি বহুপদবিশিষ্ট রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রথ উহাদের গ. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়; তৎপরে যে-কোন একটি রাশিকে ঐ গ সা.

দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলকে অপর রাশিটির দ্বারা গুণ করিতে হয়। এই গুণফলই রাশি দুইটির নির্ণেয় ল. সা. গু.।

উদাহরণ 1. ল. সা. গু. নির্ণয় কর : x^3-2x+1 এবং x^3+2x^2-1

$$\begin{array}{r|l|l}
x^3-2x+1 & x^3+2x^2-1 & 1 \\
 & x^3-2x+1 & \\
\hline
2 & 2x^2+2x-2 & \\
\hline
x^2+x-1 & x^3-2x+1 & x-1 \\
 & x^3+x^2-x & \\
\hline
 & -x^2-x+1 & \\
 & -x^2-x+1 & \\
\end{array}$$

অতএব, রাশি দুইটির গ. সা. গু. $=x^2+x-1$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু. $=\dfrac{x^3-2x+1}{x^2+x-1}\times(x^3+2x^2-1)$

$$=(x-1)(x^3+2x^2-1)$$

[**মন্তব্য :** এই প্রণালী হইতে জানা গেল, দুইটি রাশির গ. সা. গু. $\times$ ল. সা. গু. $=$ সংখ্যা দুইটির গুণফল ; কারণ, $L=\dfrac{ab}{H}$ হইলে $L\times H=ab$]

(2) তিন বা তদধিক রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় :

মনে কর, a, b এবং c রাশি তিনটির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, a এবং b-এর ল. সা. গু. $=M$; তাহা হইলে a এবং b-এর সাধারণ উৎপাদকগুলি M-এরও উৎপাদক।

$\therefore$ a, b এবং একটি তৃতীয় রাশি c-এর প্রত্যেকটি M এবং c-এর ল. সা. গু.-রও উৎপাদক।

$\therefore$ a, b এবং c-এর ল. সা. গু. প্রকৃতপক্ষে M এবং c-এরও ল. সা. গু.।

সুতরাং, তিন বা তদধিক রাশির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমতঃ যে-কোন দুইটি রাশির ল সা. গু. নির্ণয় করিতে হয়। পরে এই প্রাপ্ত ল. সা. গু. এবং তৃতীয় রাশিটির ল. সা. গু নির্ণয় করিতে হয়।

চতুর্থ রাশি থাকিলে প্রথম তিনটি রাশির ল. সা. গু. এবং চতুর্থ রাশিটির ল. সা. গু. নির্ণয় করিতে হয় ও এইভাবে ক্রমশঃ অগ্রসর হইতে হয়।

উদাহরণ 2. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$8a^3+8a^2+4a+1,\ 1+4a+4a^2-16a^4$ এবং $1+2a-8a^3-1\ a^4$

মনে কর, $A=8a^3+8a^2+4a+1$ এবং $B=1+4a+4a^2-16a^4$

$\therefore\quad A-B=(8a^3+8a^2+4a+1)-(1+4a+4a^2-16a^4)$

$=16a^4+8a^3+4a^2=4a^2(4a\quad +2a+1)$

গ. সা. গু.-টি $A-B$-এর মধ্যেও সাধারণ; কিন্তু $A-B$-এর মাত্র দুইটি উৎপাদক, a^2 এবং $4a^2+2a+1$

a^2 সাধারণ গুণনীয়ক হইতে পারে না ; $\therefore$ $4a^2+2a+1$ হওয়াই সম্ভব।

$A=(4a^2+2a+1)+(8a^3+4a^2+2a)$

$=(4a^2+2a+1)+2a(4a^2+2a+1)=(1+2a)(4a^2+2a+1)$

$B=(4a^2+2a+1)-(8a^3+4a^2+2a)-(16a^4+8a^3+4a^2)$

$=(4a^2+2a+1)(1+2a-\quad a^2)$.

$\therefore$ প্রথম দুইটি রাশির ল. সা গু.

$=(4a^2+2a+1)(2a+1)(1+2a-4a^2)$

তৃতীয় রাশি $=(2a+1)-8a^3(2a+1)$

$=(2a+1)(1-8a^3)=(2a+1)(1-2a)(1+2a+4a^2)$

$\therefore$ নির্ণেয় ল. সা. গু $=(2a+1)(4a^2+2a+1)(1-2a)(1+2a-4a^2)$

প্রশ্নমালা 17

ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

1. $a^3-7a-36$ এবং $a^3-13a-12$
2. $2x^3-5x-39$ এবং $x^4-21x-18$ [A. U. 1904]
3. x^3+2x^2-x-2 এবং $2x^4-x^3-9x^2+4x+4$
4. $a^4-2a^3-3a^2+8a-4$ এবং $a^4-5a^2+20a-16$
5. $4y^4-5y^2+1$ এবং $4y^4+4y^3+y^2-1$ [B. U. 1903]
6. $x^5-5x^3+x^2+4x-4$ এবং $x^4+x^3-6x^2-4x+8$
7. $a^2+5a+6,\ a^2+6a+8$ এবং a^3+4a^2+4a+3 [C. U. 1934]
8. $8x^3+27,\ 16x^4+26x^2+81$ এবং $6x^2-5x-6$ [P. U. 1928]
9. $8x^3-12x^2+6x+1,\ 8x^3-4x^2-2x+1$ এবং $2x^2+5x-3$

*10. x ও y দুইটি রাশির গ. সা. গু. h এবং ল. সা. গু. l; $h+l=x+y$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $h^3+l^3=x^3+y^3$ [P. U.]

সপ্তম অধ্যায়

সহজ ভগ্নাংশ

(Easy Fractions)

A. ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগ

ভগ্নাংশসমূহের যোগ বা বিয়োগ করিতে হইলে প্রথমে প্রত্যেকটি ভগ্নাংশকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে পরিণত করিতে হয়। পরে, ঐরূপে প্রাপ্ত ভগ্নাংশগুলির লবগুলির বীজগণিতীয় সমষ্টিকে বা অন্তরকে লঘিষ্ঠ সাধারণ হর দ্বারা ভাগ করিলেই নির্ণেয় যোগফল বা বিয়োগফল পাওয়া যায়।

ভগ্নাংশের যোগ :

উদাহরণ 1. যোগ কর : $\frac{4x}{4x^2-1}+\frac{2}{1+2x}$

$$\text{রাশিমালা}=\frac{4x}{(2x+1)(2x-1)}+\frac{2}{1+2x}$$

$$=\frac{4x}{(2x+1)(2x-1)}+\frac{2(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$=\frac{4x+4x-2}{(2x+1)(2x-1)}$$

$$=\frac{8x-2}{4x^2-1}=\frac{2(4x-1)}{4x^2-1}$$

ভগ্নাংশের বিয়োগ :

উদাহরণ 2. বিয়োগ কর : $\frac{x}{(x+y)^2}-\frac{y}{x^2-y^2}$

$$\text{রাশিমালা}=\frac{x}{(x+y)^2}-\frac{y}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x(x-y)-y(x+y)}{(x+y)^2(x-y)}$$

$$=\frac{x^2-xy-xy-y^2}{(x+y)^2(x-y)}=\frac{x^2-2xy-y^2}{(x+y)^2(x-y)}$$

ভগ্নাংশের সরল :

যোগ ও বিয়োগ চিহ্নযুক্ত সরল অঙ্কে যোগচিহ্নযুক্ত রাশিগুলির যোগফল হইতে বিয়োগ চিহ্নযুক্ত রাশিগুলির যোগফল বিয়োগ করিতে হয়।

উদাহরণ 3. সরল কর : $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a-b}+\frac{2a}{a^2-b^2}$

$$\text{রাশিমালা}=\frac{(a-b)+(a+b)+2a}{a^2-b^2}$$

$$=\frac{a-b+a+b+2a}{a^2-b^2}=\frac{4a}{a^2-b^2}$$

উদাহরণ 4. সরল কর : $\frac{1}{m+n}+\frac{n}{m^2-n^2}-\frac{m}{m^2+n^2}$

$$\text{রাশিমালা}=\frac{(m-n)+n}{m^2-n^2}-\frac{m}{m^2+n^2}$$

$$=\frac{m}{m^2-n^2}-\frac{m}{m^2+n^2}$$

$$=\frac{m(m^2+n^2)-m(m^2-n^2)}{(m^2-n^2)(m^2+n^2)}=\frac{2mn^2}{m^4-n^4}$$

[এরূপ ক্ষেত্রে তিনটি ভগ্নাংশের কাজ একসঙ্গে না করিয়া প্রথমে প্রথম দুইটি ভগ্নাংশের মধ্যে যোগ-বিয়োগ করিয়া লব্ধ ফলের সহিত তৃতীয় ভগ্নাংশটি যোগ বা বিয়োগ করিতে হয়।]

উদাহরণ 5. সরল কর : $\frac{(a-b)^2-c^2}{a^2-(b+c)^2}+\frac{(b-c)^2-a^2}{b^2-(c+a)^2}+\frac{(c-a)^2-b^2}{c^2-(a+b)^2}$

[W. B. S. B. 1954]

$$\text{রাশিমালা}=\frac{(a-b+c)(a-b-c)}{(a+b+c)(a-b-c)}+\frac{(b-c+a)(b-c-a)}{(b+c+a)(b-c-a)}$$

$$+\frac{(c-a+b)(c-a-b)}{(c+a+b)(c-a-b)}$$

$$=\frac{a-b+c}{a+b+c}+\frac{b-c+a}{a+b+c}+\frac{c-a+b}{a+b+c}$$

$$=\frac{a-b+c+b-c+a+c-a+b}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$$

[এখানে রাশিমালার অন্তর্গত ভগ্নাংশগুলিকে প্রথমে লঘিষ্ঠ আকারে পরিণত করিয়া পরে যোগের কাজ করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 6. সরল কর : $\frac{1}{m-n}-\frac{3}{3m+n}+\frac{1}{m+n}-\frac{3}{3m-n}$

$$\text{রাশিমালা}=\left(\frac{1}{m-n}+\frac{1}{m+n}\right)-\left(\frac{3}{3m+n}+\frac{3}{3m-n}\right)$$

$$=\frac{m+n+m-n}{m^2-n^2}-\frac{9m-3n+9m+3n}{9m^2-n^2}$$

$$=\frac{2m}{m^2-n^2}-\frac{18m}{9m^2-n^2}$$

$$=\frac{2m(9m^2-n^2)-18m(m^2-n^2)}{(m^2-n^2)(9m^2-n^2)}$$

$$=\frac{18m^3-2mn^2-18m^3+18mn^2}{(m^2-n^2)(9m^2-n^2)}$$

$$=\frac{16mn^2}{(m^2-n^2)(9m^2-n^2)}.$$

[এস্থলে অনুরূপ রাশিগুলিকে পৃথক পৃথক বন্ধনীতে রাখায় অঙ্কটি কষিতে সুবিধা হইয়াছে।]

উদাহরণ 7. সরল কর : $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}+\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}-\frac{8x^7}{x^8-y^8}.$

$$\text{রাশিমালা}=\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right)+\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}-\frac{8x^7}{x^8-y^8}$$

$$=\frac{x-y+x+y}{x^2-y^2}+\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}-\frac{8x^7}{x^8-y^8}$$

$$=\left(\frac{2x}{x^2-y^2}+\frac{2x}{x^2+y^2}\right)+\frac{4x^3}{x^4+y^4}-\frac{8x^7}{x^8-y^8}$$

$$=\frac{2x^3+2xy^2+2x^3-2xy^2}{x^4-y^4}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}-\frac{8x^7}{x^8-y^8}$$

$$=\left(\frac{4x^3}{x^4-y^4}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}\right)-\frac{8x^7}{x^8-y^8}$$

$$=\frac{4x^7+4x^3y^4+4x^7-4x^3y^4}{x^8-y^8}-\frac{8x^7}{x^8-y}$$

$$=\frac{8x^7}{x^8-y^8}-\frac{8x^7}{x^8-y^8}=\frac{8x^7-8x^7}{x^8-y^8}=0.$$

[এরূপ স্থলে প্রথমে প্রথম তুইটি ভগ্নাংশের সমষ্টি নির্ণয় করিয়া উহার সহিত তৃতীয় ভগ্নাংশটি যোগ করা হইয়াছে। পরে উক্ত যোগফলের সহিত চতুর্থ ভগ্নাংশটি যোগ করা হইয়াছে। এইভাবে অঙ্ক কষায় জটিলতা আসিতে পারে নাই।

প্রশ্নমালা 18

সরল কর :

1. $\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}+\frac{a-b}{ab}$

2. $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}+\frac{6}{9-x^2}$

3. $\frac{a^2+ac}{a^2c-c^3}+\frac{a-c}{c(a+c)}-\frac{2c}{a^2-c^2}$

4. $\frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}+\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$

5. $\frac{a-2x}{a+2x}-\frac{a+2x}{a-2x}+\frac{8ax}{a^2+4x^2}$

6. $\frac{2}{x^2-1}+\frac{3}{x^2+x-2}+\frac{2}{x^2+3x+2}$

7. $\frac{1}{x^2-8x+15}+\frac{1}{x^2-4x+3}-\frac{2}{x^2-6x+5}$

8. $\frac{a^2-(b-c)^2}{(c+a)^2-b^2}+\frac{b^2-(c-a)^2}{(a+b)^2-c^2}+\frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$

9. $\frac{9x^2-(y-z)^2}{(3x+z)^2-y^2}+\frac{y^2-(z-3x)^2}{(3x+y)^2-z^2}+\frac{z^2-(3x-y)^2}{(y+z)^2-9x^2}$ [B. U. 1924]

10. $\frac{3}{(1+x)(x+4)}+\frac{1}{(4+x)(x+5)}-\frac{2}{(5+x)(x+1)}$ [Pat. U. 1949]

11. $\frac{b-c}{a^2-(b-c)^2}+\frac{c-a}{b^2-(c-a)^2}+\frac{a+b}{c^2-(a-b)^2}$ [D. B. 1926]

12. $\frac{a^2(b-c)}{(b+a)(a+c)}+\frac{b^2(c-a)}{(c+b)(b+a)}+\frac{c^2(a-b)}{(a+c)(c+b)}$ [C. U. 1947]

13. $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}+\frac{2x}{x^2+y^2}+\frac{4x^3}{x^4+y^4}$ [G. U. 1951]

14. $\frac{1}{x+a}+\frac{2x}{x^2+a^2}+\frac{4x^3}{x^4+a^4}-\frac{8x^7}{x^8-a^8}$ [C. U. 1943]

15. $1+\frac{a}{b}-\frac{b}{a+b}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{2a^2}{a^2-b^2}$

16. $\frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{(x-y)(y-z)+(y-z)(z-x)+(z-x)(x-y)}$

17. $\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}+\frac{2}{a-b}+\frac{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}{(b-c)(c-a)(a-b)}$

18. $\frac{1}{8(x+1)}-\frac{3}{8(x-1)}-\frac{1-x}{4(x^2+1)}$

19. $\frac{3(x-4)}{x^2-5x+6}+\frac{5x-3}{x^2-2x-3}+\frac{x+15}{x^2-x-2}$

20. $\frac{1+m}{1-m}+\frac{4m}{1+m^2}-\frac{1-m}{1+m}+\frac{8m}{1+m^4}-\frac{16m}{1-m^8}$

21. $\frac{1}{3(a-3)}+\frac{1}{(a-2)(a-4)}-\frac{1}{(a-2)(a-3)(a-4)}$

22. $\frac{x-y}{(a+x)(a+y)}+\frac{y-z}{(a+y)(a+z)}+\frac{z-x}{(a+z)(a+x)}$ [A. U. 1951]

B. ভগ্নাংশের গুণন ও ভাগ

ভগ্নাংশের গুণন :

একাধিক বীজগণিতীয় ভগ্নাংশের গুণফল নির্ণয় করিতে হইলে প্রথমে ভগ্নাংশগুলির লব ও হরের মধ্যে কোন সাধারণ উৎপাদক থাকিলে তাহা অপসারণ করিতে হয় এবং পরে লব ও হরগুলির গুণফল পৃথক পৃথক ভাবে বাহির করিতে হয়। ঐ লবগুলির গুণফল দ্বারা গঠিত সংখ্যাই নবগঠিত ভগ্নাংশের লব এবং হরগুলির গুণফল দ্বারা গঠিত সংখ্যাই নবগঠিত ভগ্নাংশের হর।

উদাহরণ 1. গুণ কর : $\frac{1+x^2}{(1-x)^2}\times\frac{1-x^3}{1-x^4}\times\frac{1}{1+x+x^2}$

রাশিমালা $=\frac{1+x^2}{(1-x)^2}\times\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{(1+x^2)(1+x)(1-x)}\times\frac{1}{1+x+x^2}$

$=\frac{1}{(1+x)(1-x)^2}$

ভগ্নাংশের ভাগ :

যেহেতু ভাগ গুণনেরই বিপরীত ক্রিয়া, সেইজন্য একটি ভগ্নাংশকে অপর একটি ভগ্নাংশ দ্বারা ভাগ করিতে হইলে প্রথমটিকে শেষোক্তটির **অন্যোন্যক** (Reciprocal) দ্বারা গুণ করিতে হয়।

উদাহরণ 2. ভাগ কর : $\dfrac{a^2-a-30}{a^2+a-12} \div \dfrac{a^2-25}{(a+4)^2}$

$$\text{রাশিমালা} = \frac{a^2-a-30}{a^2+a-12} \times \frac{(a+4)^2}{a^2-25}$$

$$= \frac{(a-6)(a+5)}{(a+4)(a-3)} \times \frac{(a+4)^2}{(a+5)(a-5)}$$

$$= \frac{(a-6)(a+4)}{(a-3)(a-5)} = \frac{a^2-2a-24}{a^2-8a+15}$$

ভগ্নাংশের সরল :

ভাগ ও গুণন চিহ্নযুক্ত সরল অঙ্কে সর্বাগ্রে ভাগ ও পরে গুণনের কাজ করিতে হয়।

উদাহরণ 3. সরল কর : $\dfrac{4a+16}{a^2+4a+16} \times \dfrac{a^3-64}{4a^2-64} \div \dfrac{4a^2-12a-16}{a^2+a}$

$$\text{রাশিমালা} = \frac{4a+16}{a^2+4a+16} \times \frac{a^3-64}{4a^2-64} \times \frac{a^2+a}{4a^2-12a-16}$$

$$= \frac{4(a+4)}{a^2+4a+16} \times \frac{(a^2-4)(a^2+4a+16)}{4(a+4)(a-4)} \times \frac{a(a+1)}{4(a-4)(a+1)}$$

$$= \frac{a}{4(a-4)}$$

উদাহরণ 4. সরল কর : $\left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{a-b}{a+b}\right) \div \left(\dfrac{a+b}{a-b} + \dfrac{a-b}{a+b}\right) \times \dfrac{a^2+b^2}{ab}$

$$\text{প্রথম অংশ} = \frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{4ab}{a^2-b^2}$$

$$\text{দ্বিতীয় অংশ} = \frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$$

$$\therefore \text{রাশিমালা} = \frac{4ab}{a^2-b^2} \div \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \times \frac{a^2+b^2}{ab}$$

$$=\frac{4ab}{a^2-b^2}\times\frac{a^2-b^2}{2(a^2+b^2)}\times\frac{a^2+b^2}{ab}=2$$

[এখানে রাশিমালাটিকে প্রথমে কয়েকটি সুবিধাজনক অংশে বিভক্ত করিয়া আগে সেই অংশগুলি সরল করা হইয়াছে। পরে প্রাপ্ত রাশিগুলি একত্রিত করিয়া সরল করা হইয়াছে। ইহাতে অঙ্ক কষিতে সুবিধা হইয়াছে।]

উদাহরণ 5. সরল কর :

$$\left(\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)\div\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\div\left\{\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}-1\right\}$$

$$\text{রাশিমালা}=\left\{\frac{(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2}{x^4-y^4}\right\}\div\left\{\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}\right\}$$
$$\div\left\{\frac{(x+y)^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right\}$$

$$=\frac{4x^2y^2}{x^4-y^4}\div\frac{4xy}{x^2-y^2}\div\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{4x^2y^2}{x^4-y^4}\times\frac{x^2-y^2}{4xy}\times\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{1}{2}$$

উদাহরণ 6. সরল কর :

$$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)$$

$$\text{রাশিমালা}=\left(\frac{b}{bc}+\frac{c}{bc}\right)(b^2+c^2-a^2)+\left(\frac{c}{ca}+\frac{a}{ca}\right)(c^2+a^2-b^2)$$
$$+\left(\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}\right)(a^2+b^2-c^2)$$

$$=\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)(b^2+c^2-a^2)+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)(c^2+a^2-b^2)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$$
$$(a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{c}(b^2+c^2-a^2)+\frac{1}{b}(b^2+c^2-a^2)+\frac{1}{a}(c^2+a^2-b^2)$$
$$+\frac{1}{c}(c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{b}(a^2+b^2-c^2)+\frac{1}{a}(a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{c}(b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2)+\frac{1}{b}(b^2+c^2-a^2$$

$$+a^2+b^2-c^2)+\frac{1}{a}(c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2)$$

$$=\frac{1}{c}\times 2c^2+\frac{1}{b}\times 2b^2+\frac{1}{a}\times 2a^2=2(a+b+c)$$

প্রশ্নমালা 19

সরল কর :

1. $\dfrac{a^2+ab}{a+b}\div\dfrac{ab(a^2-b^2)}{(a+b)^2}$ 2. $\dfrac{a^4-b^4}{a^2+b^2-2ab}\div\dfrac{a-b}{a^2+ab}$

3. $\dfrac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\times\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\div\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2$

4. $\dfrac{x+1}{x-1}\times\dfrac{x^2+x-6}{x^4-13x^2+36}\div\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-6}$

5. $\dfrac{(m-n)^3}{m^3-n^3}\div\dfrac{m^3+8m^2n-9mn^2}{m+n}\times\dfrac{m^4+m^2n^2+n^4}{m^2-n^2}$

6. $\dfrac{a^4-b^4}{a^6-b^6}\times\dfrac{a^3+b^3}{a^2+b^2}\div\dfrac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^3-b^3}$

7. $\dfrac{8p^2-26p+15}{3p^2-p-4}\times\dfrac{3p^2-7p+4}{2p^2-7p+5}\div\dfrac{4p^2+p-3}{p^2-1}$

8. $\dfrac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\div\dfrac{(x-y)^2}{(a-b)^2}\times\dfrac{(a+b)(x-y)}{(x+y)(a-b)}$

$\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}\times\dfrac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}\div\dfrac{x^2+x}{x^2+2x+4}$

10. $\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\right\}\div\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2$

11. $\left(m-\dfrac{m-n}{1-mn}\right)\div\left\{1-\dfrac{m(m-n)}{1-mn}\right\}$

12. $\dfrac{(a+c)(b+c)}{a-b}\div\left(\dfrac{c^2+ab}{a^2-b_2}+\dfrac{c}{a-b}\right)$

13. $\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)\div\left(\frac{a-b}{a+b}-\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}\right)$

14. $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\div a\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\right)$ [C. U. 1948 (Suppl.)]

15. $\left(x+\frac{a-x}{1+ax}\right)\times\frac{x}{a}\div\left\{1-\frac{x(a-x)}{1+ax}\right\}$ [A. U. 1932]

16. $\frac{x^6+1}{x^6-1}\div\left(\frac{x^4-x^2+1}{x^4+x^2+1}\div\frac{x+1}{x-1}\right)$

17. $\frac{xy-2y^2}{x^2+xy}\times\frac{x^2-xy}{(x-y)^2}\div\left\{1+\frac{3(y^2-xy)}{x^2-y^2}\right\}$

18. $\left(m+\frac{3mn+n^2}{m-n}\right)\left(m-\frac{3mn-n^2}{m+n}\right)\div\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$

19. $\frac{b+c}{2bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{2ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{2ab}(a^2+b^2-c^2)$

20. $\frac{b+c-a}{bc}(b+c)+\frac{c+a-b}{ca}(c+a)+\frac{a+b-c}{ab}(a+b).$

C. ভগ্নাংশ-ঘটিত অভেদ

ভগ্নাংশ-ঘটিত অভেদাবলীর সমাধান প্রণালী নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে বুঝিতে পারা যাইবে।

উদাহরণ 1. প্রমাণ কর :

$$\frac{a}{ax+x^2}+\frac{b}{bx+x^2}+\frac{c}{cx+x^2}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+c}$$

[B. U. 1920]

প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ

$$\frac{a}{ax+x^2}-\frac{1}{x}+\frac{b}{bx+x^2}-\frac{1}{x}+\frac{c}{cx+x^2}-\frac{1}{x}+\frac{3}{x}$$

$$=\frac{a}{x(a+x)}-\frac{1}{x}+\frac{b}{x(b+x)}-\frac{1}{x}+\frac{c}{x(c+x)}-\frac{1}{x}+\frac{3}{x}$$

$$=\frac{a-a-x}{x(a+x)}+\frac{b-b-x}{x(b+x)}+\frac{c-c-x}{x(c+x)}+\frac{3}{x}$$

$$=\frac{3}{x}+\frac{-x}{x(a+x)}+\frac{-x}{x(b+x)}+\frac{-x}{x(c+x)}$$

$$=\frac{3}{x}-\frac{1}{a+x}-\frac{1}{b+x}-\frac{1}{c+x}$$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 2. $ab+bc+ca=0$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0$$ [W. B. S. B. 19[illegible]4, 1955]

$ab+bc+ca=0 \quad \therefore \quad ab+bc=-ca$

$bc+ca=-ab$

এবং $ca+ab=-bc$

এখন, প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ

$$=\frac{1}{a^2+ca+ab}+\frac{1}{b^2+ab+bc}+\frac{1}{c^2+bc+ca}$$

$$=\frac{1}{a(a+b+c)}+\frac{1}{b(a+b+c)}+\frac{1}{c(a+b+c)}$$

$$=\frac{bc+ca+ab}{abc(a+b+c)}=\frac{0}{abc(a+b+c)}=0$$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 3. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$\frac{a}{a^2-bc}+\frac{b}{b^2-ca}+\frac{c}{c^2-ab}=0$$

$a+b+c=0$	$a+b+c=0$	$a+b+c=0$
বা, $a=-b-c$	বা, $b=-c-a$	বা, $c=-a-b$
$\therefore \quad a^2=-ab-ac$	$\therefore \quad b^2=-bc-ab$	$\therefore \quad c^2=-ac-bc$

এখন, প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ

$$=\frac{a}{-ab-ac-bc}+\frac{b}{-bc-ab-ca}+\frac{c}{-ac-bc-ab}$$

$$=\frac{a+b+c}{-ab-bc-ca}=\frac{0}{-ab-bc-ca}=0$$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 4. $a^2=by+cz$, $b^2=cz+ax$ এবং $c^2=ax+by$ হইলে, প্রমাণ কর, $\frac{x}{x+a}+\frac{y}{y+b}+\frac{z}{z+c}=1$

প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ

$$=\frac{x.a}{(x+a)a}+\frac{y.b}{(y+b)b}+\frac{z.c}{(z+c)c}$$

$$=\frac{}{ax+a^2}+\frac{by}{by+b^2}+\frac{}{cz+c^2}$$

$$=\frac{ax}{ax+by+cz}+\frac{by}{by+cz+ax}+\frac{cz}{cz+ax+by}$$

$$=\frac{ax+by+cz}{ax+by+cz}=1$$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 5. $a+2b+3c=0$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$\frac{2c}{a+c}-\frac{a}{b+c}=2$$

$\because\quad a+2b+3c=0;\quad \therefore\quad a+c=-2b-2c=-2(b+c)$

এখন, প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ

$$=\frac{2c}{-2(b+c)}-\frac{a}{b+c}=\frac{-c}{b+c}+\frac{-a}{b+c}=\frac{-(a+c)}{b+c}$$

$$=\frac{-\{-2(b+c)\}}{b+c}=2$$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 6. $x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$x^3-\frac{1}{x^3}=a^3-\frac{1}{a^3}$$ [W.B.S.B. 1954 (Spl.)]

$\because\quad x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a};\quad \therefore\quad \left(x-\frac{1}{x}\right)^3=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3$

বা, $x^3-\frac{1}{x^3}-3x\frac{1}{x}\left(x-\frac{1}{x}\right)=a^3-\frac{1}{a^3}-3a.\frac{1}{a}\left(a-\frac{1}{a}\right)$

বা, $x^3-\frac{1}{x^3}-3\left(x-\frac{1}{x}\right)=a^3-\frac{1}{a^3}-3\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$\therefore\ x^3-\frac{1}{x^3}=a^3-\frac{1}{a^3}$ [প্রমাণিত)। $\left[\because\ x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}\right]$

উদাহরণ 7. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ

$$=\frac{s-b+s-a}{(s-a)(s-b)}+\frac{s-s+c}{s(s-c)}=\frac{2s-a-b}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}$$

$$=\frac{a+b+c-a-b}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}=\frac{c}{(s-a)(s-b)}+\frac{c}{s(s-c)}$$

$$=c\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)}+\frac{1}{s(s-c)}\right\}=c\left\{\frac{s(s-c)+(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}$$

$$=c\left\{\frac{s^2-cs+s^2-as-bs+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}=c\left\{\frac{2s^2-s(a+b+c)+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}$$

$$=c\left\{\frac{2s^2-2s^2+ab}{s(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}=\frac{abc}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 8. $x+y=2z$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$\frac{x}{x-z}+\frac{z}{y-z}=1$$ [W. B. S. B. 1953]

প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ $=\frac{x}{x-z}+\frac{z}{y-z}=\frac{x}{x-z}+\frac{z}{z-x}$

$$=\frac{x}{x-z}-\frac{z}{x-z}=\frac{x-z}{x-z}=1$$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 9. যদি $\frac{a^2-bc}{a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{c^2+ab}=1$ হয়,

প্রমাণ কর, $\frac{a^2}{a^2+bc}+\frac{b^2}{b^2+ca}+\frac{c^2}{c^2+ab}=2$

প্রদত্ত সর্ত হইতে,

$$\frac{a^2-bc}{a^2+bc}+1+\frac{b^2-ca}{b^2+ca}+1+\frac{c^2-ab}{c^2+ab}+1=3+1$$

বা, $\frac{2a^2}{a^2+bc}+\frac{2b^2}{b^2+ca}+\frac{2c^2}{c^2+ab}=4$

বা, $2\left(\frac{a^2}{a^2+bc}+\frac{b^2}{b^2+ca}+\frac{c^2}{c^2+ab}\right)=4$

$\therefore \frac{a^2}{a^2+bc}+\frac{b^2}{b^2+ca}+\frac{c^2}{c^2+ab}=2$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 10. যদি $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$ হয়, প্রমাণ কর,

হয় $a+b+c=0$; নতুবা $a=b=c$ [C. U. 1931]

$\because \frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}$; $\therefore \frac{b+c}{a}+1=\frac{c+a}{b}+1$

বা, $\frac{a+b+c}{a}=\frac{a+b+c}{b}$ বা, $\frac{a+b+c}{a}-\frac{a+b+c}{b}=0$

বা, $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0$

দুইটি রাশির গুণফল 0 হইলে একটি রাশি অবশ্যই 0 হইবে।

$\therefore$ হয়, $a+b+c=0$, নতুবা $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=0$

বা, $\frac{b-a}{ab}=0$ বা, $b-a=0$ $\therefore a=b$

আবার, $\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$; $\therefore \frac{c+a}{b}+1=\frac{a+b}{c}+1$

বা, $\frac{a+b+c}{b}=\frac{a+b+c}{c}$

বা, $\frac{a+b+c}{b}-\frac{a+b+c}{c}=0$

বা, $(a+b+c)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=0$

দুইটি রাশির গুণফল 0 হইলে একটি রাশি অবশ্যই 0 হইবে।

∴ হয়, $a+b+c=0$, নতুবা $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$

বা, $\frac{c-b}{bc}=0$ বা, $c-b=0$ ∴ $b=c$

∴ হয়, $a+b+c=0$, নতুবা $a=b=c$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 11. $x=\frac{4ab}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর,

$$\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}=2$$ [W. B. S. B. 1953]

∵ $x=\frac{4ab}{a+b}$; ∴ $x(a+b)=4ab$

এখন, প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ

$$=\frac{x+2a}{x-2a}-1+\frac{x+2b}{x-2b}-1+2$$

$$=\frac{x+2a-x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b-x+2b}{x-2b}+2$$

$$=\frac{4a}{x-2a}+\frac{4b}{x-2b}+2$$

$$=\frac{4a(x-2b)+4b(x-2a)}{(x-2a)(x-2b)}+2$$

$$=\frac{4ax-8ab+4bx-8ab}{(x-2a)(x-2b)}+2$$

$$=\frac{4x(a+b)-16ab}{(x-2a)(x-2b)}+2$$

$$=\frac{4.4ab-16ab}{(x-2a)(x-2b)}+2$$

$$=\frac{0}{(x-2a)(x-2b)}+2=2$$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 12. প্রমাণ কর : $\frac{a^3-b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2-\frac{2b^3}{a+b}$

$$
\begin{array}{l}
a+b)\,a^3-b^3\,(a^2-ab+b^2\\
\quad\; a^3+a^2b\\
\quad\overline{\;-a^2b-b^3}\\
\quad\;-a^2b-ab^2\\
\quad\overline{\qquad ab^2-b^3}\\
\qquad\; ab^2+b^3\\
\qquad\overline{\qquad -2b^3}
\end{array}
$$

$\therefore\ \frac{a^3-b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2-\frac{2b^3}{a+b}$ (প্রমাণিত)

প্রশ্নমালা 20

প্রমাণ কর :

1. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)=1+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)$

2. $\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2=\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$

3. $\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}+\frac{xyz}{(y-z)(z-x)(x-y)}$
$$=\left(1+\frac{x}{y-z}\right)\left(1+\frac{y}{z-x}\right)\left(1+\frac{z}{x-y}\right)$$

4. $bc+ca+ab=0$ হইলে, প্রমাণ কর,

   (i) $\frac{1}{a^2-bc}+\frac{1}{b^2-ca}+\frac{1}{c^2-ab}=0$ [W.B.S.B. 1954 (Spl.)]

   (ii) $\frac{a^2}{a^2-bc}+\frac{b^2}{b^2-ca}+\frac{c^2}{c^2-ab}=1$ [G. U. 1955

5. যদি $bc+ca+ab=abc$ হয়, প্রমাণ কর,
$$\frac{b+c}{bc(a-1)}+\frac{c+a}{ca(b-1)}+\frac{a+b}{ab(c-1)}=1$$

6. $xy+yz+zx=1$ হইলে, প্রমাণ কর,
$$\frac{1+x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{1+y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{1+z^2}{(z+x)(z+y)}=3$$

7. $a^2=b+c$, $b^2=c+a$ এবং $c^2=a+b$ হইলে, প্রমাণ কর,
$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=1$$ [C. U. 1942, 1949]

8. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর,

(i) $\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2}+\frac{1}{a^2+b^2-c^2}=0$

(ii) $\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab}=0$

(iii) $\frac{a^2+b^2+c^2}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0$

9. $x+y=2z$ হইলে, প্রমাণ কর, $\frac{x}{x-z}+\frac{y}{y-z}=2$

10. $a+\frac{1}{b}=1$ এবং $b+\frac{1}{c}=1$ হইলে, প্রমাণ কর,

(i) $c+\frac{1}{a}=1$, (ii) $abc+1=0$

11. $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{2}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর, $a^2+b^2=2c^2$

12. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর,

$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}=1$ [Utkal U. 1952]

13. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{b}{a}+\frac{d}{c}$ হইলে, প্রমাণ কর, $\frac{a^3}{b^3}+\frac{c}{d^3}=\frac{b^3}{a^3}+\frac{d^3}{c^3}$

14. $2s=a+b+c$ হইলে, প্রমাণ কর,

(i) $1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2(s-a)(s-b)}{ab}$

(ii) $\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}+2=\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}$

15. $x+y+z=1$ হইলে, প্রমাণ কর,

$\frac{x+yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{y+zx}{(y+z)(y+x)}+\frac{z+xy}{(z+x)(z+y)}=3$

16. $\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c+a}{b}=1$ হইলে, এবং $(a-b+c)$-এর মান 0 না হইলে, প্রমাণ কর, $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

17. $x=\frac{2ab}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর, $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=2$ [Pat. U. 1947]

18. $x=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর, $\frac{(x-a)(x-b)}{(x-a-b)^2}=1$

19. যদি $\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}=\frac{c}{a+b}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর,

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=9$

20. যদি $\frac{a}{1-a}+\frac{b}{1-b}+\frac{c}{1-c}=1$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর,

$\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}=4$

21. $\frac{a}{b+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{2b}{c+a}$ হইলে, দেখাও যে,

হয়, $a+b+c=0$, নতুবা $a^2+c^2=2b^2$

22. যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর,

$$\frac{2a^2}{b^2+c^2-a^2}+\frac{2b^2}{c^2+a^2-b^2}+\frac{2c^2}{a^2+b^2-c^2}=a^3+b^3+c^3$$

23. যদি $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ এবং $z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ হয়,

তাহা হইলে প্রমাণ কর, $(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z=a+b+c$

24. প্রমাণ কর, $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}=x-y+\frac{2y^3}{x^2+xy+y^2}$

25. প্রমাণ কর, $\frac{4x^2+4x-21}{2x-3}=2x+5-\frac{6}{2x-3}$

26. প্রমাণ কর, $\frac{x^3-y^3}{(x-y)^2}=x+y+\frac{3y^2}{x-y}$

27. দেখাও যে, $\left(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\right)\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right)-\frac{y}{x^2+xy}+\frac{x}{xy-y^2}=\frac{1}{x+y}$

অষ্টম অধ্যায়

সরল সমীকরণ (কঠিনতর)
[Simple Equations (Harder)]

সরল সমীকরণ সম্পর্কে পূর্বে আলোচনা করা হইয়াছে। এস্থলে অপেক্ষাকৃত কঠিন এবং আক্ষরিক সহগযুক্ত সরল সমীকরণের সমাধান-প্রণালী সম্পর্কে আলোচনা করা হইতেছে।

মনে রাখিও, সরল সমীকরণে x সর্বদা অজ্ঞাত রাশি এবং $a, b, c, d, \ldots$ q, r ইত্যাদি অক্ষরসমূহ জ্ঞাতরাশি বা ধ্রুবক।

বজ্রগুণন : যদি দুইটি ভগ্নাংশ পরস্পর সমান হয়, তবে প্রথমটির হর ও দ্বিতীয়টির লবের গুণফল এবং প্রথমটির লব ও দ্বিতীয়টির হরের গুণফল পরস্পর সমান হইবে। এই গুণন প্রক্রিয়াকে **বজ্রগুণন** (Cross Multiplication) বলা হয়।

যদি $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ হয়, তবে $ad=bc$ হইবে।

প্রমাণ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

বা, $\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd$ [উভয়পক্ষকে হরগুলির ল. সা. গু. bd দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $ad=bc$

(A) সরল সমীকরণ সমাধান করিতে কখনও কখনও বজ্রগুণন প্রণালীর সাহায্য লওয়া হইয়া থাকে। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\frac{x+a+c}{x+b+c}=\frac{b}{a}$ [D. B. 1939]

$$\frac{x+a+c}{x+b+c}=\frac{b}{a}$$

বা, $a(x+a+c)=b(x+b+c)$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $ax+a^2+ac=bx+b^2+bc$

বা, $ax-bx=b^2-a^2+bc-ca$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $x(a-b)=(b-a)(b+a)+c(b-a)=(b-a)(a+b+c)$

বা, $x=\frac{-(a-b)(a+b+c)}{(a-b)}=-(a+b+c)$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=-(a+b+c)$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\frac{7x^2}{(x-1)(2x-3)}=3\frac{1}{2}$ [D. B. 1941]

$\frac{7x^2}{(x-1)(2x-3)}=3\frac{1}{2}$ বা, $\frac{7x^2}{2x^2-5x+3}=\frac{7}{2}$

বা, $2.7x^2=7(2x^2-5x+3)$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $14x^2=14x^2-35x+21$

বা, $14x^2-14x^2+35x=21$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $35x=21$ বা, $x=\frac{21}{35}=\frac{3}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=\frac{3}{5}$

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\frac{mx}{x-n}+\frac{nx}{x-m}=m+n$

$\frac{mx}{x-n}+\frac{nx}{x-m}=m+n$

বা, $\frac{mx}{x-n}-m=n-\frac{nx}{x-m}$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{mx-mx+mn}{x-n}=\frac{nx-mn-nx}{x-m}$

বা, $\frac{mn}{x-n}=\frac{-mn}{x-m}$

বা, $\frac{1}{x-n}=\frac{-1}{x-m}$ [উভয়পক্ষকে mn দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $x-m=-x+n$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $2x=m+n$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $x=\frac{m+n}{2}$ নির্ণেয় বীজ, $x=\frac{m+n}{2}$

[এস্থলে পূর্বেই সুবিধামত পদ পক্ষান্তর করিয়া লইয়া উভয়পক্ষকে সরল করা হইয়াছে। উভয়পক্ষকে একটি পদে পরিণত করিয়া বজ্রগুণন করা হইয়াছে।]

প্রশ্নমালা 21

সমাধান কর :

1. $\frac{b}{x}=\frac{a}{x-b+a}$

2. $\frac{2}{3-5x}=\frac{5}{3x+23}$

3. $\frac{3}{3x^2+4x+19}=\frac{2}{2x^2+5x+8}$

4. $6\frac{1}{3}-\frac{x-7}{3}=\frac{4x-2}{5}$

5. $\frac{2}{x-a}+\frac{3}{x+a}=\frac{9a}{x^2-a^2}$

6. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+a}=\frac{2}{x+b}$

7. $\frac{x-3}{2x-3}=\frac{2x}{4x-9}$

8. $\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{10x-1}{15x}$

9. $\frac{x+a}{x+b}=\frac{x+3a}{x+a+b}$

10. $\frac{1}{4}+\frac{5x-5}{12x+8}=\frac{6x-7}{9x+6}$

11. $\frac{2x-11}{6x-15}=\frac{2(x-3)}{6(x-1)}$

12. $\frac{10x+17}{18}-\frac{12x+2}{11x-8}=\frac{5x-}{9}$

13. $\frac{4x+3}{9}+\frac{29-7x}{12-5x}=\frac{8x+19}{18}$

14. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a+b}+\frac{1}{x}$

15. $\frac{a-x^2}{bx}-\frac{b-x}{c}=\frac{c-x}{b}-\frac{b-x^2}{cx}$

16. $\frac{2x-m}{n}+\frac{2x+m}{x+n}=\frac{2mx+n^2}{mn}$

(B) কখনও কখনও সমীকরণের এক পক্ষকে সুবিধামত কয়েকটি অংশে বিভক্ত করিয়া লইলে সমাধান অপেক্ষাকৃত সহজ হয়। নিম্নের উদাহরণগুলি লক্ষ্য কর।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$

[W. B. S. B. 1957, 1960]

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{3}{x-3}$$

বা, $$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x-3}$$

বা, $\frac{}{x-1}-\frac{}{x-3}=\frac{}{x-3}-\frac{}{x-2}$

বা, $\frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{2x-4-2x+6}{(x-2)(x-3)}$

বা, $\frac{-2}{(x-1)(x-3)}=\frac{2}{(x-2)(x-3)}$

বা, $\frac{-1}{x-1}=\frac{1}{x-2}$ [উভয় পক্ষকে $\frac{x-3}{2}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $-x+2=x-1$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $-x-x=-2-1$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $-2x=-3$ বা, $x=\frac{-3}{-2}=1\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=1\frac{1}{2}$

[এস্থলে সমীকরণের দক্ষিণ পক্ষের লব 3-কে ভাঙিয়া (1+2) করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\frac{5}{2x-5}+\frac{1}{2x+5}=\frac{12}{4x+5}$

$\frac{5}{2x-5}+\frac{1}{2x+5}=\frac{12}{4x+5}$

বা, $\frac{5}{2x-5}+\frac{1}{2x+5}=\frac{10}{4x+5}+\frac{2}{4x+5}$

বা, $\frac{5}{2x-5}-\frac{10}{4x+5}=\frac{2}{4x+5}-\frac{1}{2x+5}$

বা, $\frac{20x+25-20x+50}{(2x-5)(4x+5)}=\frac{4x+10-4x-5}{(4x+5)(2x+5)}$

বা, $\frac{75}{(2x-5)(4x+5)}=\frac{5}{(4x+5)(2x+5)}$

বা, $\frac{15}{2x-5}=\frac{1}{2x+5}$ [উভয় পক্ষকে $\frac{4x+5}{5}$ দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $30x+75=2x-5$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $30x-2x=-75-5$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $28x=-80$

বা, $x=\frac{-80}{28}=\frac{-20}{7}=-2\frac{6}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=-2\frac{6}{7}$

[এস্থলে হরসমূহে x-এর সহগ যথাক্রমে 2, 2 ও 4 ; আবার $(\frac{5}{2}\times 4)=1$ $(\frac{1}{2}\times 4)=2$, $(10+2)=12$; অতএব সমীকরণটির দক্ষিণ পক্ষের লব 12-ক ভাঙ্গিয়া (10+2) করা হইয়াছে ।]

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a+c}+\frac{1}{x+b-c}$

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{x+a+c}+\frac{1}{x+b-c}$$

বা, $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+a+c}=\frac{1}{x+b-c}-\frac{1}{x+b}$

বা, $\frac{x+a+c-x-a}{(x+a)(x+a+c)}=\frac{x+b-x-b+c}{(x+b-c)(x+b)}$

বা, $\frac{c}{(x+a)(x+a+c)}=\frac{c}{(x+b-c)(x+b)}$

বা, $\frac{1}{(x+a)(x+a+c)}=\frac{1}{(x+b-c)(x+b)}$

[উভয় পক্ষকে c দ্বারা ভাগ করিয়া

বা, $(x+b-c)(x+b)=(x+a)(x+a+c)$ [বজ্রগুণন করিয়া

বা, $x^2+bx-cx+bx+b^2-bc=x^2+ax+cx+ax+a^2+ac$

বা, $x^2-x^2+2bx-2cx-2ax=a^2-b^2+bc+ac$ [পক্ষান্তর করিয়া

বা, $2x(b-c-a)=(a^2-b^2)+c(a+b)$

বা, $2x(b-c-a)=(a+b)(a-b+c)$

বা, $2x=-(a+b)$ [উভয় পক্ষকে $(a-b+c)$ দ্বারা ভাগ করিয়া

বা, $x=-\frac{1}{2}(a+b)$ $\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=-\frac{1}{2}(a+b)$

[সুবিধাজনকভাবে পক্ষান্তর করিয়া সমীকরণটি সমাধান করা হইয়াছে। এস্থলে এমনভাবে পক্ষান্তর করা হইয়াছে, যেন উভয়পক্ষের লবে অজ্ঞাত রাশি না থাকে।]

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$

[C. U. 1938, 1946]

$$\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=3$$

বা, $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{c+a}+\frac{x-c}{a+b}=1+1+1$

বা, $\left(\frac{x-a}{b+c}-1\right)+\left(\frac{x-b}{c+a}-1\right)+\left(\frac{x-c}{a+b}-1\right)=0$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{x-a-b-c}{b+c}+\frac{x-b-c-a}{c+a}+\frac{x-c-a-b}{a+b}=0$

বা, $(x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=0$

দুইটি সংখ্যার গুণফল 0 হইলে একটি সংখ্যা অবশ্যই 0 হইবে; কিন্তু $\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)$ ধ্রুবক বলিয়া 0 হইতে পারে না।

$\therefore$ $x-a-b-c=0$

বা, $x=a+b+c$ $\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=a+b+c$

[এস্থলে দক্ষিণপক্ষের সংখ্যাটিকে তিনটি অংশে বিভক্ত করিয়া এক-একটি অংশ বামপক্ষের এক-একটি রাশির সহিত লইয়া সরল করা হইয়াছে।]

প্রশ্নমালা 22

সমাধান কর :

1. $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x}=\frac{5}{x-4}$

2. $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{8}{x+3}$ [W. B. S. B. 1956]

3. $\frac{3}{x+1}+\frac{4}{x+2}=\frac{7}{x+3}$

4. $\frac{2}{2x-5}+\frac{1}{x-3}=\frac{6}{3x-1}$

5. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x+3}=\frac{6}{3x+5}$

6. $\frac{8}{2x-1}+\frac{9}{3x-1}=\frac{7}{x+1}$

7. $\frac{4}{2x+1}+\frac{1}{2x-11}=\frac{3}{2x+5}$

8. $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a+b}{x-a-b}$

9. $\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}=\frac{a-b}{x^2+2ab}$ 10. $\frac{3x+2}{x-1}+\frac{2(x-2)}{x+2}=5$

11. $\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+5}=\frac{9}{x+4}$ [C. U. 1950 (Spl.)]

12. $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$ [W. B. S. B. 1958]

13. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}$

14. $\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-9}$ [P. U. 1949]

15. $\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-11}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-13}$ [W. B S. B. 1954]

16. $\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}+\frac{x-a-b}{c}=3$ [G. U. 1954]

17. $\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a}+\frac{x-ab}{a+b}=a+b+c$ [W. B. S. B. 1953]

18. $\frac{x}{2x-a}+\frac{x}{2x-b}=1$ 19. $\frac{p}{x+p}+\frac{q}{x+q}=\frac{p+q}{x+r}$

20. $\frac{m}{m+nx}+\frac{n}{n+mx}=\frac{m^2+n^2}{mnx}$ 21. $\frac{x}{x+a-b}+\frac{x}{x+b-c}=2$

22. $\frac{ax+a^2}{b+c}+\frac{bx+b^2}{c+a}+\frac{cx+c^2}{a+b}+a+b+c=0$ [C. U. 1942]

23. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}+\frac{x-3a-3b}{a+b}=0$

24. $\frac{x-a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{x-b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{x-c^3}{a^2-ab+b^2}=(a+b+c)$

25. $\frac{x+a^2+2c^2}{b+c}+\frac{x+b^2+2a^2}{c+a}+\frac{x+c^2+2b^2}{a+b}=0$

*26. $\frac{x-a+b}{x-a}+\frac{x-b}{x-2b}=\frac{x}{x-b}+\frac{x-a}{x-a-b}$

*27. $\frac{b(x+a)}{x^2-b^2}+\frac{2x+3b-a}{x+b}=\frac{2(x^2+bx-b^2)}{x^2-b^2}$

*28. $\left(\frac{x}{a}-3\right)\left(\frac{3x}{a}-1\right)-\frac{1}{a^2}(x-2a)(2x-a)=\left(\frac{x}{a}-1\right)^2-1$

নবম অধ্যায়

সরল সহসমীকরণ

(Simultaneous Equations of the First Degree)

এ পর্যন্ত তোমরা যে সকল সমীকরণ সমাধান করিতে শিখিয়াছ তাহাতে একটি-মাত্র অজ্ঞাত রাশি বিদ্যমান। কোন কোন সমীকরণে একাধিক অজ্ঞাত রাশি বিদ্যমান থাকে। ইহাকে **অনির্ণেয় সমীকরণ** (Indeterminate equations) বলে যেমন, $3x-2y=1$; ইহা x এবং y-এর একাধিক মান দ্বারা সিদ্ধ হইতে পারে। যথা, $x=1, y=1$; $x=3, y=4$; $x=5, y=7$ ইত্যাদি

সেইজন্য এমন আর একটি সর্তের প্রয়োজন যাহার মধ্যে নির্ণেয় অজ্ঞাত রাশিমালার বিশিষ্ট মানগুলি সাধারণ থাকে। কেবল তাহা হইলেই সমীকরণগুলির অজ্ঞাত রাশিমালার মান নির্ণয় সম্ভবপর হয়। সুতরাং সমীকরণে যে কয়টি অজ্ঞাত রাশি বিদ্যমান থাকিবে, সমীকরণ সমাধান করিতে হইলে অন্ততঃ ততগুলি সমতাজ্ঞাপক সর্তের প্রয়োজন।

এই প্রকার একাধিক অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণগুলিকে **সহসমীকরণ** (Simultaneous equations) বলা হয়। সমীকরণের অজ্ঞাত রাশিমালার প্রত্যেকটি এক-ঘাতবিশিষ্ট হইলে এবং সমীকরণে তাহাদের দুই বা তদধিক গুণফল-বিশিষ্ট কোন পদ না থাকিলে, সমীকরণটিকে **সরল সহসমীকরণ** (Simultaneous equations of the first degree) বলা হয়। নিম্নে সরল সহসমীকরণ সমাধানের কতিপয় প্রণালী দেখানো হইল।

(1) প্রথম প্রণালী : পরিবর্ত (Substitution)

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির যে কোন একটি হইতে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে-কোন একটির মান অপরটির দ্বারা প্রকাশ করিয়া রাশিটির পরিবর্তে উক্ত লব্ধমান অন্য সমীকরণটিতে স্থাপন করিয়া অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের মান নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $x+3y=9, 4x+y=14$

$x+3y=9 \cdots$(i), $4x+y=14 \cdots$(ii)

(i) হইতে, $x=9-3y \cdots$(iii)

x-এর উক্ত মান (ii)-এ স্থাপন করিলে,

$4(9-3y)+y=14$ বা, $-12y+y=14-36$

বা, $-11y=-22 \quad \therefore \quad y=\frac{-22}{-11}=2$

$\therefore$ (iii) হইতে, $x=9-3.2=3 \quad \therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=3$ এবং $y=2$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=13, \quad \frac{7}{x}+\frac{3}{y}=27$

$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=13 \quad \cdots$(i) ; $\frac{7}{x}+\frac{3}{y}=27$ (ii)

$\frac{1}{x}=m$ এবং $\frac{1}{y}=n$ ধরিলে সমীকরণ দুইটি যথাক্রমে

$3m+2n=13 \quad \cdots$(iii) এবং $7m+3n=27 \quad \cdots$(iv)

এখন (iii) হইতে, $3m=13-2n \quad \therefore \quad m=\frac{13-2n}{3} \quad \cdots$(v)

(iv)-এ m-এর উক্ত মান স্থাপন করিলে,

$7.\frac{13-2n}{3}+3n=27$

বা, $91-14n+9n=81$ [3 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিয়া]

বা, $-5n=-10 \quad \therefore \quad n=\frac{-10}{-5}=2$

$\therefore$ (v) হইতে, $m=\frac{13-2.2}{3}=3$

এখন, $\frac{1}{x}=m=3$; $\therefore \quad x=\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{y}=n=2$; $\therefore \quad y=\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=\frac{1}{3}$ এবং $y=\frac{1}{2}$

প্রশ্নমালা 23

সমাধান কর :

1. $\left.\begin{array}{r} y=4x \\ x+y=5 \end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{r} x+y=0 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{r} 3x-y=5 \\ 4x+3y=11 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{r} 2x-y=5 \\ 3x+2y=11 \end{array}\right\}$ 5. $\left.\begin{array}{r} x+3y=9 \\ 4x+y=14 \end{array}\right\}$ 6. $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ 4x-5y+6=0 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{r} \frac{1}{3}(x+y)=\frac{1}{4}(y-1) \\ \frac{1}{7}(4x-5y)=x-7 \end{array}\right\}$ [W. B. S. B. 1959]

8. $x+y=3(x-y)=6$

9. $x+2y=3=4x-y$

10. $\left.\begin{array}{r}3x+5y=69\\ x-2y=1\end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{r}2(x-y)=3\\ 5x+8y=14\end{array}\right\}$ [D. B. 1940]

12. $\left.\begin{array}{r}x+5y=36\\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{5}{3}\end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{r}2x-\dfrac{3}{y}=3\\ 8x+\dfrac{15}{y}+6=0\end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{2}{x}+3y=15\\ \dfrac{5}{x}-3=4y\end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{r}a^2x+aby=a^2b^2\\ abx-b^2y=a^3b\end{array}\right\}$

16. $a(x+y)=b(x-y)=2ab$

17. $\left.\begin{array}{r}2y-x=4xy\\ 4x-3y=9xy\end{array}\right\}$

---

(2) দ্বিতীয় প্রণালী : অপনয়ন (Elimination)

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে এমন দুইটি সংখ্যা দ্বারা গুণ করিতে হয় যেন, যে-কোন অজ্ঞাত রাশির সহগ উভয় সমীকরণে সমান হয়। তাহার পর যথাবিহিত যোগ বা বিয়োগ করিয়া উক্ত রাশিটিকে অপনয়ন করিলে, অপর অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সমীকরণটি পাওয়া যাইবে। এই সমীকরণটির সমাধানের সাহায্যে অপর অজ্ঞাত রাশিও নির্ণীত হইবে।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $2x-y=5,\ 3x+2y=11$

$$2x-y=5\cdots\text{(i)}\ ;\ 3x+2y=11\cdots\text{(ii)}$$

এস্থলে সমীকরণ দুইটিকে পৃথক পৃথকভাবে এমন দুইটি রাশি দ্বারা গুণ করিতে হইবে, যাহাতে উভয়েরই কোন একটি অজ্ঞাত রাশির সহগ সমান হয়। দেখা যায় (i)-কে 2 দ্বারা গুণ করিলেই (i) ও (ii) সমীকরণে y-এর সহগ পরস্পর সমান হয়। সুতরাং (i)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া এবং (ii)-কে অপরিবর্তিত রাখিয়া পাওয়া যায়,

$$\begin{aligned} 4x-2y&=10\cdots\text{(iii)}\\ \text{এবং } 3x+2y&=11\cdots\text{(ii)}\\ \hline 7x\quad &=21 \end{aligned}$$ [যোগ করিয়া] $\therefore\ x=\frac{21}{7}=3$

এক্ষণে (ii) হইতে, $2y=11-3.3=2$ $\quad\therefore\quad y=\frac{2}{2}=1$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=3$ এবং $y=1$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\dfrac{1}{5x}+\dfrac{y}{9}=5,\ \dfrac{1}{3x}+\dfrac{y}{2}=14$

$\dfrac{1}{5x}+\dfrac{y}{9}=5\cdots\text{(i)}$; $\dfrac{1}{3x}+\dfrac{y}{2}=14\cdots\text{(ii)}$

(i)-কে $\frac{1}{3}$ এবং (ii)-কে $\frac{1}{5}$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$\frac{1}{15x}+\frac{y}{27}=\frac{5}{3}\cdots\text{(iii)}$$

$$\frac{1}{15x}+\frac{y}{10}=\frac{14}{5}\cdots\text{(iv)}$$

$$\frac{y}{27}-\frac{y}{10}=\frac{5}{3}-\frac{14}{5}$$ [বিয়োগ করিয়া]

বা, $\dfrac{-17y}{270}=\dfrac{-17}{15}$ $\quad$ বা, $-17y\times15=-17\times270$

$$\therefore\quad y=\frac{-17\times270}{-17\times15}=18$$

এক্ষণে, (i) হইতে, $\dfrac{1}{5x}=5-\dfrac{18}{9}=3$ $\quad$ বা, $15x=1$ $\quad\therefore\ x=\frac{1}{15}$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=\frac{1}{15}$ এবং $y=18$

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\dfrac{x+y}{xy}=5,\ \dfrac{x-y}{xy}=9$

$\dfrac{x+y}{xy}=5\cdots\text{(i)}$; $\dfrac{x-y}{xy}=9\cdots\text{(ii)}$

(i) হইতে $\dfrac{x}{xy}+\dfrac{y}{xy}=5$ $\quad$ বা, $\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}=5\cdots\text{(iii)}$

(ii) হইতে $\dfrac{x}{xy}-\dfrac{y}{xy}=9$ $\quad$ বা, $\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=9\cdots\text{(iv)}$

$\dfrac{2}{y}=14$ [যোগ করিয়া]

বা, $14y=2 \quad \therefore \quad y=\frac{1}{7}$

আবার, $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=5 \cdots$(iii) ; $\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=9 \cdots$(iv)

$\frac{2}{x}=-4$ [(iii) হইতে (iv) বিয়োগ করিয়া]

বা, $-4x=2 \quad \therefore \quad x=-\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=-\frac{1}{2}$ এবং $y=\frac{1}{7}$

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-2}=3, \ \frac{2}{x-1}+\frac{3}{y-2}=5$

$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-2}=3 \quad$ (i)

$\frac{2}{x-1}+\frac{3}{y-2}=5 \quad$ (ii)

$\left(\frac{1}{x-1}\right)$-কে a এবং $\left(\frac{1}{y-2}\right)$-কে b ধরিয়া;

(i) হইতে $a+b=3 \quad \cdots$(iii)

(ii) হইতে $2a+3b=5 \quad \cdots$(iv)

(iii)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া এবং (iv)-কে অপরিবর্তিত রাখিয়া,

$2a+2b=6 \quad \cdots$(v)

$2a+3b=5 \quad \cdots$(vi)

$-b=1$ [বিয়োগ করিয়া]

$\therefore \quad b=-1$

(iii)-এ b-এর মান বসাইয়া,

$a=3-b=3+1=4$

একক্ষণে, $\frac{1}{x-1}=a=4$

বা, $4x-4=1$

বা, $4x=5$

$\therefore \quad x=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}$

আবার, $\frac{1}{y-2}=b=-1$

বা, $-y+2=1$

$\therefore \quad y=2-1=1$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=1\frac{1}{4}$ এবং $y=1$

প্রশ্নমালা 24

সমাধান কর :

1. $\left.\begin{array}{l} 3x+2y=13 \\ 3x-2y=5 \end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l} 2x+3y=4 \\ 3x-2y=-7 \end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{l} 5x-3y=19 \\ 3x-5y=5 \end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l} 7x-3y=31 \\ 9x-5y=41 \end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l} 6x-5y=16 \\ 9x-5y=35 \end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l} 3x-5y=30 \\ 5x-7y=42 \end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l} 33x+26y-7=0 \\ 55x-39y-13=0 \end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l} 12x+34y=8\frac{1}{15} \\ 34x+12y=8\frac{4}{5} \end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l} (x+7)(y-3)+7=(x-1)(y+3)+5 \\ 5x-11y+35=0 \end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{x}+\frac{7}{y}=29 \\ \frac{5}{x}-\frac{6}{y}=2 \end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{3}-\frac{2}{y}=1 \\ \frac{x}{4}+\frac{3}{y}=3 \end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l} \frac{x+y}{xy}=12 \\ \frac{x-y}{xy}=2 \end{array}\right\}$

13. $\frac{2x+2y-3}{5}=\frac{3x-7y+4}{6}=\frac{8y-x+2}{7}$

14. $\left.\begin{array}{l} \frac{b}{x}+\frac{a+c}{y}=m \\ \frac{a-c}{x}+\frac{b}{y}=n \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l} \frac{3}{x+y}-\frac{5}{x-y}=\frac{13}{20} \\ \frac{2}{x+y}-\frac{3}{x-y}=-\frac{11}{20} \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l} \frac{x-a}{c-a}+\frac{y-b}{c-b}=1 \\ \frac{x+a}{c}+\frac{y-a}{a-b}=\frac{a}{c} \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l} \frac{2}{3x+y}+\frac{5}{2x-3y}=1\frac{13}{15} \\ \frac{4}{2x-3y}-\frac{3}{3x+y}=1\frac{1}{30} \end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{l} ax+by=1 \\ bx+ay=\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}-1 \end{array}\right\}$

[E. B. S. B. 1951]

19. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। উহার $\angle A=(2x+13)$ ডিগ্রী, $\angle B=(y-18)$ ডিগ্রী, $\angle C=(y+31)$ ডিগ্রী এবং $\angle D=(3x-29)$ ডিগ্রী। x এবং y-এর মান নির্ণয় কর। [P. U. 1932]

(3) **তৃতীয় প্রণালী : তুলনা** (Comparison)

প্রদত্ত সমীকরণ দুইটির প্রত্যেকটি হইতে অজ্ঞাত রাশিদ্বয়ের যে-কোনটির মান পর রাশিটি দ্বারা প্রকাশ করিয়া, ঐ প্রাপ্ত মান দুইটির তুলনা দ্বারা সমীকরণের াকারে স্থাপনপূর্বক সমীকরণদ্বয় সমাধান করা যায়।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $3x+4y=11,\ 5x-2y=1$

$$3x+4y=11\cdots\text{(i)}\ ;\ 5x-2y=1\cdots\text{(ii)}$$

(i) হইতে, $3x=11-4y$, $\therefore\ x=\dfrac{11-4y}{3}\cdots\text{(iii)}$

(ii) হইতে, $5x=1+2y$, $\therefore\ x=\dfrac{1+2y}{5}\cdots\text{(iv)}$

(iii) ও (iv) হইতে এক্ষণে, $\dfrac{11-4y}{3}=\dfrac{1+2y}{4}$

বা, $55-20y=3+6y$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $-20y-6y=-55+3$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $26y=-52\ \therefore\ y=\frac{52}{26}=2$

(iv)-এ y-এর মান স্থাপন করিয়া,

$x=\dfrac{1+22}{5}=1\ \therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=1$ এবং $y=2$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\dfrac{x+ab}{a}=\dfrac{y+ab}{b},\ ax+by=a^3+b^3$

$$\frac{x+ab}{a}=\frac{y+ab}{b}\cdots\text{(i)}\ ;\ ax+by=a^3+b^3\cdots\text{(ii)}$$

(i) হইতে, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}+a-b$, $\therefore\ x=\dfrac{ay+a^2b-ab^2}{b}\cdots\text{(iii)}$

(ii) হইতে, $ax=a^3+b^3-by$, $\quad x=\dfrac{a^3+b^3-by}{a}$...(iv)

(iii) ও (iv) হইতে এক্ষণে, $\dfrac{ay+a^2b-ab^2}{b}=\dfrac{a^3+b^3-by}{a}$

বা, $a^2y+a^3b-a^2b^2=a^3b+b^4-b^2y$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $a^2y+b^2y=a^2b^2+b^4+a^3b-a^3b$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $y(a^2+b^2)=b^2(a^2+b^2)$ $\therefore$ $y=\dfrac{b^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)}=b^2$

(iv)-এ y-এর মান স্থাপন করিয়া,

$$x=\frac{a^3+b^3-b.b^2}{a}=\frac{a^3}{a}=a^2$$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=a^2$ এবং $y=b^2$

প্রশ্নমালা 25

1. $\left.\begin{array}{l}3x+y=5\\5x-2y=1\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{l}7x-3y=31\\9x-5y=41\end{array}\right\}$ [D. B. 1934]

3. $\left.\begin{array}{l}3x+5y+9=0\\7x-9y=15\end{array}\right\}$

4. $\left.\begin{array}{l}ax+by=c\\a^2x+b^2y=c^2\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{l}3x+20=4y-10\\4(x-1)=3(y-3)\end{array}\right\}$

6. $\left.\begin{array}{l}5x-6y=11\\6x-5y=11\end{array}\right\}$

7. $\left.\begin{array}{l}(a+b)x+(a-b)y=2a\\(a-b)x+(a+b)y=2b\end{array}\right\}$

8. $\left.\begin{array}{l}4x-\frac{3}{5}(2y-3)=6\frac{1}{5}\\3y-\frac{2}{3}(3x-1)=7\end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{l}ax+by=c\\bx+ay=1+c\end{array}\right\}$

10. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2\\ax-by=a^2-b^2\end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+7}{5}+\dfrac{y-2x}{4}=3y-5\\\dfrac{5y-7}{2}+\dfrac{4x-3}{6}=18-5x\end{array}\right\}$

12. $\left.\begin{array}{l}4x+3y=8xy\\6x+5y=13xy\end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{l}\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=m\\\dfrac{b}{x}+\dfrac{a}{y}=n\end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l}\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=2 \\ \frac{5}{x}+\frac{10}{y}=5\frac{5}{6}\end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{5x}+\frac{y}{9}=5 \\ \frac{1}{3x}+\frac{y}{2}=14\end{array}\right\}$

16. $\frac{x+2}{7}+\frac{y-x}{4}=2x-8$

$\frac{2y-3x}{3}+2y=3x+4$

(4) **চতুর্থ প্রণালী : বজ্রগুণন** (Cross Multiplication)

সমীকরণ সমাধানে নিম্নলিখিত উপপাদ্যের সাহায্যও লওয়া যাইতে পারে

যদি $a_1x+b_1y+c_1=0\cdots$(i)

এবং $a_2x+b_2y+c_2=0\cdots$(ii) হয়,

তাহা হইলে, $\frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}$ হইবে।

প্রমাণ :

(i)-কে c_2 এবং (ii)-কে c_1 দ্বারা গুণ করিলে,

$c_2a_1x+b_1c_2y+c_1c_2=0\cdots$(iii)

$c_1a_2x+b_2c_1y+c_1c_2=0\cdots$(iv)

$(c_2a_1+c_1a_2)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=0$ [বিয়োগ করিয়া]

$\therefore\ (c_1a_2-c_2a_1)x=(b_1c\ \ -b_2c_1)y$ [পক্ষান্তর করিয়া]

$\therefore\ \frac{x}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{y}{c_1a_2-c_2a_1}\cdots$(v)

অনুরূপভাবে, (i)-কে a_2 এবং (ii)-কে a_1 দ্বারা গুণ করিয়া এবং প্রথম গুণফল হইতে দ্বিতীয় গুণফল বিয়োগ করিয়া পাওয়া যায়,

$(a_2b_1-a_1b_2)y+(c_1a_2-c_2a_1)=0$

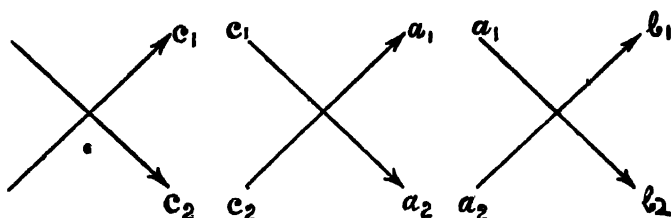
$\therefore\ (a_1b_2-a_2b_1)y=(c_1a_2-c_2a_1)$ [পক্ষান্তর করিয়া]

$$\because \quad c_1a_2-c_2a_1 = a_1b_2-a_2b_1 \qquad \cdots(vi)$$

$\therefore$ (v) এবং (vi) হইতে,

$$\frac{}{b_1c_2-b_2c_1}=\frac{}{c_1a_2-c_2a_1}=\frac{}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad \cdots(vii)$$

ইহাকেই **বজ্রগুণন উপপাদ্য** বলা হয়।

নিম্নলিখিত সঙ্কেত অনুযায়ী এই বজ্রগুণন প্রণালীটি সহজে মনে রাখা যায়। মধ্যপদের সহগকে প্রথমে ও শেষে রাখিয়া অন্যান্য সহগগুলি bc, ca, ab অনুযায়ী নিম্নের চিত্রানুসারে সাজাও।

অতঃপর, তীরচিহ্নানুসারে (b_1c_2, b_2c_1), (c_1a_2, c_2a_1) এবং (a_1b_2, a_2b_1) —এই তিন জোড়া গুণফল লও এবং অধঃক্রম গুণফল b_1c_2, c_1a_2 এবং a_1b_2-এর পূর্বে '+' চিহ্ন এবং ঊর্ধ্বক্রম গুণফল b_2c_1, c_2a_1 এবং a_2b_1-এর পূর্বে '−' চিহ্ন স্থাপন করিয়া $b_1c_2-b_2c_1$, $c_1a_2+c_2a_1$ এবং $a_1b_2-a_2b_1$, তিনটি রাশি তৈয়ারি কর। অতঃপর উহাদিগকে যথাক্রমে x, y এবং 1-এর নিম্নে কষি টানিয়া লিখ।

উদাহরণ 1. সমাধান কর: $x-y-2=0, 2x-3y+2=0$

$$x-y-2=0\cdots\cdots(i),\ 2x-3y+2=0\cdots(ii)$$

বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\frac{x}{(-1).2-(-3).(-2)}=\frac{y}{(-2).2-2.1}=\frac{1}{1.(-3)-2.(-1)}$$

বা, $$\frac{}{-2-6}=\frac{}{-4-2}=\frac{1}{-3+2}$$

বা, $$\frac{x}{-8}=\frac{y}{-6}=\frac{1}{-1}$$

এখন, $\frac{x}{-8}=-1 \quad \therefore \; x=8$ এবং $\frac{y}{-6}=-1 \quad \therefore \; y=6$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=8$ এবং $y=6$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $2x+3y=8,\ 3x+y=5$

$2x+3y=8$ বা, $2x+3y-8=0 \cdots$(i)

$4x+y=5$ বা, $3x+y-5=0 \cdots$(ii)

বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\frac{x}{3(-5)-(-8).1}=\frac{y}{(-8)\,3-2\,(-5)}=\frac{1}{1.2-3.3}$$

বা, $$\frac{x}{-15+8}=\frac{y}{-24+10}=\frac{1}{2-9}$$

বা, $$\frac{x}{-6}=\frac{y}{-14}=\frac{1}{-7}$$

এখন, $\frac{x}{-7}=\frac{1}{-7} \quad \therefore \; x=1$ এবং $\frac{y}{-14}=\frac{1}{-7} \quad \therefore \; y=2$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=1,\ y=2$

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\frac{5}{x}+3y=8,\ \frac{4}{x}-10y=56$ [D. B. 1930]

$\frac{5}{x}+3y=8$ বা, $\frac{5}{x}+3y-8=0 \cdots$(i)

$\frac{4}{x}-10y=56$ বা, $\frac{4}{x}-10y-56=0 \cdots$(ii)

বজ্রগুণন প্রণালী দ্বারা,

$$\frac{\frac{1}{x}}{3.(-56)-(-8).(-10)}=\frac{y}{4.(-8)-(-56).5}=\frac{1}{5.(-10)-3.4}$$

বা, $$\frac{\frac{1}{x}}{-168-80}=\frac{y}{-32+280}=\frac{1}{-50-12}$$

বা, $$\frac{\frac{1}{x}}{-248}=\frac{y}{248}=\frac{1}{-62}$$

এখন, $\frac{\frac{1}{x}}{-248}=\frac{1}{-62}$ বা, $\frac{1}{x}=\frac{-248}{-62}=4 \quad \therefore \; x=\frac{1}{4}$

এবং $\frac{y}{248}=\frac{1}{-62}$ বা, $y=\frac{248}{-62}=-4$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=\frac{1}{4}$, $y=-4$

প্রশ্নমালা 26

1. $\left.\begin{array}{r}3x-4y+5=0\\ 2x+3y=8\end{array}\right\}$

2. $\left.\begin{array}{r}3x=2y+2\\ 5x=3y+5\end{array}\right\}$

3. $\left.\begin{array}{r}13x-9y-19=0\\ 5y-6x+2=0\end{array}\right\}$ [W. B. S. B. 1960]

4. $\left.\begin{array}{r}10x-9y=23\\ 8x-7y=19\end{array}\right\}$

5. $\left.\begin{array}{r}17x-7y=52\\ 3x=2y\end{array}\right\}$ [C. U. 1930]

6. $a(x+y)=b(x-y)=2ab$ [D. B. 1941]

7. $x+y=3(x-y)=6$

8. $\left.\begin{array}{r}4x-5y=2\\ \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=4\end{array}\right\}$

9. $\left.\begin{array}{r}\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=13\\ \frac{7}{x}+\frac{3}{y}=27\end{array}\right\}$ [E. B. S. B. 1950]

10. $\left.\begin{array}{r}\frac{x}{4}+\frac{3}{y}=3\\ \frac{x}{3}-\frac{2}{y}=1\end{array}\right\}$

11. $\left.\begin{array}{r}\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}\\ \frac{2}{x}+\frac{5}{y}=1\end{array}\right\}$ [W. B. S. B. 1956]

12. $\left.\begin{array}{r}\frac{x+y}{4y-6}=\frac{1}{2}\\ \frac{x-y}{5-8x}=\frac{1}{9}\end{array}\right\}$

13. $\left.\begin{array}{r}mx+ny=2\\ m^2x+n^2y=m+n\end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{r}ax+by=a^2+b^2\\ bx+ay=2ab\end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{r}\frac{x-y}{a}+\frac{x+y}{b}=c\\ \frac{x-y}{b}-\frac{x+y}{a}=c\end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{r}\frac{x+2}{7}+\frac{y-x}{4}=2x-8\\ \frac{2y-3x}{3}+2y=3x+4\end{array}\right\}$

দশম অধ্যায়

সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্নাবলী

(Problems on Equations)

সরল সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্নাবলীর সমাধান তোমরা পূর্বে শিখিয়াছ। অনেক সময় অঙ্কের প্রদত্ত সর্তসমূহ হইতে দুইটি সমীকরণ গঠন করিয়া সমাধান করিলে অঙ্কটি সহজসাধ্য হয়। নিম্নের উদাহরণগুলির সাহায্যে প্রক্রিয়াটি বুঝানো যাইতেছে।

A. বয়স নির্ণয় :

উদাহরণ 1. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 7 গুণ ছিল। 2 বৎসর পরে পিতার বয়সের 2 গুণ, পুত্রের বয়সের 5 গুণের সমান হইবে। পিতা ও পুত্রের প্রত্যেকের বর্তমান বয়স কত ?

মনে কর, পিতার বর্তমান বয়স $= x$ বৎসর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স $= y$ বৎসর।

$\therefore$ 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স $=(x-10)$ ব. এবং পুত্রের বয়স $=(y-10)$ ব.

আবার, 2 বৎসর পরে পিতার বয়স $=(x+2)$ ব. এবং পুত্রের বয়স $=(y+2)$ ব.

$\therefore$ সর্তানুসারে, $x-10=7(y-10)\cdots$(i) এবং $2(x+2)=5(y+2)\cdots$(ii)

(i) হইতে, $x-7y=-60\cdots$(iii); (ii) হইতে, $2x-5y=6 \quad \cdots$(iv)

এখন, (iii)-কে 2 দ্বারা গুণ করিয়া এবং (iv)-কে অপরিবর্তিত রাখিয়া পাওয়া যায়,

$$2x-14y=-120$$

এবং $$2x-5y=6$$

$\therefore \quad -9y=-126$ [বিয়োগ করিয়া]; $\therefore \; y=\frac{-126}{-9}=14.$

(iii)-এ y-এর মান বসাইয়া, $x=-60+98=38$

$\therefore$ পিতার বর্তমান বয়স $=38$ বৎসর এবং পুত্রের বর্তমান বয়স $=14$ বৎসর।

B. সংখ্যা নির্ণয় :

উদাহরণ 2. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশকের অঙ্কটি এককের অঙ্কের দ্বিগুণ। অঙ্ক দুইটি স্থান পরিবর্তন করিলে সংখ্যাটির মান 18 কমিয়া যায়। সংখ্যাটি কত ? [W. B. S. B. 1954]

মনে কর, একক স্থানীয় অঙ্কটি x এবং দশক স্থানীয় অঙ্কটি y; সুতরাং x-এর মান $=1.x$ বা x এবং y-এর মান $=10y$ বা $10y$. $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10y+x$.

আবার, সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করিলে উহা দাঁড়ায় $10x+y$.

এখন, সর্তানুসারে, $y=2x$ ··· (i) এবং $10x+y=10y+x-18$···(ii)

(ii)-এ y-এর মান বসাইয়া, $10x+2x=10.2x+x-18$

বা, $12x-21x=-18$

বা, $-9x=-18$ ∴ $x=\frac{-18}{-9}=2$ এবং $y=2.2$ বা 4

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $10y+x=10.4+2=42$

[$(10y+x)$ সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয়ের যোগফল $=x+y$; x ও y দ্বারা গঠিত সংখ্যা xy নহে ; কারণ $xy=x\times y$.]

উদাহরণ 3. কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া লিখিলে উহা সংখ্যাটির $\frac{5}{6}$-এর সমান হয় ; সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 1 হইলে সংখ্যাটি কত ?

মনে কর, একক স্থানীয় অঙ্কটি x এবং দশক স্থানীয় অঙ্কটি y ; সুতরাং x-এর মান $=1.x$ বা x এবং y-এর মান $=10.y$ বা $10y$. ∴ নির্ণেয় সংখ্যাটি $=10y+x$.

আবার, সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় উল্টাইয়া লিখিলে হয় $10x+y$.

যেহেতু অঙ্কটি উল্টাইয়া লিখিলে উহা আগের সংখ্যা অপেক্ষা ছোট হয়, সুতরাং দশকের অঙ্ক y বড় এবং এককের অঙ্ক x ছোট।

এখন, সর্তানুসারে, $y-x=1$ ···(i) এবং $10x+y=\frac{5}{6}(10y+x)$

(i) হইতে, $y=1+x$.

(ii)-এ y-এর মান বসাইয়া, $10x+1+x=\frac{5}{6}\{10(1+x)+x\}$

বা, $11x+1=\frac{5}{6}\{10+10x+x\}$

বা, $66x+6=55x+50$

বা, $11x=44$ ∴ $x=\frac{44}{11}=4$

এবং $y=1+4=5$

∴ নির্ণেয় সংখ্যা, $10y+x=10.5+4=54$

C. ভগ্নাংশ ও অংশবিভাগ :

উদাহরণ 4. কোন ভগ্নাংশের হর, উহার লব অপেক্ষা 4 অধিক। লব ও হর উভয় হইতে 5 বিয়োগ করিলে যে নূতন ভগ্নাংশটি গঠিত হয় তাহার অন্যোন্যক এবং মূল ভগ্নাংশটির চারিগুণের সমষ্টি 5 হইলে ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর। [W. B. C. S. 1958]

মনে কর, নির্ণেয় ভগ্নাংশের লব $=x$; সুতরাং, সর্তানুসারে তাহার হর $=x+4$

এবং ভগ্নাংশটি $=\frac{x}{x+4}$.

ভগ্নাংশটির লব ও হর উভয় হইতে 5 বিয়োগ করিলে যে নূতন ভগ্নাংশটি গঠিত হয়, তাহা হইতেছে $\frac{x-5}{(x+4)-5}=\frac{x-5}{x-1}$ এবং উহার অন্যোন্যক $=\frac{1}{\frac{x-5}{x-1}}=\frac{x-1}{x-5}$.

এখন সর্তানুসারে, $\frac{x-1}{x-5}+4\left(\frac{x}{x+4}\right)=5$

বা, $\frac{x-1}{x-5}+\frac{4x}{x+4}=5$

বা, $\frac{x-1}{x-5}-1+\frac{4x}{x+4}-4=0$

বা, $\frac{4}{x-5}-\frac{16}{x+4}=0$

বা, $\frac{1}{x-5}=\frac{4}{x+4}$ [পক্ষান্তরান্তে দুইপক্ষকে 4 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $4x-20=x+4$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $4x-x=20+4$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $3x=24$ $\therefore$ $x=\frac{24}{3}=8$

নির্ণেয় ভগ্নাংশ $=\frac{x}{x+4}=\frac{8}{8+4}=\frac{8}{12}$

উদাহরণ 5. 20-কে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর যেন উক্ত অংশদ্বয়ের বর্গের অন্তর 160 হয়।

মনে কর, বৃহত্তর অংশটি$=x$, সুতরাং ক্ষুদ্রতর অংশটি$=20-x$.

$\therefore$ সর্তানুসারে, $x^2-(20-x)^2=160$

বা, $x^2-400+40x-x^2=160$

বা, $40x=400+160$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $40x=560$ $\therefore$ $x=\frac{560}{40}=14$ এবং $20-x=20-14=6$

$\therefore$ নির্ণেয় অংশদ্বয়$=14$ এবং 6

D. ক্ষেত্রফল :

উদাহরণ 6. একটি ফল-বাগানের দৈর্ঘ্য, প্রস্থের তিন গুণ। উদ্যানের ক্ষেত্রফল 11163 বর্গমিটার হইলে ঐ বাগানের পরিসীমা কত ?

মনে কর, প্রস্থ $= x$ মিটার ;

$\therefore$ উহার দৈর্ঘ্য $= 3x$ মিটার এবং ক্ষেত্রফল $= 3x \times x$ বা $3x^2$ বর্গমিটার।

এখন, $3x^2 = 11163$ বর্গমিটার। $\therefore$ $x^2 = \frac{11163}{3}$ বা 3721 বর্গমিটার।

$\therefore$ x (বা প্রস্থ) $= \sqrt{3721}$ মিটার $= 61$ মিটার

এবং $3x$ (বা দৈর্ঘ্য) $= 3 \times 61$ মিটার $= 183$ মিটার।

$\therefore$ বাগানের পরিসীমা $= 2(183+61)$ বা 488 মিটার।

E. সময়-কার্য :

উদাহরণ 7. একটি চৌবাচ্চায় দুইটি নল আছে। প্রথম নল দ্বারা 20 মিনিটে ও দ্বিতীয় নল দ্বারা 30 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ হয়। নল দুইটি একসঙ্গে খুলিয়া দিবার কতক্ষণ পরে প্রথম নলটি বন্ধ করিয়া দিলে চৌবাচ্চাটি মোট 18 মিনিটে পূর্ণ হইবে ?

মনে কর, x মিনিট পরে প্রথম নলটি বন্ধ করা হইয়াছিল। সুতরাং দুইটি নল x মিনিট এবং দ্বিতীয় নলটি মাত্র $(18-x)$ মিনিট খোলা ছিল।

প্রথম নল ও দ্বিতীয় নল যথাক্রমে $\frac{1}{20}$ ও $\frac{1}{30}$ চৌবাচ্চা পূর্ণ করে 1 মিনিটে।

$\therefore$ নল দুইটি একত্রে x মিনিটে পূর্ণ করে চৌবাচ্চার $x(\frac{1}{20}+\frac{1}{30})$ বা $\frac{x}{12}$ অংশ।

দ্বিতীয় নলটি $(18-x)$ মিনিটে পূর্ণ করে চৌবাচ্চার $\frac{18-x}{30}$ অংশ।

$$\therefore \quad \frac{x}{12}+\frac{18-x}{30}=1$$

বা, $5x+36-2x=60$

বা, $3x=24$ $\therefore$ $x=\frac{24}{3}=8$ $\therefore$ নির্ণেয় সময় $=8$ মিনিট।

উদাহরণ 8. একটি কাজ A 20 দিনে এবং B 12 দিনে করিতে পারে। A প্রথমে কাজটি কয়েক দিন করার পর B তাহার জায়গায় কাজ করিতে লাগিল এবং কাজটি মোট 14 দিনে শেষ হইল। A কত দিন কাজ করিয়াছিল ?

[W. B. S. B. 1957]

মনে কর, x দিন পরে A কাজ বন্ধ করিল এবং B তাহার জায়গায় কাজ করিতে লাগিল। সুতরাং B, $(14-x)$ দিন কাজ করিয়াছে।

A ও B 1 দিনে যথাক্রমে কাজটির $\frac{1}{20}$ ও $\frac{1}{12}$ অংশ করিতে পারে।

∴ A, x দিনে কাজটির $\frac{x}{20}$ অংশ সম্পন্ন করে এবং B অবশিষ্ট $\frac{(14-x)}{12}$ অংশ সম্পন্ন করে।

∴ $\frac{x}{20}+\frac{14-x}{12}=1$

বা, $\frac{3x+70-5x}{60}=1$ বা, $-2x=60-70$ বা, $x=5$

∴ A, 5 দিন কাজ করিয়াছিল।

F. সময়-দূরত্ব :

উদাহরণ 9. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে দাঁড় টানিয়া 8 ঘণ্টায় 60 কি. মি. গেল এবং স্রোতের প্রতিকূলে 10 ঘণ্টায় ফিরিয়া আসিল। স্রোতের গতিবেগ নির্ণয় কর।

মনে কর, স্রোতের গতিবেগ ঘণ্টায় x কি. মি.। লোকটি স্রোতের অনুকূলে 8 ঘণ্টায় 60 কি. মি. গিয়াছে।

∴ সে স্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় $\frac{60}{8}$ বা $7\frac{1}{2}$ কি. মি. যায়।

∴ স্রোতহীন জলে সে ঘণ্টায় $(7\frac{1}{2}-x)$ কি. মি. যায়।

আবার, সে স্রোতের প্রতিকূলে 10 ঘণ্টায় 60 কি. মি. গিয়াছে।

∴ সে স্রোতের প্রতিকূলে ঘণ্টায় $\frac{60}{10}$ বা 6 কি. মি. যায়।

∴ স্রোতহীন জলে সে ঘণ্টায় $(6+x)$ কি. মি. যায়।

অতএব, $6+x=7\frac{1}{2}-x$ বা, $2x=1\frac{1}{2}$ ∴ $x=\frac{3}{4}$

∴ স্রোতের গতিবেগ ঘণ্টায় $\frac{3}{4}$ কিলোমিটার।

G. শতকরা হিসাব :

উদাহরণ 10. কোন শহরের জনসংখ্যা 20000 ; যদি পুরুষের সংখ্যা 10% বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হয় এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা 6% হ্রাসপ্রাপ্ত হয় তবে জনসংখ্যার কোন পরিবর্তন হয় না। ঐ শহরের পুরুষ ও স্ত্রীলোকের সংখ্যা কত? [C. U. 1937]

মনে কর, পুরুষের সংখ্যা x এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা y.

∴ পুরুষের সংখ্যা-বৃদ্ধি $=x$ এর 10% $=x$ এর $\frac{10}{100}$ বা $\frac{x}{10}$

এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা-হ্রাস $= y$ এর $6\% = y$ এর $\frac{6}{100}$ বা $\frac{3y}{50}$.

সর্তানুসারে, পুরুষের সংখ্যা-বৃদ্ধি = স্ত্রীলোকের সংখ্যা-হ্রাস।

$\therefore \frac{x}{10} = \frac{3y}{50}$ বা, $x = \frac{3y}{5}$.

এখন, প্রথম সর্তানুসারে, $x + y = 20000$

বা, $\frac{3y}{5} + y = 20000$ বা, $8y = 100000$

$\therefore y = \frac{100000}{8} = 12500$ এবং $x = \frac{3y}{5} = \frac{3 \times 12500}{5} = 7500$

$\therefore$ পুরুষের সংখ্যা $= 7500$ এবং স্ত্রীলোকের সংখ্যা $= 12500$

H. সুদ-কষা :

উদাহরণ 11. 4% হারে 800 টাকার কিছু সময়ের সুদ এবং 5% হারে 1000 টাকার পূর্বাপেক্ষা 2 বৎসর বেশী সময়ের সুদ একত্রে 346 টাকা। কত সময়ের জন্য উভয়ক্ষেত্রে সময়ের হিসাব করা হইয়াছিল ?

মনে কর, প্রথম ক্ষেত্রে সময় $= x$ ব.; $\therefore$ দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সময় $= (x+2)$ ব.

4% হারে 800 টাকার x বৎসরের সুদ $= \frac{4 \times 800 \times x}{100}$ বা $32x$ টাকা।

5% হারে 1000 টাকার $(x+2)$ বৎসরের সুদ $= \frac{5 \times 1000 \times (x+2)}{100}$

বা, $50x + 100$ টাকা।

এখন, সর্তানুসারে, $32x + 50x + 100 = 346$

বা, $82x = 246$ $\therefore$ $x = 3$ এবং $x + 2 = 3 + 2 = 5$.

$\therefore$ প্রথম ক্ষেত্রে সময় 3 বৎসর এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে সময় 5 বৎসর।

I. লাভ-ক্ষতি :

উদাহরণ 12. একজন লোক কতকগুলি আনারস ক্রয় করিল, ইহাদের অর্ধেক টাকায় 2টি হিসাবে এবং বাকী অর্ধেক টাকায় 3টি হিসাবে। ঐ আনারসগুলি সে

2 টাকায় 5টি হিসাবে বিক্রয় করিয়া দেখিল যে মোটের উপর তাহার 1 টাকা ক্ষতি হইয়াছে। সে কতগুলি আনারস ক্রয় করিয়াছিল? [W.B.S.B. 1961]

মনে কর, লোকটি মোট x-সংখ্যক আনারস ক্রয় করিয়াছিল।

∴ টাকায় 2টি হিসাবে অর্ধেকের ক্রয়মূল্য $\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}$ টাকা $=\frac{x}{4}$ টাকা

এবং টাকায় 3টি হিসাবে বাকী অর্ধেকের ক্রয়মূল্য $=\frac{x}{2}\times\frac{1}{3}$ টাকা $=\frac{x}{6}$ টাকা।

∴ মোট ক্রয়মূল্য $=\left(\frac{x}{4}+\frac{x}{6}\right)$ বা, $\frac{5}{12}x$ টাকা।

অতএব, সর্তানুসারে, $\frac{5}{12}x-\frac{2}{5}x=1$ বা, $\frac{25x-24x}{60}=1$ বা, $x=60$

∴ লোকটি মোট 60টি আনারস ক্রয় করিয়াছিল।

উদাহরণ 13. এক ব্যক্তি 500 টাকায় একটি ঘোড়া ও একটি গাড়ী ক্রয় করিল। সে ঘোড়াটি 20% লাভে এবং গাড়ীটি 10% ক্ষতিতে বিক্রয় করায় তাহার মোটের উপর 2% লাভ হইল। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত?

লোকটির 500 টাকার উপর 2% লাভ হইল;

∴ বিক্রয়মূল্য $=500\times\frac{102}{100}$ বা 510 টাকা।

মনে কর, ঘোড়ার ক্রয়মূল্য $=x$ টাকা এবং গাড়ীর ক্রয়মূল্য $=y$ টাকা।

∴ 20% লাভে ঘোড়ার বিক্রয়মূল্য $=\frac{120}{100}\times x$ বা $\frac{6}{5}x$ টাকা

এবং 10% ক্ষতিতে গাড়ীর বিক্রয়মূল্য $=\frac{90}{100}\times y$ বা $\frac{9}{10}y$ টাকা।

∴ মোট বিক্রয়মূল্য $=(\frac{6}{5}x+\frac{9}{10}y)$ টাকা।

এখন, সর্তানুসারে, $x+y=500$......(i)

এবং $\frac{6}{5}x+\frac{9}{10}y=510$ বা, $12x+9y=5100$......(ii)

(i)-কে 4 দ্বারা গুণ করিয়া এবং (ii)-কে 3 দ্বারা ভাগ করিয়া পাওয়া যায়,

$$4x+4y=2000$$
$$4x+3y=1700$$

∴ $y=300$ [বিয়োগ করিয়া]

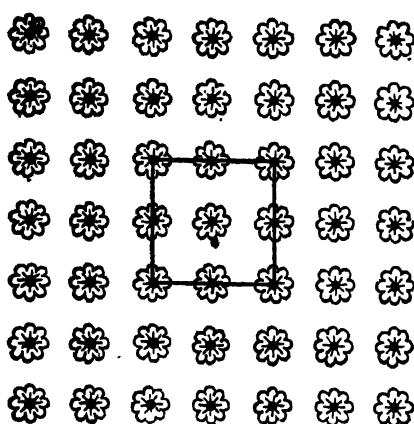
(i)-এ y-এর মান সংস্থাপিত করিয়া, $x=500-y$

বা, $x=500-300=200$

∴ ঘোড়ার নির্ণেয় ক্রয়মূল্য, $x=200$ টাকা।

J.

যদি কতিপয় লোককে কতকগুলি সমান্তরাল সারিতে এরূপভাবে সাজান যায় যে, প্রত্যেক সারির লোকসংখ্যা এবং মোট সারিগুলির সংখ্যা সমান হয়, তাহা হইলে ঐ লোকগুলির দ্বারা একটি **নিরেট: বর্গ** (Solid Square) রচনা করা হইয়াছে বলা হয়।

পার্শ্বস্থ চিত্রটি একটি নিরেট বর্গের চিত্র। উহাতে প্রতি সারিতে 7টি করিয়া ফুল আছে এবং মোট 7 সারি ফুল আছে। সুতরাং ফুলের সংখ্যা $=7^2$.

এখন যদি এই নিরেট বর্গ হইতে রেখাসংযুক্ত ফুলগুলি এবং উহাদের মধ্যের ফুলটি অপসারিত করা হয়, তাহা হইলে উপরে, নীচে এবং উভয় পার্শ্বে দুইটি করিয়া সারি থাকিবে; কিন্তু মধ্যস্থলে কোন ফুল থাকিবে না। (লক্ষ্য করিয়া দেখ, মধ্যের এই ফুল-গুলিও একটি বর্গ সৃষ্টি করিয়াছে।) এইরূপ বর্গকেই **শূন্য-গর্ভ বর্গ** (Hollow Square) বলে। শূন্য-গর্ভ বর্গের প্রতি পার্শ্বে যতগুলি সারি থাকে, শূন্য-গর্ভ বর্গটিও তত গভীরতা-বিশিষ্ট (Deep) বলা হয়। চিত্রে, মধ্যের ফুলগুলি অপসারিত করিলে একটি **2 গভীরতা-বিশিষ্ট শূন্য-গর্ভ বর্গ** (Hollow Square 2 deep) হইবে।

মধ্যের অপসারিত ফুলগুলি দ্বারা গঠিত বর্গটি একটি নিরেট বর্গ। সেখানে সারির সংখ্যা 3; সুতরাং ফুলের সংখ্যা 3^2.

সুতরাং শূন্য-গর্ভ বর্গটির ফুলের সংখ্যা $=7^2-3^2=7^2-(7-4)^2$. আবার, শূন্য-গর্ভ বর্গটি 2 গভীরতা-বিশিষ্ট। সুতরাং দেখা যাইতেছে, $7^2-(7-4)^2$ রাশিমালায় 7 হইতেছে সম্মুখ-সারির ফুলের সংখ্যা এবং 4 হইতেছে গভীরতার দ্বিগুণ (2.2).

সুতরাং শূন্য-গর্ভ বর্গটির ফুলের সংখ্যা $=($ সম্মুখ সারির ফুল-সংখ্যা $)^2-($ সম্মুখ সারির ফুল-সংখ্যা $-$ গভীরতার 2 গুণ ফুল-সংখ্যা $)^2$.

এখন, সম্মুখ-সারির ফুলের সংখ্যা x এবং গভীরতাকে d ধরিলে,

শূন্য-গর্ভ বর্গের ফুলের সংখ্যা $=x^2-(x-2d)^2$.

উদাহরণ 14. জনৈক সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার অধীনস্থ 1296 জন সৈন্যকে একটি 12 গভীরতাবিশিষ্ট শূন্য-গর্ভ বর্গের আকারে সজ্জিত করিলেন। সম্মুখস্থ সারিতে কত সৈন্য ছিল ?

মনে কর, সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা $= x$.

$\therefore$ মোট সৈন্যসংখ্যা $= x^2 - (x-2d)^2$

$$= x^2 - (x - 2.12)^2$$

$$= (x + x - 24)(x - x + 24)$$

$$= 24.(2x - 24) = 48x - 576$$

এখন, সর্তানুসারে, $48x - 576 = 1296$

বা, $48x = 1296 + 576$ $\therefore$ $x = \frac{1872}{48} = 39$

$\therefore$ সম্মুখ সারিতে সৈন্য ছিল 39 জন।

উদাহরণ 15. এক সেনাপতি তাঁহার অধীনস্থ সৈন্যগণ দ্বারা 4 গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্য-গর্ভ বর্গ রচনা করিতে যাইয়া দেখিলেন যে, 50 জন সৈন্য বেশী হইতেছে এবং 5 গভীরতাবিশিষ্ট শূন্য-গর্ভ বর্গ রচনা করিতে যাইয়া দেখিলেন যে, 50 জন সৈন্য কম পড়িতেছে। উভয় ক্ষেত্রে সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা সমান হইলে মোট সৈন্যসংখ্যা কত ?

মনে কর, উভয় ক্ষেত্রে সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা $= x$.

$\therefore$ 4 গভীরতাবিশিষ্ট শূন্য-গর্ভ বর্গে সৈন্যসংখ্যা $= x^2 - (x-2.4)^2$

$\therefore$ অতিরিক্ত 50 জন সৈন্য লইয়া মোট সৈন্যসংখ্যা $= x^2 - (x-8)^2 + 50$

আবার, 5 গভীরতাবিশিষ্ট শূন্য-গর্ভ বর্গে সৈন্যসংখ্যা $= x^2 - (x-2.5)^2$; কিন্তু এই বর্গ গঠন করিতে 50 জন সৈন্য কম পড়ে ;

সুতরাং মোট সৈন্যসংখ্যা $= x^2 - (x-10)^2 - 50$.

এখন, সর্তানুসারে, $x^2 - (x-10)^2 - 50 = x^2 - (x-8)^2 + 50$

বা, $20x - 100 - 50 = 16x - 64 + 50$

বা, $20x - 16x = 100 + 50 - 64 + 50$

বা, $4x = 136$ $\therefore$ $x = \frac{136}{4} = 34$

$$\therefore \text{ সৈন্যসংখ্যা} = x^2 - (x-8)^2 + 50$$
$$= (x+x-8)(x-x+8) + 50$$
$$= (2x-8).8 + 50$$
$$= 16x - 64 + 50 = 16.34 - 14 = 530$$

***K. ঘড়ি ও সময় :**

ঘড়ি ও সময়-সম্বন্ধীয় প্রশ্নের সমাধান করিতে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি মনে রাখিও :—

(i) সাধারণতঃ ঘড়ির ডায়ালটি (Dial) ছোট ছোট 60 ভাগে বিভক্ত থাকে। উহাদের প্রতিটি ঘরকে মিনিট-ঘর বলে।

(ii) প্রতি 5 মিনিট-ঘর অন্তর অন্তর অপেক্ষাকৃত মোটা দাগ দিয়া ডায়ালটিকে (60÷5) বা 12 ভাগে বিভক্ত করা হয়। ইহাদিগকে ঘণ্টার ঘর বলে।

(iii) ঘড়ির মিনিটের কাঁটা (বড় কাঁটা) 1 ঘণ্টায় ডায়ালটি একবার ঘুরিয়া আসে এবং ঘণ্টার কাঁটা (ছোট কাঁটা) 12 ঘণ্টায় উহা 1 বার ঘুরিয়া আসে ; সুতরাং ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা মিনিটের কাঁটা 12 গুণ দ্রুত চলে।

(iv) (*a*) ঘড়ির কাঁটা দুইটির মধ্যে যখন কোন দূরত্ব থাকে না, তখন তাহারা পরস্পর মিলিত হয় ; (*b*) যখন কাঁটা দুইটির মধ্যে দূরত্ব 15 মিনিট-ঘর, তখন তাহারা পরস্পর সমকোণে অবস্থিত থাকে এবং (*c*) যখন কাঁটা দুইটির মধ্যে দূরত্ব 30 মিনিট-ঘর, তখন তাহারা পরস্পর বিপরীত দিকে কিন্তু একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকে।

উদাহরণ 16. 4টা ও 5টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন্ পরস্পর সমকোণে থাকিবে ? [C. U. 1935, 1945]

মনে কর, 4টা বাজিয়া x মিনিটের সময়ে কাঁটা দুইটি পরস্পর সমকোণে থাকিবে।

ঠিক 4টার সময় মিনিটের কাঁটা, ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 20 মিনিট-ঘর পশ্চাতে থাকে। যখন কাঁটা দুইটির মধ্যে 15 মিনিট-ঘর ব্যবধান থাকিবে, তখন তাহারা সমকোণ উৎপন্ন করিবে।

∴ মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা (20 − 15) বা 5 মিনিট-ঘর বেশী গেলেই তাহারা সমকোণ উৎপন্ন করিবে। মিনিটের কাঁটা x মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 5 মিনিট-ঘর বেশী যাইবে।

এখন, x মিনিটে মিনিটের কাঁটা যায় x মিনিট-ঘর

ঘণ্টার " " $\frac{x}{12}$ " "

$\therefore\ x-\frac{x}{12}=5$ বেশী বা, $\frac{11x}{12}=5\quad\therefore\ x=5\times\frac{12}{11}$ বা $5\frac{5}{11}$.

সুতরাং 4 টা $5\frac{5}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুইটি পরস্পর সমকোণে থাকিবে।

পুনরায় মিনিটের কাঁটা যখন ঘণ্টার কাঁটাকে অতিক্রম করিয়া 15 মিনিট-ঘর আগাইয়া যাইবে তখন আবার একবার কাঁটা দুইটি পরস্পর সমকোণ উৎপন্ন করিবে। সুতরাং, মিনিটের কাঁটা যখন ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা মোট (20+15) বা 35 মিনিট-ঘর বেশী যাইবে, তখন আবার তাহারা সমকোণ উৎপন্ন করিবে। মিনিটের কাঁটা x মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 35 মিনিট-ঘর বেশী যাইবে।

এখন, x মিনিটে মিনিটের কাঁটা যায় x মিনিট-ঘর

$\therefore$ " " ঘণ্টার " " $\frac{x}{12}$ " "

$\therefore\ x-\frac{x}{12}=35$ বা, $\frac{11x}{12}=35\quad\therefore\ x=35\times\frac{12}{11}$ বা $38\frac{2}{11}$

সুতরাং 4টা $38\frac{2}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুইটি পুনরায় সমকোণে থাকিবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় = 4টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট এবং 4টা $38\frac{2}{11}$ মিনিট।

উদাহরণ 17. এক ব্যক্তি বেলা 3টা ও 4টার মধ্যে বাহিরে গিয়া বেলা 4টা ও 5টার মধ্যে গৃহে প্রত্যাবর্তন করিয়া দেখিল যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিয়াছে। ঐ ব্যক্তি কখন্ বাহিরে গিয়াছিল ? সে কখন্ ফিরিয়া আসিয়াছিল ?

[C. U. 1942 ; G. U. 1949]

মনে কর, ঐ ব্যক্তি 3টা x মিনিটে বাহিরে গিয়া 4টা y মিনিটে প্রত্যাবর্তন করিয়াছিল।

এখন মিনিটের কাঁটা x ও y মিনিটে যথাক্রমে x মিনিট-ঘর ও y মিনিট-ঘর যায় এবং ঐ সময়ে ঘণ্টার কাঁটা যথাক্রমে $\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর ও $\frac{y}{12}$ মিনিট-ঘর যায়।

অতএব, ঐ ব্যক্তি বাহির হইবার সময় ঘণ্টার কাঁটা 12টার ঘর হইতে $(15+\frac{x}{12})$ মিনিট-ঘর দূরে ছিল। ঐ ব্যক্তি 4টা y মিনিটে ফিরিয়া আসিয়া মিনিটের কাঁটাকে সেই ঘরে দেখিল। $\therefore\ y=15+\frac{x}{12}\cdots\cdots$(i)

আবার, ঐ ব্যক্তি যখন প্রত্যাবর্তন করিল, তখন ঘণ্টার কাঁটা 12টার ঘর হইতে $(20+\frac{y}{12})$ মিনিট-ঘর দূরে ছিল। ঐ ব্যক্তি যখন 3টা x মিনিটে বাহিরে যায়, তখন মিনিটের কাঁটা সেই ঘরে ছিল। $\therefore \quad x=20+\frac{y}{12}$……(ii)

এখন, (i) এবং (ii) সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া পাওয়া যায়,

$x=21\frac{57}{143}$ এবং $y=16\frac{112}{143}$.

$\therefore$ ঐ ব্যক্তি 3টা $21\frac{57}{143}$ মিনিটে বাহির হইয়া 4টা $16\frac{112}{143}$ মিনিটে প্রত্যাবর্তন করিয়াছিল।

উদাহরণ 18. বেলা 12টার সময় একটি ঘড়ি 12 মিনিট ফাস্ট ছিল। উহা প্রতি ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ মিনিট স্লো যায়। ঐ দিন 3টা হইতে 4টার মধ্যে ঐ ঘড়ির কাঁটা দুইটি যখন সমকোণে অবস্থান করে, তখন প্রকৃত সময় কত?

[C. U. 1936]

মনে কর, ঐ ঘড়িতে 3টা x মিনিটে কাঁটা দুইটি সমকোণে অবস্থান করিবে এখন মিনিটের কাঁটা যে সময়ে x মিনিট-ঘর যায়, ঘণ্টার কাঁটা সেই সময়ে $\frac{x}{12}$ মিনিট-ঘর যায়।

আবার, বেলা 3টার সময় মিনিটের কাঁটা, ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা 15 মিনিট-ঘর পশ্চাতে থাকে; সুতরাং সমকোণ উৎপন্ন করিতে হইলে উহাকে ঘণ্টার কাঁটা অপেক্ষা (15+15) বা 30 মিনিট-ঘর বেশী যাইতে হইবে।

$$\therefore \quad x-\frac{x}{12}=30, \text{ বা, } \frac{11x}{12}=30 \quad \therefore \quad x=\frac{30\times12}{11}=32\frac{8}{11}.$$

সুতরাং ঐ ঘড়ির 3টা $32\frac{8}{11}$ মিনিটে কাঁটা দুইটি সমকোণ উৎপন্ন করে।

পুনরায়, 12টা 12 মিনিট হইতে 3টা $32\frac{8}{11}$ মিনিট পর্যন্ত সময় = (3টা $32\frac{8}{11}$ মি. − 12টা 12 মি.) বা $\frac{2208}{11}$ মিনিট। এখন, মনে কর, প্রকৃত সময় 12টা y মিনিট।

এখন, ঘড়িটি প্রতি ঘণ্টায় স্লো যায় $2\frac{1}{2}$ মিনিট।

সুতরাং, প্রকৃত সময়ের 60 মিনিট = ঐ ঘড়ির ($60-2\frac{1}{2}$) বা $57\frac{1}{2}$ মিনিট।

$\therefore$ প্রকৃত সময়ের y মিনিট = ঐ ঘড়ির $\frac{57\frac{1}{2}}{60}y$ বা $\frac{23}{24}y$ মিনিট।

অতএব, $\frac{23}{24}y=\frac{2208}{11}$ বেশী $\quad \therefore \quad y=\frac{2208\times24}{11\times23}$

এখন, $\frac{2208}{11}\times\frac{24}{23}$ মিনিট $=$ 3 ঘণ্টা $29\frac{5}{11}$ মিনিট।

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $=$ 12 টা $+$ 3 ঘ. $29\frac{5}{11}$ মি. অর্থাৎ বেলা 3টা $29\frac{5}{11}$ মিনিট।

L. বিবিধ বিষয়ক :

উদাহরণ 19. একদল পর্যটকের প্রত্যেককে একখানি করিয়া ঘর দিলে হোটেলে 6 খানি ঘর কম পড়ে। প্রতি দুই জনকে একখানি করিয়া ঘর দিলে 6 খানি ঘর বেশী থাকে। প্রতি তিন জনকে একখানি করিয়া ঘর দিলে কতগুলি ঘর বেশী থাকিবে ?

মনে কর, পর্যটকের সংখ্যা $= x$.

যেহেতু প্রত্যেককে একখানি করিয়া ঘর দিলে 6 খানি ঘর কম পড়ে, সেইজন্য ঘরের সংখ্যা $= x - 6$.

প্রতি দুইজনকে একখানি করিয়া ঘর দিলে, ঘরের প্রয়োজন $\frac{x}{2}$ খানা।

যেহেতু তখন 6 খানা ঘর বেশী থাকে, সেইজন্য ঘরের সংখ্যা $= \frac{x}{2} + 6$

অতএব, $x - 6 = \frac{x}{2} + 6$ বা, $2x - 12 = x + 12$ $\therefore$ $x = 24$

$\therefore$ পর্যটকের সংখ্যা $= 24$ এবং ঘরের সংখ্যা $= x - 6 = 24 - 6$ বা 18.

এখন, প্রতি তিনজনকে একখানি করিয়া ঘর দিলে ঘরের প্রয়োজন হয় $\frac{18}{3}$ বা 6 খানি। $\therefore$ অতিরিক্ত ঘরের সংখ্যা $= 18 - 6 = 12$

উদাহরণ 20. এক নির্বাচনদ্বন্দ্বে A এবং B দুই ভোটপ্রার্থী। ভোটদাতাদের $\frac{2}{5}$ A-কে ভোট দেওয়ায় সে B অপেক্ষা 200 ভোট বেশী পায়। ভোটদাতাদের $\frac{1}{3}$ যদি নির্বাচনে অংশ গ্রহণ না করে, তবে ভোটদাতাদের সংখ্যা কত ?

মনে কর, ভোটদাতাদের সংখ্যা $= x$.

$\frac{1}{3}$ ভোটদাতা $= \frac{x}{3}$ জন ভোটদানে বিরত থাকে।

$\therefore$ ভোট দেয় মোট $\left(x - \frac{x}{3}\right)$ বা $\frac{2x}{3}$ জন।

$\frac{2}{5}$ ভোটদাতা A-কে ভোট দিয়াছে। $\therefore$ A পাইয়াছে $\frac{2x}{5}$ ভোট।

$\therefore$ B পাইয়াছে $\left(\frac{2x}{3} - \frac{2x}{5}\right)$ বা $\frac{4x}{15}$ ভোট।

এখন, সর্তানুসারে, $\frac{2x}{5}-\frac{4x}{15}=200$

বা, $6x-4x=3000$ বা, $2x=3000$ $\therefore$ $x=\frac{3000}{2}=1500$

$\therefore$ ভোটদাতাদের মোট সংখ্যা $=1500$

উদাহরণ 21. 6টি ঘোড়া এবং 7টি গরুর ক্রয়মূল্য 2500 টাকা; 13টি গরু এবং 11টি ঘোড়ার ক্রয়মূল্য 4610 টাকা। প্রতি প্রকারের জন্তুর ক্রয়মূল্য কত?

মনে কর, প্রতিটি ঘোড়ার ক্রয়মূল্য $=x$ টাকা।

$\therefore$ 6টি ঘোড়া ও 11টি ঘোড়ার ক্রয়মূল্য যথাক্রমে $6x$ ও $11x$ টাকা।

আবার, মনে কর, প্রতিটি গরুর ক্রয়মূল্য $=y$ টাকা।

$\therefore$ 7টি গরু ও 13টি গরুর ক্রয়মূল্য যথাক্রমে $7y$ ও $13y$ টাকা।

এখন, সর্তানুসারে, $6x+7y=2500 \cdots\cdots$(i)

এবং $11x+13y=4610 \cdots\cdots$(ii)

(i)-কে 11 ও (ii)-কে 6 দ্বারা গুণ করিয়া পাওয়া যায়,

$$66x+77y=27500$$
$$66x+78y=27660$$

$\therefore$ $-y=-160$ [বিয়োগ করিয়া] $\therefore$ $y=160$

আবার, $6x+7y=2500$

বা, $6x=2500-7.160=1380$ $\therefore$ $x=\frac{1380}{6}$ বা 230

$\therefore$ প্রতিটি ঘোড়ার ক্রয়মূল্য 230 টাকা এবং প্রতিটি গরুর ক্রয়মূল্য 160 টাকা।

উদাহরণ 22. একজন লোককে 30 দিনের জন্য এই সর্তে নিযুক্ত করা হইল যে, কাজ করিলে প্রত্যেক দিনের মজুরী বাবদ সে টা. 2·50 পাইবে, কিন্তু কামাই করিলে প্রত্যেক দিনে তাহাকে 62 ন. প. জরিমানা দিতে হইবে। যদি লোকটি মোট টা. 43·80 পায়, তবে সে কতদিন কামাই করিয়াছিল?

মনে কর, লোকটি x দিন কাজে অনুপস্থিত ছিল। সুতরাং, সে $(30-x)$ দিন কাজ করিয়াছিল। কাজ না করিলে মাহিনা বাবদ টা. 2·50 এবং জরিমানা বাবদ 62 ন. প. হিসাবে প্রত্যেক দিন কাটা যাইবে। 30 দিন কাজ করিলে লোকটি পাইত টা. $2{\cdot}50\times30$ বা 75 টাকা। x দিন কামাইয়ের জন্য টা. $(2{\cdot}50+{\cdot}62)\times x$ বা $\frac{78}{25}x$ টাকা বাদ যাইবে।

$\therefore$ মোট আয় $=(75-\frac{78}{25}x)$ টাকা।

∴ প্রশ্নানুসারে, $75-\frac{78}{25}x=43.80$

বা, $-\frac{78}{25}x=\frac{4380}{100}-75$

বা, $-\frac{78}{25}x=-\frac{312}{10}$ বা, $x=\frac{312}{10}\times\frac{25}{78}=10$

∴ লোকটি 10 দিন কামাই করিয়াছিল।

প্রশ্নমালা 27

1. 10 বৎসর পরে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের দ্বিগুণ হইবে; কিন্তু 8 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 8 গুণ ছিল। তাহাদের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

2. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের তিন গুণ ছিল। পিতার বর্তমান বয়স যদি পুত্রের বর্তমান বয়সের দ্বিগুণ হয় তবে 10 বৎসর পরে পুত্রের বয়স কত হইবে?

3. এক ব্যক্তির বয়স তাহার দুইটি সন্তানের বয়সের তিন গুণ। 5 বৎসর পরে তাহার বয়স সন্তান দুইটির বয়সের দ্বিগুণ হইবে। ঐ ব্যক্তির বর্তমান বয়স নির্ণয় কর। [P. U. 1946]

4. কোন পিতার বয়স তাহার বড় ছেলের বয়সের 4 গুণ এবং ছোট ছেলের বয়সের 5 গুণ। বড় ছেলের বয়স যখন তাহার বর্তমান বয়সের 3 গুণের সমান হইবে তখন পিতার বয়স ছোট ছেলের বয়সের দ্বিগুণ অপেক্ষা 4 বৎসর বেশী হইবে। তাহাদের বর্তমান বয়স কত? [W. B. S. B. 1953]

5. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি 9; সংখ্যাটির সহিত 9 যোগ করিলে সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

6. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার দশকের অঙ্কটি এককের অঙ্কের দ্বিগুণ। সংখ্যাটি হইতে 27 বিয়োগ করিলে সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [Utkal U. 1950]

7. কোন সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর 2; সংখ্যাটি হইতে উহার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির $\frac{3}{2}$ গুণ বিয়োগ করিলে সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

8.* তিন অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কসমষ্টি 10; সংখ্যাটির মধ্যের অঙ্ক পার্শ্বস্থ অঙ্ক দুইটির সমষ্টির সমান। সংখ্যাটির পার্শ্বস্থ অঙ্কদ্বয় পরস্পর স্থান বিনিময় করিলে অঙ্কটির মান 99 বৃদ্ধি পায়। সংখ্যাটি নির্ণয় কর। [C. U. 1923]

9. একটি ভগ্নাংশের লব হইতে 1 বিয়োগ এবং হরের সহিত 2 যোগ করিলে উহার মান হয় $\frac{1}{2}$; কিন্তু ভগ্নাংশটির লব এবং হর হইতে যথাক্রমে 7 ও 2 বিয়োগ করিলে উহার মান হয় $\frac{1}{3}$. ভগ্নাংশটি কত? [C. U. 1950 (Spl.)]

10. কোন্ ভগ্নাংশের হর হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$-এর সমান হয় এবং উহার লবের সহিত 4 যোগ করিলে উহার মান 1 হয়? [Pat. U. 1950]

11. একটি আয়তাকার প্রাঙ্গণের পরিসীমা 20 মিটার। প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য 1 মিটার বাড়াইলে এবং প্রস্থ 1 মিটার কমাইলে উহার ক্ষেত্রফল $2\frac{1}{4}$ বর্গমিটার হ্রাসপ্রাপ্ত হয়। প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

12. $6\frac{2}{3}$ মিটার দীর্ঘ এবং $5\frac{1}{3}$ মিটার বিস্তৃত একটি ঘর আছে। ঐ ঘরের চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ। ঘরটির উচ্চতা কত?

13. একটি লোক এবং একটি বালক 12 দিনে একটি কার্য সম্পন্ন করিতে পারে; 7 জন লোক এবং 4 জন বালক সেই কার্য 2 দিনে সম্পন্ন করিতে পারে। লোকটি এবং বালকটি পৃথক পৃথক ভাবে ঐ কার্য কত দিনে করিবে?

[Pat. U. 1929]

14. A একটি কার্য 30 দিনে এবং B সেই কার্য 20 দিনে করিতে পারে। A কার্যটি আরম্ভ করিয়া কয়েকদিন পর চলিয়া গেল এবং B আসিয়া বাকি কার্য সমাধা করিল। কার্যটি মোট 22 দিনে সম্পন্ন হইলে কে কতদিন কার্য করিয়াছিল?

15. কোন চৌবাচ্চার জল নিষ্ক্রমণের নলটি বন্ধ থাকিলে অপর তুইটি নল যথাক্রমে 8 ও 6 মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করিতে পারে। জল নিষ্ক্রমণের নলটি খোলা থাকিলে তিনটি নল $7\frac{1}{2}$ মিনিটে চৌবাচ্চাটি পূর্ণ করিতে পারে। জল নিষ্ক্রমণের নলটি কতক্ষণে জলপূর্ণ চৌবাচ্চা জলশূন্য করিতে পারিবে? [C. U. 1951]

16. কোন ট্রেনের গতিবেগ প্রতি ঘণ্টায় 42 কি. মি. হইলে ট্রেনটি যথাসময়ে নির্দিষ্ট স্থানে পৌছিতে পারে। ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় 40 কি. মি হইলে উহা 15 মিনিট বিলম্বে নির্দিষ্ট স্থানে পৌছায়। ট্রেনটির ভ্রমণপথ কত?

17. এক অশ্বারোহী সমবেগে $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় কোন স্থানে গেল। ঐ স্থানটির দূরত্ব যদি 1 কি. মি. কম হইত এবং অশ্বারোহীর গতিবেগ যদি ঘণ্টায় 2 কি. মি. বেশী হইত, তবে উক্ত স্থানে পৌছিতে তাহার অর্ধ ঘণ্টা সময় কম লাগিত। অশ্বারোহী কত বেগে অশ্বচালনা করিয়াছিল? [D. B. 1930]

*18. P এবং Q নামক স্থান দুইটির দূরত্ব 21 কি. মি. 500 মি.। A সকাল 9টায় P হইতে এবং B সকাল 9-30 মিনিটে Q হইতে রওনা হইয়া বেলা 12-8 মিনিটে পথিমধ্যে মিলিত হইল। B-এর গতিবেগ যদি A-র গতিবেগ অপেক্ষা ঘণ্টায় 500 মিটার বেশী হয় তবে কে কত পথ গেল ?

19. এক ব্যক্তি স্থির জলে ঘণ্টায় 5 কি. মি. বেগে নৌকা চালাইতে পারে। ঐ ব্যক্তির স্রোতের অনুকূলে 40 কি. মি. নৌকা চালাইতে যত সময় লাগে, স্রোতের প্রতিকূলে নৌকা চালাইতে তাহার তিন গুণ সময় লাগে। স্রোতের বেগ কত ?

20. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে 6 ঘণ্টায় 30 কি. মি. নৌকায় যাইয়া আবার 10 ঘণ্টায় প্রত্যাবর্তন করিল। নৌকার বেগ এবং স্রোতের বেগ নির্ণয় কর।

21. এক ব্যবসায়ীর কিছু আম ছিল। উহার 2% পচিয়া গেল। সে অবশিষ্টের 95% বিক্রয় করায় তাহার আর 49টি আম রহিল। ব্যবসায়ীর নিকট পূর্বে কতগুলি আম ছিল ?

22. কোন পরীক্ষায় পরীক্ষার্থীদের 80% ইংরাজীতে, 85% অঙ্কে এবং 75% উভয় বিষয়ে পাশ করিল। যদি উভয় বিষয়ে 45 জন পরীক্ষার্থী ফেল করে, তবে মোট পরীক্ষার্থীর সংখ্যা কত ? [C. U. 1938]

23. A 8% হার সুদে B-কে 500 টাকা এবং C-কে কিছু টাকা ধার দিল। সে 4 বৎসর পরে উভয়ের নিকট হইতে 210 টাকা সুদ বাবদ পাইল। C-কে কত টাকা ধার দেওয়া হইয়াছিল ? [D. B. 1927]

24. কত টাকার 5% হার সুদে 9 মাসের সুদ, 4% হার সুদে 15 মাসের সুদ অপেক্ষা 125 টাকা কম ? [Pat. U. 1920]

25. টাকায় 4টি হিসাবে কতগুলি আম ক্রয় করা হইল। টাকায় 3টি হিসাবেও ঠিক ততগুলি আম ক্রয় করা হইল। সমস্ত আম 2 টাকায় 7টি হিসাবে বিক্রয় করিলে শতকরা কত লাভ বা ক্ষতি হইবে ?

26. জনৈক ব্যক্তি 4000 টাকায় বাড়ী বিক্রয় করিয়া কিছু ক্ষতিগ্রস্ত হইল। সে 5000 টাকায় বাড়ী বিক্রয় করিলে তাহার পূর্বক্ষতির $\frac{1}{2}$ লাভ হয়। বাড়ীটির ক্রয়মূল্য কত ? [C. U. 1949]

27. এক ব্যক্তি 800 টাকায় ঘোড়া এবং গাড়ী বিক্রয় করিলে তাহার ঘোড়াটিতে 10% এবং গাড়ীটিতে 20% লাভ হয়। সে ঘোড়াটি 15% এবং গাড়ীটি

25% লাভে বিক্রয় করিলে পূর্বাপেক্ষা 35 টাকা বেশী পাইত। ঘোড়া ও গাড়ীর প্রত্যেকটির ক্রয়মূল্য কত ? [I. P. S. 1940]

*28. কোন সেনাপতি তাঁহার অধীনস্থ সৈন্যদিগের দ্বারা 5 গভীরতাবিশিষ্ট একটি অথবা 6 গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্য-গর্ভ বর্গ গঠন করিতে পারেন ; কিন্তু প্রথম ব্যবস্থা অপেক্ষা দ্বিতীয় ব্যবস্থায় সম্মুখ সারির সৈন্যসংখ্যা 4 কম। সেনাপতির অধীনে কত সৈন্য আছে ?

*29. এক সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার অধীনস্থ সৈন্যদিগের দ্বারা 3 গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্য-গর্ভ বর্গ রচনা করিতে পারেন। তাঁহার অধীনে আরও 800 সৈন্য থাকিলে তিনি তাহাদের দ্বারা 4 গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্য-গর্ভ বর্গ রচনা করিতে পারিতেন এবং সম্মুখ সারিতেও সৈন্যসংখ্যার পরিবর্তন করিতে হইত না। বাহিনীতে সৈন্যসংখ্যা কত ? [C. U. 1942]

*30. একদল বালকের দ্বারা 10 গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্য-গর্ভ বর্গ রচনা করা যায়। ঐ দলে আরও 1600 বালক থাকিলে তাহাদের দ্বারা 10 গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্য-গর্ভ বর্গ রচনা করা যাইত ; কিন্তু শেষোক্ত ক্ষেত্রে সম্মুখ সারির বালকের সংখ্যা প্রথমোক্ত ক্ষেত্রের সম্মুখ সারির বালকের সংখ্যার দ্বিগুণ হইত। দলে কত জন বালক ছিল ?

31. 10টা ও 11টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন্ পরস্পর সমকোণে থাকে ?

32. 2টা ও 3টার মধ্যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি কখন্ (i) পরস্পর মিলিত হয় এবং (ii) পরস্পর বিপরীত দিকে থাকে ?

33. বেলা 3টা হইতে 4টার মধ্যে কখন্ ঘড়ির কাঁটা দুইটির অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ এক সমকোণের $\frac{1}{3}$ হইবে ?

34. এক ব্যক্তি অপরাহ্ণ 5টা ও 6টার মধ্যে বাহিরে গিয়া সন্ধ্যা 6টা ও 7টার মধ্যে গৃহে প্রত্যাবর্তন করিয়া দেখিল যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান বিনিময় করিয়াছে। ঐ ব্যক্তি কখন্ বাহিরে গিয়াছিল ? [C. U. 1944 ; G. U. 1955]

35. এক ব্যক্তি অপরাহ্ণ 3টা ও 4টার মধ্যে বাহিরে গিয়া রাত্রি 8টা ও 9টার মধ্যে প্রত্যাবর্তন করিয়া দেখিল যে ঘড়ির কাঁটা দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিয়াছে। ঐ ব্যক্তি কখন্ বাহিরে গিয়াছিল ?

36. বেলা 3টার পর বাহিরে যাইয়া A অর্ধ ঘণ্টা পরে ফিরিয়া আসিয়া দেখিল, যাইবার সময় মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার যতদূর পশ্চাতে ছিল, আসিবার

পর উহা ঘণ্টার কাঁটার ঠিক ততদূর অগ্রবর্তী হইয়াছে। A কখন্ বাহিরে গিয়াছিল ? [W. B. C. S. 1955]

37. একটি ঘড়ি সোমবার বেলা 12টায় ঠিক করিয়া দেওয়া হইল। পরদিন বেলা 12টায় দেখা গেল উহাতে 12টা 5 মিনিট হইয়াছে। বৃহস্পতিবার অপরাহ্নে ঐ ঘড়িতে 5টা বাজিয়া 4 মিনিট হইলে প্রকৃত সময় কত ?

38. দুইটি সংখ্যার গুণফল 1215 ; বৃহত্তর সংখ্যাটিকে ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি দ্বারা করিলে ভাগফল হয় 15 ; সংখ্যা দুইটি কত ?

39. A-র টাকা B-এর টাকার 3 গুণ, কিন্তু C-এর টাকা অপেক্ষা 25 টাকা বেশী। তাহাদের 3 জনের 675 টাকা থাকিলে A-র কত টাকা আছে ?

40. 250-কে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন, প্রথম ভাগের 3 গুণ ও দ্বিতীয় ভাগের 5 গুণের সমষ্টি 950 হয়। [C. U. 1941]

41. 20-কে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন তাহাদের বর্গের অন্তর 160 হয়।

42. দৈনিক যদি 8 লিটার জল চুয়াইয়া নষ্ট হয় তবে সঞ্চিত জলে কোন অবরুদ্ধ বাহিনীর ৪0 দিন কাজ চলে ; আর যদি দৈনিক 10 লিটার জল চুঁয়াইয়া নষ্ট হয় তবে ঐ জলে 75 দিন কাজ চলে। সঞ্চিত জলের পরিমাণ কত ?

43. 9টি চেয়ার এবং 5টি টেবিলের মূল্য 90 টাকা ; 5টি চেয়ার এবং 4টি টেবিলের মূল্য 61 টাকা। 6টি চেয়ার এবং 3টি টেবিলের মূল্য কত ? [P. U. 1930]

*44. কতকগুলি লোকের মধ্যে কিছু পরিমাণ অর্থ সমানভাবে ভাগ করিয়া দেওয়া হইল। সেখানে আরও 6 জন বেশী থাকিলে প্রত্যেকে 1 টাকা করিয়া কম পাইত এবং 4 জন কম থাকিলে প্রত্যেকে 1 টাকা করিয়া বেশী পাইত। লোকসংখ্যা এবং অর্থের পরিমাণ নির্ণয় কর।

45. এক ব্যক্তি ও তাহার স্ত্রীর বয়সের সমষ্টি সন্তানদের বয়সের সমষ্টির 6 গুণ। 2 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের সমষ্টি সন্তানদের বয়সের সমষ্টির 10 গুণ ছিল এবং 6 বৎসর পরে উহা 3 গুণ হইবে। তাহাদের কতগুলি সন্তান আছে ?

*46. একটি বিতর্ক সভায় কোন প্রস্তাব গ্রহণ করিতে বিজয়ী দলের ভোট বিজিত দলের ভোটসংখ্যার $\frac{1}{3}$ বেশী হইল। মোট ভোটসংখ্যা সমান থাকিলে এবং বিজিত দলের পক্ষে 10 ভোট বেশী হইলে, প্রস্তাবটি মাত্র 1 ভোটের সংখ্যাধিক্যে গৃহীত হইত। প্রত্যেক পক্ষের ভোটসংখ্যা নির্ণয় কর।

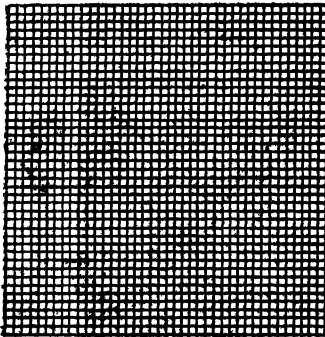
*47. একদল ভ্রমণকারী হোটেলে যাইয়া দেখিল যে, প্রত্যেকে পৃথক ঘর লইতে চাহিলে a-সংখ্যক ঘর কম পড়ে; আবার দুইজন করিয়া এক ঘর ব্যবহার করিলে b-সংখ্যক ঘর খালি পড়িয়া থাকে। তিনজন করিয়া এক ঘর ব্যবহার করিলে কয়টি ঘর খালি পড়িয়া থাকিবে ?

*48. A হইতে B-এর দূরত্বের $\frac{1}{3}$ অংশ কোন ব্যক্তি ঘণ্টায় a কিলোমিটার হিসাবে এবং অবশিষ্টাংশ ঘণ্টায় $2b$ কিলোমিটার হিসাবে ভ্রমণ করিল। লোকটি ঘণ্টায় $3c$ কিলোমিটার হিসাবে ভ্রমণ করিলে A হইতে B-তে পৌছিয়া আবার A-তে প্রত্যাবর্তন করিতে একই সময় লাগিত প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$.

একাদশ অধ্যায়

সরল সমীকরণের লেখ
(Graphs of Simple Equations)

বর্গাঙ্কিত কাগজ (Squared Paper) :

বীজগণিতের সাহায্যে বিবিধ জ্যামিতিক প্রশ্নের, আবার জ্যামিতিক লেখচিত্রের সাহায্যে বিবিধ বীজগণিতীয় প্রশ্নের সমাধান করা যায়। প্রাত্যহিক জীবনের আদমসুমারী (Census) এবং অনুরূপ তথ্য ও রাশিবিজ্ঞান (Statistics)-ঘটিত নানাবিধ সমস্যা লেখচিত্রের সাহায্যে চক্ষুর সম্মুখে সুস্পষ্টভাবে প্রকাশ করা যায়। লেখচিত্রের সাহায্যে গণিতসংক্রান্ত বিবিধ প্রশ্ন-সমাধানের প্রণালীকে **লৈখিক প্রণালী** (Graphical method) বলে।

যে কাগজে এই সকল লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়, তাহাকে বর্গাঙ্কিত কাগজ বা ছক কাগজ বলে। এতদসহ বর্গাঙ্কিত কাগজের নমুনা দেওয়া হইল।

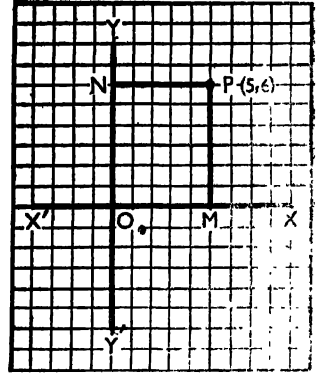
এই কাগজে দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের সমান্তরাল দুই প্রকারের সমদূরবর্তী সরলরেখা অঙ্কিত আছে। রেখাগুলি পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে।

রেখাগুলি সমকোণে ও সমদূরবর্তীভাবে ছেদ করায় প্রতি ক্ষেত্রেই একটি ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের সৃষ্টি হইয়াছে।

সাধারণতঃ একটি ছোট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য ·1 সে. মি.; কিন্তু কোন কোন বর্গাঙ্কিত কাগজে এই বাহুর দৈর্ঘ্য ·1 ইঞ্চি।

অক্ষদ্বয় (Axes of Reference) এবং **স্থানাঙ্ক** (Co-ordinates) :

মনে কর, O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং ইহা হইতে কিঞ্চিৎ দূরে অবস্থিত P অপর একটি বিন্দু ; P বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে।

P বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে XOX′ এবং YOY′ দুইটি লম্বভাবে পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা অঙ্কন কর এবং P হইতে ইহাদের উপর দুইটি লম্ব অঙ্কন করিলে তাহারা যে দুই বিন্দুতে উক্ত রেখাদ্বয়কে ছেদ করে, O হইতে তাহাদের দূরত্ব দ্বারাই P বিন্দুর অবস্থান নির্ণীত হয়।

এক্ষেত্রে কাগজখানির উপর XOX′ এবং YOY′ দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে O বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করিয়াছে। এই O বিন্দুকে **মূলবিন্দু** (Origin) এবং XOX′ ও YOY′ রেখাদ্বয়কে **অক্ষদ্বয়** (Axes) বলে। XOX′-কে X-অক্ষ (Axis of X) এবং YOY′-কে Y-অক্ষ (Axis of Y) বলে।

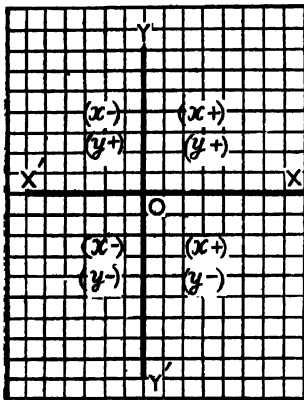
ভুজ-কোটি (Abscissa and Ordinate) :

ছক কাগজে অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P-এর অবস্থান জানিতে হইলে X-অক্ষ ও Y-অক্ষ হইতে উক্ত বিন্দুর দূরত্ব জানা আবশ্যক।

P হইতে X-অক্ষের উপর PM ও Y-অক্ষের উপর PN লম্ব অঙ্কন করা হইল। PM ও PN কয়টি ক্ষুদ্রবর্গের বাহু দ্বারা গঠিত তাহা চিত্র হইতে জানা যাইবে। ক্ষুদ্রবর্গের বাহুকেই সাধারণতঃ **একক** (Unit) ধরিয়া গণনা করা হয়।

মনে কর, PM = y একক এবং PN = x একক। এই x একককে (PN) P বিন্দুর **ভুজ** (Abscissa) ও y একককে (PM) P বিন্দুর **কোটি** (Ordinate) বলা হয়। কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটিকে একসঙ্গে **স্থানাঙ্ক** বলা হয়। চিত্রে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (5, 6).

চিহ্ন সম্পর্কিত নিয়ম (Convention of Signs) :

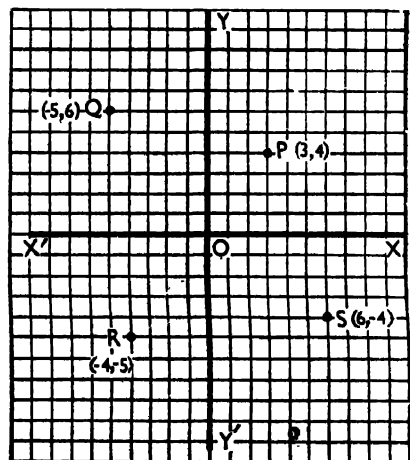
মূলবিন্দুর ডানদিকে x সর্বদা '+' চিহ্নবিশিষ্ট এবং বামে সর্বদা '−' চিহ্নবিশিষ্ট। মূল বিন্দুর উপরে y সর্বদা '+' চিহ্নবিশিষ্ট এবং নীচে সর্বদা '−' চিহ্নবিশিষ্ট। স্থানাঙ্ক লিখিবার সময় x-কে আগে ও y-কে পরে লিখিতে হয়।

বিন্দু সংস্থাপন (Plotting of Points) :

কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইলে সর্বাগ্রে ছক কাগজে পরস্পর লম্বভাবে দুইটি রেখা অঙ্কন করা আবশ্যক। ইহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিবে। এই O-ই মূলবিন্দু এবং রেখাদ্বয়ই অক্ষদ্বয়। এখন বিন্দুটির স্থানাঙ্ক অনুযায়ী O বিন্দু হইতে ঘর গণনা করিয়া (ক্ষুদ্রবর্গের বাহুকে একক ধরিয়া) বিন্দুটি অঙ্কন করিতে হয়।

নিম্নলিখিত উদাহরণের সাহায্যে বিষয়টি পরিস্ফুট হইবে।

উদাহরণ 1. (3, 4), (−5, 6), (−4, −5) এবং (6, −4) বিন্দুগুলি ছক কাগজে সংস্থাপিত কর।

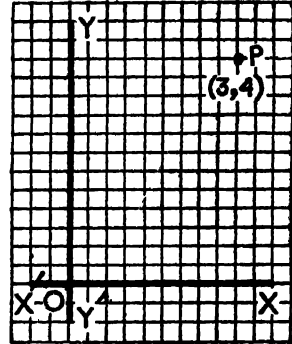
সকল ক্ষেত্রেই XOX' ও YOY'-কে দুইটি অক্ষ এবং উহাদের ছেদবিন্দু O-কে মূলবিন্দু ধরা হইল। সকল ক্ষেত্রেই ক্ষুদ্রবর্গের একটি বাহুকে একক ধরা হইল।

প্রথম বিন্দুটির ভুজ 3 এবং কোটি 4 ; সুতরাং O বিন্দু হইতে ডান দিকে 3 ঘর গণনা করিয়া উপরের দিকে 4 ঘর গণিয়া যাইতে হইবে। গণনা যেখানে শেষ হইল সেখানে একটি বিন্দু বসাইলেই এই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (3, 4) হইবে। মনে কর, বিন্দুটি P.

দ্বিতীয় বিন্দুটি স্থাপন করিতে হইলে O বিন্দু হইতে বামদিকে 5 ঘর গণনা করিয়া উপরের দিকে 6 ঘর গণিয়া যাইতে হইবে। গণনা যেখানে শেষ হইবে সেখানে একটি বিন্দু বসাইলেই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (−5, 6) হইবে। মনে কর, বিন্দুটি Q.

তৃতীয় বিন্দুটি স্থাপন করিতে হইলে O বিন্দু হইতে বামদিকে 4 ঘর গণনা করিয়া নীচের দিকে 5 ঘর গণনা করিতে হইবে। গণনা যেখানে শেষ হইবে সেখানে একটি বিন্দু বসাইলেই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (−4, −5) হইবে। মনে কর, বিন্দুটি R.

চতুর্থ বিন্দুটি স্থাপন করিতে হইলে O বিন্দু হইতে ডানদিকে 6 ঘর গণনা করিয়া নীচের দিকে 4 ঘর গণনা করিতে হইবে। গণনা যেখানে শেষ হইবে সেখানে একটি বিন্দু বসাইলেই বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (6, −4) হইবে। মনে কর, বিন্দুটি S.

উদাহরণ 2. ক্ষুদ্র বর্গের বাহুর 3 গুণ একক ধরিয়া (3, 4) বিন্দুটি অঙ্কন কর।

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O-কে মূলবিন্দু এবং ক্ষুদ্র বর্গের বাহুর 3 গুণকে, অর্থাৎ 3-টি ক্ষুদ্র-বর্গের বাহুকে একক ধরিয়া ছক কাগজখানির উপর পূর্ব পদ্ধতিতে P বিন্দুটি অঙ্কিত করা হইল। এই P বিন্দুর স্থানাঙ্কই (3, 4).

[এক্ষেত্রে $x=3\times3=9$. উহা 9-টি ক্ষুদ্রবর্গের বাহু এবং দক্ষিণে। $y=4\times3=12$. উহা 12-টি ক্ষুদ্রবর্গের বাহু এবং উপরের দিকে।]

উদাহরণ 3. (6, −4), (3, 0), (0, 4) এবং (−3, 8) বিন্দুগুলি অঙ্কিত করিয়া দেখাও যে তাহারা একই সরলরেখায় অবস্থিত।

XOX′ এবং YOY′-কে দুইটি অক্ষ এবং উহাদের ছেদবিন্দু O-কে মূলবিন্দু মনে কর। ক্ষুদ্রবর্গের একটি বাহুকে একক ধরিয়া প্রদত্ত বিন্দুগুলি অঙ্কিত কর। এখন একখানি মাপনীর সাহায্যে (6, −4) ও (−3, 8) বিন্দুদ্বয় সংযুক্ত কর। প্রত্যক্ষ কর যে, অঙ্কিত সরলরেখাটি (3, 0), (0, 4) বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়াও গিয়াছে।

প্রশ্নমালা 28

বর্গাঙ্কিত কাগজে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি স্থাপন কর :

1. (6, 8) 2. (7, 10) 3. (−5, 3) 4. (8, −6) 5. (−5, 7)
6. (5, −9) 7. (−8, −4) 8. (−6, −10) 9. (−12, −8)

দেখাও যে বিন্দুগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত :

10. (4, 6), (−2, −3), (0, 0) 11. (5, 7), (−1, −2), (−3, −5)
12. (4, −1), (2, 1), (−1, 4), (−3, 6).

চলরাশি, ধ্রুবক ও অপেক্ষক (Variable, Constant and Function) :

বীজগণিতের বর্ণমালার শেষাংশের x, y, z প্রভৃতি অক্ষর দ্বারা অনির্দিষ্ট রাশি সূচিত হয়। এইরূপ রাশিকে বলা হয় **চলরাশি** বা **চল** (Variable Quantity বা Variable) এবং 1, 2, 3 প্রভৃতি বা a, b, c ; l, m, n ; p, q, r প্রভৃতি নির্দিষ্ট রাশি বা সংখ্যা প্রকাশ করে ; এইরূপ রাশিকে বলা হয় **ধ্রুবক রাশি** বা **ধ্রুবক** (Constant Quantity বা Constant). যে সকল বীজগণিতীয় রাশিমালা কোন একটি চল রাশির মান ও শক্তির উপর নির্ভর করে, তাহাদিগকে উক্ত চল রাশির **অপেক্ষক** (Function) বলা হয়। চলরাশিটি x হইলে উক্ত অপেক্ষক সাধারণতঃ $f(x)$ দ্বারা প্রকাশিত হয়।

x-এর মানের উপর $f(x)$-এর মানও নির্ভর করে।

x-এর বিভিন্ন মানগুলিকে উহাদের ভুজ এবং অনুরূপ $f(x)$-এর মানগুলিকে কোটি ধরিয়া ছক কাগজে অসংখ্য জ্যামিতিক বিন্দু অঙ্কন করা যায়। এইরূপে প্রাপ্ত বিন্দুগুলি একটি রেখাদ্বারা যুক্ত করা যায়। এই রেখাটিই অপেক্ষকটির লেখচিত্র। এই রেখা সরল এবং বক্র উভয়ই হইতে পারে।

যদি $f(x)=ax^2+bx+c$ হয়, তবে x-এর মানগুলি লেখটির ভুজ এবং $f(x)$-এর মান উহার কোটি হইবে। কিন্তু বীজগণিতে কোটিকে সাধারণতঃ y দ্বারা সূচিত করা হয়, সুতরাং $f(x)=y$. সকল ক্ষেত্রেই x-এর মানের উপর y-এর মান নির্ভর করে। এইজন্য x-কে **স্বাধীন চল** (Independent Variable) এবং y-কে উহার **অধীন চল** (Dependent Variable) বলা হয়।

x-এর শক্তি যদি একাধিক না হয়, তবে সকল ক্ষেত্রেই $f(x)$ একটি সরলরেখা।

$y=ax+b$, ইহার লেখচিত্র একটি সরলরেখা; আবার $y=ax+b$, একটি এক-শক্তিযুক্ত সমীকরণও। সুতরাং, একটি এক-শক্তিযুক্ত সমীকরণকে সরলরেখা দ্বারা সূচিত করা যায় এবং উহা x ও y-এর সম্বন্ধজ্ঞাপক।

দ্রষ্টব্য : লক্ষ্য কর, অপেক্ষক একটি রাশিমালা মাত্র।

সঞ্চারপথ (Locus) :

কোন সরল বিন্দু এক বা একাধিক সর্ত অনুসারে যে পথ অতিক্রম করে, তাহাকে ঐ বিন্দুর **সঞ্চারপথ** (Locus) বলে এবং যে সমীকরণ ঐ পথের যে-কোন বিন্দুর ভুজ এবং কোটির পারস্পরিক সম্বন্ধ প্রকাশ করে, তাহাকে উক্ত পথের **সমীকরণ** (Equation) বলে।

প্রথম মানের এক-বর্ণ সমীকরণের লেখচিত্র (Equation of the first degree in one unknown) :

উদাহরণ 1. $x=0$ এবং $y=0$ সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের একটি বাহুকে একক ধর।

যেহেতু Y-অক্ষের উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ, অর্থাৎ x-এর স্থানাঙ্ক 0, সুতরাং $x=0$ সমীকরণের লেখচিত্র Y-অক্ষরেখাটিই।

আবার, যেহেতু X-অক্ষের উপর অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি, অর্থাৎ y-এর স্থানাঙ্ক 0, সুতরাং $y=0$ সমীকরণের লেখচিত্র X-অক্ষরেখাটিই।

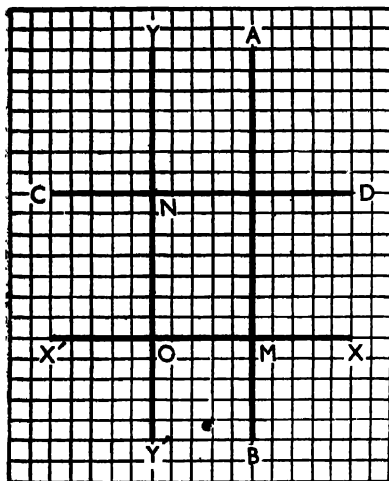
উদাহরণ 2. (a) $x=5$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর। [C. U. 1948]

(b) $y=7$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর। [C. U. 1944]

(a) [এস্থলে এমন একটি সচল বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে যাহার ভুজ সর্বদা 5 এককের সমান।]

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের একটি বাহুকে একক ধর।

X-অক্ষরেখায় O বিন্দু হইতে ডানদিকে 5 ঘর গণিয়া M বিন্দুটি স্থাপন কর। M-এর মধ্য দিয়া Y-অক্ষের সমান্তরাল AMB রেখাটি টান। AMB সরলরেখায়

অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ অর্থাৎ x-এর স্থানাঙ্ক 5 এককের সমান। সুতরাং AMB সরলরেখাটি $x=5$ সমীকরণের লেখচিত্র।

(b) [এস্থলে এমন একটি সচল বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় করিতে হইবে যাহার কোটি সর্বদা 7 এককের সমান।]

মনে কর, XOX' এবং YOY' অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের একটি বাহুকে একক ধর।

Y-অক্ষরেখায় O বিন্দু হইতে উপরে 7 ঘর গণিয়া N বিন্দুটি স্থাপন কর। N-এর মধ্য দিয়া X-অক্ষের সমান্তরাল CND রেখাটি টান। CND সরলরেখায় অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি, অর্থাৎ y-এর স্থানাঙ্ক 7 এককের সমান। সুতরাং CND সরলরেখাটি $y=7$ সমীকরণের লেখচিত্র।

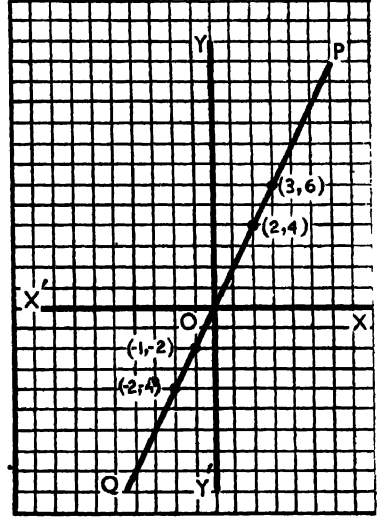
[উল্লিখিত উদাহরণ দুইটি হইতে দেখা যাইতেছে, $x=a$ সমীকরণের লেখচিত্র সর্বদা Y-অক্ষের সমান্তরাল এবং $y=b$ সমীকরণের লেখচিত্র সর্বদা X-অক্ষের সমান্তরাল।]

প্রথম মানের দ্বিবর্ণ সমীকরণের লেখচিত্র (Equation of the first degree in two unknowns) :

উদাহরণ 1. $y=2x$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

নিম্নের ছকে সমীকরণের মানগুলি সাজানো হইয়াছে :—

যখন $x=$	0	2	3	-1	-2
তখন $y=$	0	4	6	-2	-4

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের একটি বাহুকে একক ধরিয়া (0, 0), (2, 4), (3, 6), (−1, −2), (−2, −4) প্রভৃতি বিন্দুগুলি বর্গাঙ্কিত কাগজে স্থাপন কর এবং একটি মাপনীর সাহায্যে দেখ যে, উপরিউক্ত বিন্দুগুলির যে-কোন দুইটির সংযোজক সরলরেখা অপর বিন্দুগুলি দিয়াও যায়। মনে কর, সরলরেখাটি PQ. চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (6, 12). অনুরূপভাবে দেখানো যাইতে পারে যে, উক্ত রেখার উপরিস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। কিন্তু ঐ রেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর ভুজ-কোটির দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। বিপরীতভাবে, x ও y-এর যে সকল মান $y=2x$ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে,—ঐ সকল যুগপৎ মান জ্যামিতিক বিন্দুর দ্বারা সূচিত করিলে, উহারা সর্বদাই PQ সরলরেখায় অবস্থিত হইবে।

∴ PQ সরলরেখাটিই $y=2x$ সমীকরণটির লেখচিত্র।

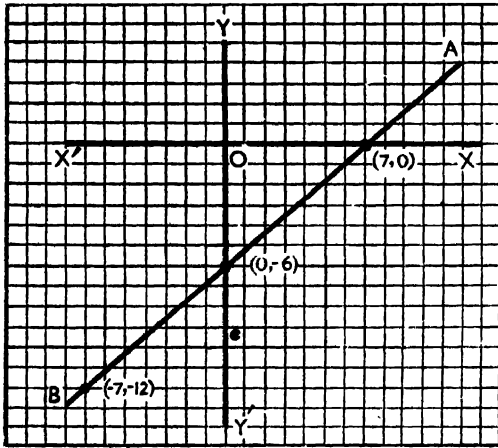
উদাহরণ 2. $6x-7y=42$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

$6x-7y=42$ বা, $7y=42-6x$

বা, $7y=6x-42$ $\quad y=\dfrac{6x-42}{7}$.

এইবার নিম্নের ছকে সমীকরণের মানগুলি সাজানো হইল :—

যখন $x=$	0	7	−7
তখন $y=$	−6	0	−12

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের একটি বাহুকে একক ধরিয়া $(0,-6)$, $(7,0)$, $(-7, -12)$ প্রভৃতি বিন্দুগুলি বর্গাঙ্কিত কাগজে স্থাপন কর এবং সরল মাপনীর সাহায্যে উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া একটি সরলরেখা টান। মনে কর, সরলরেখাটি AB. চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (12, 4) এবং ইহার দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অনুরূপভাবে দেখা যাইবে যে, এই সরলরেখার উপরিস্থিত সকল বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে। কিন্তু সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রদত্ত সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে না। সুতরাং

ও y-এর যে সকল মান সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে, ঐ সকল যুগপৎ মান দ্বারা সূচিত সকল বিন্দুই AB রেখার উপর অবস্থিত।

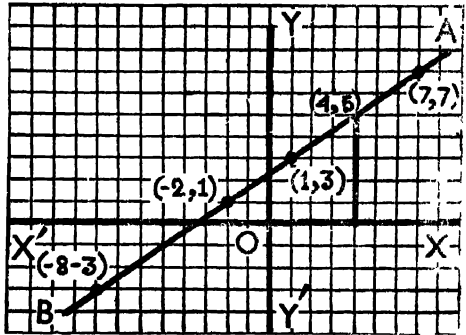
∴ AB সরলরেখাটি $6x-7y=42$ সমীকরণের লেখচিত্র।

উদাহরণ 3. $\frac{2x+7}{3}$-এর লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং $x=4$ হইলে লেখচিত্র হইতে রাশিটির মান নির্ণয় কর এবং রাশিটির মান 0 হইলে লেখচিত্র দেখিয়া x-এর মান নির্ণয় কর। [D. B. 1928]

$\frac{2x+7}{3}$ অপেক্ষকের লেখ এবং $y=\frac{2x+7}{3}$ সমীকরণটির লেখ একই।

এইবার নিম্নের ছকে $y=\frac{2x+7}{3}$ সমীকরণের মানগুলি লিপিবদ্ধ করা হইল :-

যখন $x=$	1	-2	7	-8
তখন $y=$	3	1	7	-3

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্র বর্গের একটি বাহুকে একক ধরিয়া (1, 3), (−2, 1), (7, 7) এবং (−8, −3) বিন্দুগুলি বর্গাঙ্কিত কাগজে স্থাপন কর এবং সরল মাপনীর সাহায্যে উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া একটি অসীম সরলরেখা অঙ্কন কর। মনে কর, সরলরেখাটি AB. এই রেখায় অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

সুতরাং, সরলরেখাটি $\frac{2x+7}{3}$ রাশিমালার লেখচিত্র।

লেখচিত্রটি হইতে দেখা যাইতেছে যে, $x=4$ হইলে y-এর মান $=5$; আরও দেখা যাইতেছে যে, অপেক্ষকের অর্থাৎ y-এর মান 0 হইলে x-এর মান $=-3{\cdot}5$.

উদাহরণ 4. একই অক্ষদ্বয় এবং একই একক লইয়া (i) $4x+9y=36$ এবং (ii) $\frac{x}{9}-\frac{y}{4}=1$-এর লেখচিত্র অঙ্কন কর। (প্রত্যেক লেখচিত্রের জন্য অন্ততঃ তিনটি বিন্দু লইতে হইবে।) প্রমাণ কর যে, অঙ্কিত লেখদ্বয় এবং y-অক্ষ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করিয়াছে। [W. B. S. B. 1956]

সমীকরণ (i) হইতে পাওয়া যায় $y=\frac{36-4x}{9}$

নিম্নের ছকে সমীকরণটির মানগুলি সাজানো হইয়াছে :—

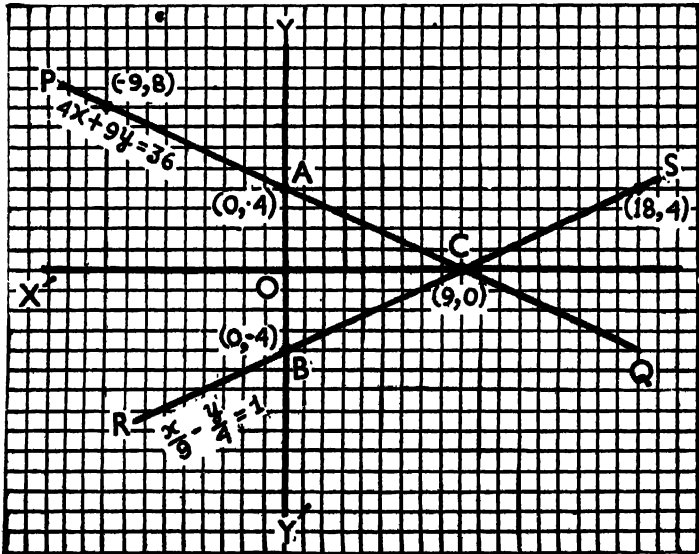
যখন $x=$	0	9	−9
তখন $y=$	4	0	8

আবার, সমীকরণ (ii) হইতে পাওয়া যায় $y=\frac{4x-36}{9}$

নিম্নের ছকে সমীকরণটির মানগুলি সাজানো হইয়াছে :-

যখন $x=$	0	9	18
তখন $y=$	-4	0	4

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের একটি বাহুকে একক ধরিয়া সমীকরণ (i) হইতে প্রাপ্ত (0, 4), (9, 0) এবং (−9, 8) বিন্দুত্রয় বর্গাঙ্কিত কাগজে স্থাপন কর এবং একটি মাপনীর সাহায্যে উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া একটি অসীম সরলরেখা টান। মনে কর, সরলরেখাটি PQ. এই রেখায় অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

∴ PQ সরলরেখাটি $4x+9y=36$ সমীকরণের লেখচিত্র।

অনুরূপভাবে, একই একক ধরিয়া সমীকরণ (ii) হইতে প্রাপ্ত (0, −4), (9, 0) এবং (18, 4) বিন্দুত্রয় বর্গাঙ্কিত কাগজে স্থাপন কর এবং একটি মাপনীর সাহায্যে উহাদিগকে সংযুক্ত করিয়া অপর একটি অসীম সরলরেখা টান। মনে কর, এই

সরলরেখাটি RS. এই সরলরেখায় অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর ভুজ-কোটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

∴ RS সরলরেখাটি $\frac{x}{9}-\frac{y}{4}=1$ সমীকরণের লেখচিত্র।

প্রথম সমীকরণের লেখ PQ এবং দ্বিতীয় সমীকরণের লেখ RS, পরস্পর x-অক্ষের উপর C, (9, 0) বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে A, (0, 4) এবং B, (0, −4) বিন্দুতে ছেদ করায় ABC ত্রিভুজটি উৎপন্ন হইয়াছে।

প্রমাণ : ABC ত্রিভুজে OA = OB = 4 একক।

∴ CO, AB-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক (∵ OX⊥OY)

∴ CA = CB, অর্থাৎ ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

দ্রষ্টব্য : লেখচিত্র অঙ্কনের সময় অন্ততঃপক্ষে x ও y-এর তিনজোড়া মান লইতে হয়, অর্থাৎ অন্যূন তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক লইতে হয়।

বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় (To find out the equation from the given co-ordinates) :

যে-কোন দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে উক্ত বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় করা যায়। এতদসহ উদাহরণের সাহায্যে প্রণালীটি বুঝানো হইল।

উদাহরণ 1. (6, −2) এবং (−4, 4) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণটি $y=mx+c$.

প্রথম বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণে বসাইলে, $-2=6m+c$ ...(i)

দ্বিতীয় বিন্দুর স্থানাঙ্ক সমীকরণে বসাইলে, $4=-4m+c$ ...(ii)

(i) এবং (ii) সমীকরণ সমাধান করিয়া পাওয়া যায়, $m=-\frac{3}{5}$ এবং $c=\frac{8}{5}$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ, $y=mx+c$

বা, $y=-\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ বা, $5y+3x=8$

প্রশ্নমালা 29

1. সমীকরণগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(i) $3y=5x$ (ii) $y=5x+4$ (iii) $2x=6-3y$

(iv) $x-2y=0$ (v) $3x-5y=3$ (vi) $3x+2y=24$

(vii) $2x-7y+12=0$ (viii) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ (ix) $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$

(x) $x=\frac{2y+6}{}$ (xi) $x=(y+1)7$ (xii) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$

2. অপেক্ষকগুলির লেখচিত্র অঙ্কন কর

(a) $2x+3$ (b) $5x+6$ (c) $-7x+5$ (d) $\frac{5}{6}x$

(e) $\frac{x+3}{2}$ (f) $\frac{2x-5}{3}$ (g) $(x+1)+(x-1)$

(h) $-x-2$

3. বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরলরেখাগুলির সমীকরণ গঠন কর :

(i) (3, 5) এবং (−3, 2) (ii) (4, 1) এবং (0, 7)

(iii) (−1, 3) এবং (2, 1) (iv) (2, 3) এবং (−3, −4)

4. $x+y=2$ এবং $x-y=0$ সমীকরণদ্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ এবং $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6 যদি $\frac{5x-1}{3}=\frac{3x+9}{5}$ হয়, তাহা হইলে উহাদের লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

7. $\frac{x+3}{2}$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং $x=3$ হইলে উহার মান কত লেখচিত্র দেখিয়া নির্ণয় কর।

8. $(5-x)$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং $x=7$ হইলে উহার মান কত, লেখচিত্র হইতে নির্ণয় কর।

9. লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া দেখাও যে, (i) $7x+5y=24$, (ii) $y=2-x$ এবং (iii) $2x=9-y$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত সরলরেখা তিনটি একটি বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে। ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

10. $(9x+4)$ অপেক্ষকটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং $x=\frac{1}{3}$ হইলে উহার মান কত, লেখচিত্র দেখিয়া নির্ণয় কর।

11. $\frac{2x+7}{3}=\frac{3x-7}{2}$ হইলে উহাদের লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

12. (i) $y=2$, (ii) $x+y=12$ এবং (iii) $2x-y+6=0$; সমীকরণ তিনটি দ্বারা গঠিত সরলরেখা তিনটির লেখচিত্রগুলির প্রথমটি দ্বিতীয়টিকে, দ্বিতীয়টি তৃতীয়টিকে এবং তৃতীয়টি প্রথমটিকে ছেদ করে। ঐ ছেদবিন্দু তিনটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

13. $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনপূর্বক অক্ষদ্বয়ের সহিত উহার ছেদবিন্দু দুইটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। অক্ষদ্বয় ও রেখাটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত?

14. দেখাও যে, (2, 3) এবং (−3, −1) বিন্দুদ্বয়গামী রেখার উপর (7, 7) বিন্দুটিও আছে। উক্ত রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

15. দেখাও যে, (3, −2) এবং (−3, 2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটি (0, −3) এবং (2, 0) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটিকে ছেদ করিয়াছে।

16. দেখাও যে, (−2, −14) এবং (−2, 2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখা দুইটি পরস্পরচ্ছেদী। উহাদের ছেদবিন্দুটি নির্ণয় কর।

প্রশ্নমালা 30

(বিবিধ প্রশ্ন)

1. সমাধান কর:

(a) $\frac{4-x}{4}-\frac{5-x}{5}+\frac{6-x}{6}=1$ (b) $\frac{7x^2}{(x-1)(2x-3)}=3\frac{1}{2}$

2. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 632; উহাদের একটি অপরটির 3 গুণ। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

3. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(*a*) $a^2-b^2+2bc-c^2$ (*b*) $4x^2-4xy-2yz-z^2$

4. সরল কর : $\left\{2-\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right\}\div\left\{2+\frac{a^2+b^2-c^2}{ab}\right\}$

5. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^2+2x-15$ ও x^2-x-6

6. প্রমাণ কর :

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2-(a-b)^2-(b-c)^2-(c-a)^2=4(ab+bc+ca)$$

7. মান নির্ণয় কর : $\frac{2{\cdot}25-1{\cdot}44}{1{\cdot}5+1{\cdot}2}$

8. সমাধান কর : $\frac{a}{bx}-\frac{b}{ax}=a^2-b^2$ [W. B. S. B. 1952]

9. দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কসমষ্টি 7; সংখ্যাটির সহিত 45 যোগ করিলে অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করে। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

10. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(*a*) x^4-3x^2+1 (*b*) $(a+b)^2-7(a+b)-8$

11. $x^2+\frac{1}{x^2}=7$ হইলে $x^6+\frac{1}{x^6}$-এর মান নির্ণয় কর।

12. সরল কর : $\left(a+\frac{1}{b}\right)\times\left(a-\frac{1}{b}\right)\times\frac{b^2}{a^2b^2-1}$

13. $x^2-7x-18$-কে দুইটি বর্গের অন্তরফলে প্রকাশ কর।

14. ল. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^2(x^2-4)$ ও $x^4+2x^3-8x^2$

15. (1, 3) এবং (−2, −6) বিন্দুদ্বয় যুক্ত করিয়া দেখাও যে এই সরলরেখা মূল-বিন্দুকে ছেদ করে।

16. সমাধান কর : $\frac{x+a}{2b+3c}+\frac{x+2b}{3c+a}+\frac{x+3c}{a+2b}+3=0$

17. P এবং Q নামক দুই ষ্টেশন হইতে দুইটি ট্রেন প্রতি ঘণ্টায় যথাক্রমে 36 কি. মি. এবং 44 কি. মি. বেগে পরস্পরের দিকে চলিতে লাগিল। ষ্টেশন দুইটির দূরত্ব 200 কি. মি. হইলে কতক্ষণ পরে ট্রেন দুইটি মিলিত হইবে ?

18. (i) $a+b+c=5$ এবং $a^2+b^2+c^2=13$ হইলে $ab+bc+ca$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. 1940]

(ii) $x=ay$ এবং $y=bx$ হইলে, প্রমাণ কর, $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}=1$

19. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(a) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$ (b) x^3-2x+1

20. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর, $a^2-bc=-(ab+bc+ca)$

21. সমাধান কর : $2x-y=5, 3x+2y=11$

22. সরল কর : $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}$

23. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^2+3x-10, x^3-x^2-14x+24$

24. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

x^2-3x+2, x^3+2x^2-3x এবং $x^4+x^3-6x^2$

25. সমাধান কর : $\frac{10}{5x-9}+\frac{14}{2x+9}=\frac{9}{x+8}$

26. টাকায় 2-টি ও টাকায় 3-টি হিসাবে সমানসংখ্যক আনারস ক্রয় করিয়া 2 টাকায় 5-টি হিসাবে সমস্ত আনারস বিক্রয় করিলে 1 টাকা ক্ষতি হয়। আনারসের সংখ্যা কত ?

27. লেখচিত্র অঙ্কন করিয়া সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু নির্ণয় কর :

(a) $x=y+1$ (b) $2y=3x-5$

28. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(a) $x^3-3a^2x+2a^3$ (b) $14x-3x^2+5$

29. (i) যদি $x+y=a, x^2+y^2=b^2$ এবং $x^3+y^3=c^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^3+2c^3=3ab^2$

(ii) $a+b+c=0$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{ab}{a^2+ab+b^2}+\frac{bc}{b^2+bc+c^2}+\frac{ca}{c^2+ca+a^2}=1$$

30. ল. সা. গু. নির্ণয় কর : $6x^2-x-1, 3x^2+7x+2$ এবং $2x^2+3x-2$

31. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$2x^3+9x^2+4x-15$ ও $4x^3+8x^2+3x+20$

32. সমাধান কর : (a) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-6}{x+3}=2$

(b) $\frac{1}{x+1}+\frac{7}{x+5}=\frac{5}{x+3}+\frac{3}{x+7}$

33. এমন একটি ভগ্নাংশ নির্ণয় কর যাহার লব হইতে 1 বিয়োগ করিলে উহা $\frac{2}{3}$ হয় এবং যাহার হরের সহিত 6 যোগ করিলে উহা $\frac{1}{2}$ হয়।

34. $x(2x+1)(x-2)(2x-3)-63$-কে দুইটি বর্গের অন্তররূপে প্রকাশ কর।

35. সরল কর : $\frac{a^2(b-c)}{(a+b)(c+a)}+\frac{b^2(c-a)}{(b+c)(a+b)}+\frac{c^2(a-b)}{(c+a)(b+c)}$

36. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (a) $17x-7x^2-6$

(b) $4x^2-4xy-2yz-z^2$

37 (i) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$-কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

(ii) যদি $\frac{b+a}{b-a}+\frac{b+c}{b-c}=2$ হয়, প্রমাণ কর, $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$

38. দুইটি রাশির গ. সা. গু. $x-3$ এবং উহাদের ল. সা. গু. $3x^3-5x^2-11x-3$; রাশিদ্বয়ের একটি x^2-2x-3 হইলে অপরটি কত ?

39. সমাধান কর : (a) $x+y-3=4x-5y+6=0$

(b) $17x-7y=52$; $3x=2y$

40. $(-1, -6)$, $(1, -3)$ এবং $(5, 3)$ বিন্দুত্রয়-সংযোজক সরলরেখাটি x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

41. 10 বৎসর পূর্বে পিতার বয়স পুত্রের বয়সের 7 গুণ ছিল ; 2 বৎসর পরে পিতার বয়সের দ্বিগুণ, পুত্রের বয়সের 5 গুণের সমান হইবে। বর্তমানে কাহার বয়স কত ?

42. (a) গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$2x^3+5x^2+x-2$, $3x^3+10x^2+9x+2$ এবং $2x^3-3x^2-2$

(b) ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$2x^3+3x^2-3x-2$, x^3+4x^2+x-6 এবং $6x^3-x^2-4x-1$

43 সরল কর : $\frac{x^2}{ab}+\frac{(x-a)^2}{a(a-b)}-\frac{(x-b)^2}{b(a-b)}$

44. এক ব্যক্তি 650 টাকায় একটি ঘোড়া ও একটি গরু ক্রয় করিল। ঘোড়াটি $12\frac{1}{2}\%$ লাভে এবং গরুটি 10% ক্ষতিতে বিক্রয় করায় তাহার মোট 52 টাকা লাভ হইল। ঘোড়াটির ক্রয়মূল্য কত ?

45. প্রমাণ কর : $\frac{a+b}{ab}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)+\frac{b+c}{bc}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=\frac{a+c}{ac}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)$

46. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (a) $x^2-\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)x-1$

(b) $(x+1)(x+3)(x-4)(x-6)+24$

47. সরল কর : $\frac{4a^2-(b-c)^2}{(2a+c)^2-b^2}+\frac{b^2-(2a-c)^2}{(2a+b)^2-c^2}+\frac{c^2-(2a-b)^2}{(b+c)^2-4a^2}$

48. সমাধান কর : (a) $\frac{5}{x}+3y=8,\ \frac{4}{x}-10y=56$

(b) $ax+by=c,\ bx+ay=d$

49. গ. সা. গু. ও ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$3x^2+16x-35,\ x^3+343$ এবং $x^3-x^2-41x+105$

50. একটি আয়তাকার প্রাঙ্গণের ক্ষেত্রফল 192 বর্গমিটার। উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ 2 মিটার করিয়া বেশী হইলে ক্ষেত্রফল 60 বর্গমিটার বেশী হইত। প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

51. সরল কর : $1+\frac{a}{b}-\frac{b}{a+b}-\frac{a^2}{ab-b^2}+\frac{2a^2}{a^2-b^2}$

52. (i) প্রমাণ কর : $a+b+c=0$ হইলে,

$a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ [C. U. 1943]

(ii) যদি $\frac{1-2bx+b^2}{1-b^2}=\frac{1-b^2}{1+2by+b^2}$ হয়,

প্রমাণ কর, $\frac{x-y}{1-xy}=\frac{2b}{1+b^2}$

53. অন্ততঃ চারিটি বিন্দু লইয়া $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$-এর লেখচিত্র অঙ্কিত কর এবং মূলবিন্দু ও $(-8, 6)$ বিন্দুর সংযোজক-সরলরেখা লেখটিকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [W. B. S. B. 1954]

54. $x=\frac{a-1}{a+1}$ এবং $y=\frac{2a-1}{2a+1}$ হইলে, দেখাও যে, $xy-1=3(x-y)$.

বীজগণিত

(দশম শ্রেণী)

দ্বাদশ অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণ

(Quadratic Equation)

যে সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির বর্গ বা দ্বিশক্তিবিশিষ্ট পদ থাকে এবং তাহার অধিক শক্তিবিশিষ্ট পদ থাকে না, তাহাকে **দ্বিঘাত সমীকরণ** বা **দ্বিতীয় মানের সমীকরণ** (Quadratic Equation or Equation of the second degree) বলে। যেমন, $2x^2-7=0$, $x^2+5x+6=0$, $2x^2+3x-4=0$ ইত্যাদি। সাধারণতঃ, একটি দ্বিঘাত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0, (a\neq 0)$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

দ্বিঘাত সমীকরণ দুই প্রকার :

(i) যে দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশিটির একশক্তিবিশিষ্ট কোন পদ থাকে না, তাহাকে **বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ** (Pure Ouadratic Equation) বলে। $ax^2+b=cx^2+d$, একটি বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ।

(ii) যে দ্বিঘাত সমীকরণে দ্বিশক্তিবিশিষ্ট পদের সহিত একশক্তিবিশিষ্ট পদও বর্তমান থাকে, তাহাকে **মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ** (Adfected Quadratic Equation) বলে। $ax^2+bx+c=0$, একটি মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : $ax^2+bx+c=0$, এই সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণে a, b, c-এর মান 'x'-এর (বা অজ্ঞাত রাশিটির) মানের উপর নির্ভর করে না।

A. বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ :

বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ দুই প্রকারে সমাধান করা যায়,—

(i) সমীকরণের পদগুলিকে একপক্ষে স্থানান্তরিত করিয়া উহার উৎপাদক বিশ্লেষণপূর্বক সমীকরণটি সমাধান করা যায়।

(ii) সমীকরণের x-বিশিষ্ট পদগুলিকে এক পক্ষে এবং ধ্রুবকগুলিকে অপর পক্ষে পক্ষান্তর করিয়া বর্গমূল নির্ণয়ের দ্বারা অজ্ঞাত রাশির মান নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য : বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করিলে x-এর দুইটি মান পাওয়া যায়, —একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $(x+2)(x-2)=32$

$(x+2)(x-2)=32$ বা, $x^2-2^2=32$

বা, $x^2=32+2^2$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $x^2=36$ $\quad\therefore\quad x=\sqrt{36}=\pm 6.$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=(+6)$ অথবা (-6)

[এখানে x-বিশিষ্ট পদকে বামপক্ষে এবং ধ্রুবকগুলিকে ডানপক্ষে স্থানান্তরিত করিয়া বর্গমূল করা হইয়াছে।

$(+6)\times(+6)=36$; আবার $(-6)\times(-6)=36$;

$\therefore$ 36-এর বর্গমূল হইতেছে $(+6)$ অথবা (-6)]

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\frac{3x^2-5}{2}+\frac{5x^2-6}{9}=\frac{4x^2-7}{6}$

$$\frac{3x^2-5}{2}+\frac{5x^2-6}{9}=\frac{4x^2-7}{6}$$

হরগুলির ল. সা. গু. 18 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিলে সমীকরণটি হয়—

$9(3x^2-5)+2(5x^2-6)=3(4x^2-7)$

বা, $27x^2-45+10x^2-12=12x^2-21$

বা, $27x^2+10x^2-12x^2-45-12+21=0$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $25x^2-36=0$ বা, $(5x+6)(5x-6)=0$

দুইটি রাশির গুণফল 0 হইলে একটি রাশি অবশ্যই 0 হইবে।

$\therefore$ যদি, $5x+6=0$ হয়, তবে, $5x=-6$ $\quad\therefore\quad x=-\frac{6}{5}$

যদি, $5x-6=0$ হয়, তবে, $5x=6$ $\quad\therefore\quad x=\frac{6}{5}$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=-\frac{6}{5}$ অথবা $\frac{6}{5}$

[এখানে সমীকরণের পদগুলিকে এক পক্ষে স্থানান্তরিত করিয়া উৎপাদক বিশ্লেষণপূর্বক সমীকরণটি সমাধান করা হইয়াছে।]

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $2(3x^2-2)-(4x^2-3)=\frac{3}{2}(2+x)(2-x)$

$$2(3x^2-2)-(4x^2-3)=\frac{3}{2}(2+x)(2-x)$$

হরগুলির ল. সা. গু. 2 দ্বারা উভয় পক্ষকে গুণ করিলে সমীকরণটি হয়—

$$4(3x^2-2)-2(4x^2-3)=3(4-x^2)$$

বা, $12x^2-8-8x^2+6=12-3x^2$

বা, $4x^2+3x^2=12+2$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $7x^2=14$

বা, $x^2=\frac{14}{7}=2$

বা, $x=\pm\sqrt{2}$ ∴ নির্ণেয় বীজ, $x=\pm\sqrt{2}$

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $16\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3=\frac{a+x}{a-x}$

$$16\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3=\frac{a+x}{a-x}$$

বা, $16\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^4=1$ $\left[\text{উভয় পক্ষকে } \left(\frac{a-x}{a+x}\right) \text{ দ্বারা গুণ করিয়া}\right]$

বা, $4\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2=1$ [উভয় পক্ষের বর্গমূল করিয়া]

বা, $2\left(\frac{a-x}{a+x}\right)=1$ [পুনরায় উভয় পক্ষের বর্গমূল করিয়া]

বা, $2(a-x)=a+x$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $-3x=-a$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $x=\frac{-a}{-3}=\frac{a}{3}$ ∴ নির্ণেয় বীজ, $x=\frac{a}{3}$

প্রশ্নমালা 31

সমাধান কর :

1. $x^2=144$ 2. $5x^2=500$ 3. $a^3x^2=a^7$

4. $2x^2-32=0$ 5. $3x^2-7=9-6x^2$ 6. $8(x^2-3)=6(x^2+8)$

7. $x-\frac{1}{x}=0$ 8. $\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}$ 9. $\frac{2x^2+3}{2}=\frac{5x^2-8}{3}$

10. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+5}=\frac{1}{2}$

11. $\frac{2x+1}{x+1}=\frac{x+8}{x+4}$

12. $\frac{x+4}{x-4}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{10}{3}$

13. $\frac{5}{x^2-2}+\frac{9}{3x^2-2}=\frac{8}{x^2+1}$

14. $\frac{3x^2-4}{x^2}+\frac{2}{4x^2-3}=3$

15. $\frac{a}{x}-\frac{b}{x}=\frac{x}{b}-\frac{x}{a}$

16. $\frac{a}{ax+b}-\frac{b}{bx-a}=\frac{a^2+b^2}{x(a^2-b^2)}$

17. $\frac{5}{x^2-3}+\frac{3}{x^2-7}=\frac{8}{x^2-5}$

18. $2=\frac{1}{3}(x-2)(x-3)-\frac{1}{21}(x-21)(x-14)$

19. $\frac{1}{2}(x^2+3)+\frac{1}{5}(x^2+8)+\frac{1}{7}(x^2+10)=\frac{1}{4}(x^2+11)$

20. $\frac{1}{m}(x-m)^2+\frac{1}{n}(x+n)^2=2(m+n).$

B. মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণঃ

(i) উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া সমাধান (Solution by factorization):

বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণের ন্যায় মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণও সমাধান করিতে হইলে সমস্ত পদগুলিকে এক পক্ষে লইয়া গিয়া উৎপাদক-বিশ্লেষণ করিতে হয়।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $6x^2-11x-10=0$

$6x^2-11x-10=0$ বা, $6x^2-15x+4x-10=0$

বা, $3x(2x-5)+2(2x-5)=0$ বা, $(2x-5)(3x+2)=0$

দুইটি রাশির গুণফল 0 হইলে একটি রাশি অবশ্যই 0 হইবে।

যদি $2x-5=0$ হয়, তবে, $2x=5$ $\therefore\ x=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$

যদি, $3x+2=0$ হয়, তবে, $3x=-2$ $\therefore\ x=-\frac{2}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=2\frac{1}{2}$ বা $-\frac{2}{3}$

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $(3x+1)(2x+3)=3$

$(3x+1)(2x+3)=3$ বা, $6x^2+11x+3=3$

বা, $6x^2+11x+3-3=0$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $6x^2+11x=0$ বা, $x(6x+11)=0$

দুইটি রাশির গুণফল 0 হইলে একটি রাশি অবশ্যই 0 হইবে।

$\therefore\quad x=0,$ অথবা, $6x+11=0$

বা, $6x=-11$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $x=-\frac{11}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=0$ অথবা, $-\frac{11}{6}$

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}$. [C. U. 1921

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}$$

বা, $\frac{x+b-x}{x(x+b)}=\frac{a+b-a}{a(a+b)}$

বা, $\frac{1}{x(x+b)}=\frac{1}{a(a+b)}$ [উভয়পক্ষকে b দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $x(x+b)=a(a+b)$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $x^2+bx=a^2+ab$

বা, $x^2-a^2+bx-ab=0$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $(x+a)(x-a)+b(x-a)=0$

বা, $(x-a)(x+a+b)=0$

দুইটি রাশির গুণফল 0 হইলে একটি রাশি অবশ্যই 0 হইবে।

$\therefore$ যদি, $x-a=0$ হয়, তবে $x=a$

যদি, $x+a+b=0$ হয়, তবে $x=-(a+b)$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=a$ অথবা, $-(a+b)$

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=2\frac{1}{6}$

[E. B. S. B. 1950]

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=2\frac{1}{6}$$

বা, $\frac{x^2+(x+1)^2}{x^2+x}=\frac{13}{6}$ বা, $\frac{2x^2+2x+1}{x^2+x}=\frac{13}{6}$

বা, $13x^2+13x=12x^2+12x+6$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $x^2+x-6=0$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $(x+3)(x-2)=0$

দুইটি রাশির গুণফল 0 হইলে একটি রাশি অবশ্যই 0 হইবে।

যদি, $x+3=0$ হয়, যদি, $x-2=0$ হয়,

তবে, $x=-3$ তবে, $x=2$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=-3$ অথবা 2

(ii) পূর্ণবর্গে পরিণত করিয়া সমাধান (বীজ নির্ণয়ের সাধারণ সূত্র) (**Solution by the method of perfect Square**) :

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ একটি সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ।

উভয় পক্ষকে '$4a$' দ্বারা গুণ করিয়া পাই,

$$4a^2x^2+4abx+4ac=0$$

বা, $4a^2x^2+4abx=-4ac$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac$ [উভয়পক্ষে b^2 যুক্ত করিয়া]

বা, $(2ax+b)^2=b^2-4ac$

বা, $2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$ [বর্গমূল নির্ণয় করিয়া]

বা, $2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

বা, $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

অতএব, নির্ণেয় বীজ দুইটি হইতেছে,

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

দ্রষ্টব্য : (i) উল্লিখিত প্রণালীটি প্রথমে বিখ্যাত গণিতবিদ শ্রীধর আচার্য কর্তৃক আবিষ্কৃত হইয়াছিল ; সেইজন্য উহাকে অনেক সময় "শ্রীধর আচার্যের প্রক্রিয়া"-ও বলা হয়।

(ii) এই প্রক্রিয়ার সাহায্যে যে-কোন দ্বিঘাত সমীকরণকে সমাধান করা যায়।

উদাহরণ 5. সমাধান কর : $2x^2+3x-4=0$

উক্ত সমীকরণটিকে $ax^2+bx+c=0$-এর সহিত তুলনা করিয়া দেখিতে পাই, $a=2$, $b=3$ এবং $c=-4$. অতএব, সূত্রানুযায়ী,

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4.2.(-4)}}{2.2}=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{4}$$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজদ্বয়, $x=\frac{-3+\sqrt{41}}{4}$ এবং $\frac{-3-\sqrt{41}}{4}$

উদাহরণ 6. সমাধান কর : $4x^2-16x+15=0$

এখানে, $a=4$, $b=-16$ এবং $c=15$

$\therefore$ সূত্রানুযায়ী, $x=\frac{-(-16)\pm\sqrt{(-16)^2-4.4.15}}{2\cdot4}$

$$=\frac{16\pm\sqrt{256-240}}{8}=\frac{16\pm\sqrt{16}}{8}=\frac{16\pm4}{8}=\frac{20}{8},\ \frac{12}{8}=\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}$$

বিপরীত প্রণালী (উৎপাদকে বিশ্লেষণ করিয়া) :

$4x^2-16x+15=0$

বা, $4x^2-6x-10x+15=0$

বা, $2x(2x-3)-5(2x-3)=0$ বা, $(2x-3)(2x-5)=0$

বা, $(2x-3)=0$ এবং $(2x-5)=0$ বা, $x=\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$.

উদাহরণ 7. সমাধান কর : $x^2+7x+\sqrt{(x^2+7x+9)}=3$

মনে কর, $x^2+7x=z$.

তাহা হইলে সমীকরণটি হয়, $z+\sqrt{(z+9)}=3$

বা, $z-3=-\sqrt{(z+9)}$

বা, $(z-3)^2=z+9$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করিয়া]

বা, $z^2-6z+9=z+9$

বা, $z^2-7z=0$ বা, $z(z-7)=0$ $\therefore$ $z=0, 7$

কিন্তু $z=7$, এই বীজটির দ্বারা $z+\sqrt{(z+9)}=3$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

$\therefore$ $z=0$

এখন, $z=0$ হইলে, $x^2+7x=0$

বা, $x(x+7)=0$ $\therefore$ $x=0,-7$

উদাহরণ 8. সমাধান কর :

$$x+\frac{1}{x}=6\frac{1}{6}$$

$x+\frac{1}{x}=6\frac{1}{6}$ বা, $\frac{x^2+1}{x}=\frac{37}{6}$ বা, $6x^2+6=37x$

বা, $6x^2-37x+6=0$ বা, $6x^2-36x-x+6=0$

বা, $6x(x-6)-1.(x-6)=0$

বা, $(x-6)(6x-1)=0$ $\therefore$ $x=6, \frac{1}{6}$

প্রশ্নমালা 32

সমাধান কর :

1. $3x^2-10x+3=0$
2. $x^2-17x+72=0$
3. $(x+4)(2x-3)=6$
4. $x^2-26x=407$
5. $(2x+3)(3x+1)=3$
6. $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{3}{4})=\frac{3}{8}$
7. $(x+2\frac{1}{2})(3x+7)=\frac{1}{2}$
8. $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}=4\frac{1}{4}$ [C. U. 1931]
9. $x(a^2+1)=a(x^2+1)$
10. $ax^2+(b+c)x=a+b+c$
11. $\frac{x-6}{x+2}+\frac{x-10}{x+6}+2=0$
12. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{6(x-2)}{x-6}=1$
13. $\frac{x+3}{x-3}+6\frac{x-3}{x+3}=5$ [W. B. S. B. 1952]
14. $\left(\frac{x+m}{x-m}\right)^2-7\left(\frac{x+m}{x-m}\right)+12=0$
15. $\frac{x+1}{2}+\frac{2}{x+1}=\frac{x+1}{3}+\frac{3}{x+1}-\frac{5}{6}$
16. $\frac{x-a}{x+a}-\frac{x+a}{x-a}+6\frac{6}{7}=0$
17. $\frac{2x}{x-1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{5x-11}{x-2}$
18. $\frac{12x+17}{3x+1}-\frac{2x+15}{x+7}=3\frac{1}{5}$
19. $\frac{40}{x-5}+\frac{27}{x}=13$ [D. B. 1936]
20. $\frac{7}{3x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{1}{4}$
21. $3(2+x)=4x-3+\frac{15}{7-x}$
22. $\frac{x+a}{x+b}+\frac{x-a}{x-b}=\frac{x+2a}{x+b}$ [W. B. S. B. 1955]

23. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{x}\right)-5=0$ 24. $x+\frac{1}{x}=25\frac{1}{25}$

*25. $\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-b}{x-a}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ *26. $\frac{x-a-b}{\ }+\frac{\ }{x-a-b}=2$

*27. $2x^2+8x-3-2\sqrt{(2x^2+8x-3)}=3$

28. $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}+\frac{1}{x+3a}=\frac{3}{x}$ [C. U. 1950]

C. দ্বিশক্তি সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্নাবলী :

দ্বিশক্তি সমীকরণ-ঘটিত প্রশ্নাবলীর সমাধান কি প্রকারে করিতে হয়, নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে তাহা বুঝিতে পারিবে।

উদাহরণ 1. এমন একটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহার বর্গের সহিত সেই সংখ্যাটি যোগ করিলে যোগফল 56 হয়।

মনে কর, সংখ্যাটি $= x$.

∴ প্রদত্ত সর্তানুসারে, $x^2+x=56$

বা, $x^2+x-56=0$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $(x+8)(x-7)=0$

∴ হয় $(x+8)=0$, নতুবা $(x-7)=0$

$x+8=0$ হইলে $x-7=0$ হইলে

$x=-8$ $x=7$

∴ সম্ভাব্য সংখ্যাটি $=-8$ অথবা 7

দেখা যাইতেছে যে, $7^2+7=56$ এবং $(-8)^2+(-8)=56$

সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা $=7$, অথবা -8

উদাহরণ 2. 20 মিটার দৈর্ঘ্য এবং 5 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট একটি প্রাঙ্গণের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

মনে কর, বর্গক্ষেত্রের বাহু $=x$ মিটার ; ∴ উহার ক্ষেত্রফল $=x^2$ বর্গ. মি.

এখন, সর্তানুসারে, $x^2=20$ মি.$\times 5$ মি.$=100$ বর্গ মি.।

∴ $x=\sqrt{100}$ মিটার $=\pm 10$ মিটার।

কিন্তু কোন স্থানের দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ ঋণাত্মক হইতে পারে না।

∴ বর্গক্ষেত্রের নির্ণেয় বাহু = 10 মিটার।

দ্রষ্টব্য : দ্বিশক্তি সমীকরণ-বিষয়ক প্রশ্নাবলীতে সমীকরণের যে বীজটি প্রশ্নের সর্তানুসারে গ্রহণের অযোগ্য, তাহা পরিত্যাগ করিতে হয়।

উদাহরণ 3. এক ব্যক্তি স্রোতের অনুকূলে 7 কি. মি. যাইয়া প্রত্যাবর্তন করিতে $4\frac{2}{3}$ ঘণ্টা লাগিল। স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 2 কি. মি. হইলে স্থির জলে নৌকার বেগ কত ?

মনে কর, স্থির জলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় x কি. মি.।

∴ স্রোতের অনুকূলে এবং প্রতিকূলে গতি ঘণ্টায় যথাক্রমে $(x+2)$ কি. মি. এবং $(x-2)$ কি. মি.। ∴ স্রোতের অনুকূলে 7 কি. মি. যাইতে সময় লাগে $\frac{7}{x+2}$ ঘণ্টা এবং স্রোতের প্রতিকূলে 7 কি. মি. প্রত্যাবর্তন করিতে সময় লাগে $\frac{7}{x-2}$ ঘণ্টা।

∴ সর্তানুসারে, $\frac{7}{x+2}+\frac{7}{x-2}=4\frac{2}{3}$

বা, $\frac{7x-14+7x+14}{x^2-4}=\frac{14}{3}$

বা, $\frac{14x}{x^2-4}=\frac{14}{3}$

বা, $\frac{x}{x^2-4}=\frac{1}{3}$ [উভয় পক্ষকে 14 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $x^2-4=3x$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $x^2-3x-4=0$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $(x-4)(x+1)=0$

∴ হয় $(x-4)=0$, নতুবা $(x+1)=0$

$x-4=0$ হইলে	$x+1=0$ হইলে
$x=4$	$x=-1$

কিন্তু x, অর্থাৎ স্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ কখনও ঋণাত্মক হইতে পারে না।

∴ নৌকার নির্ণেয় বেগ ঘণ্টায় 4 কিলোমিটার।

উদাহরণ 4. এক ব্যক্তি 21 টাকায় একটি কলম বিক্রয় করিয়া দেখিল যে, সে যত টাকায় কলমটি ক্রয় করিয়াছিল, তাহার ঠিক শতকরা তত টাকা ক্ষতি হইয়াছে। কলমটির ক্রয়মূল্য কত ?

মনে কর, কলমটির ক্রয়মূল্য $= x$ টাকা।

$\therefore$ ক্ষতির পরিমাণ $= x\%$ বা ক্রয়মূল্যের $\frac{x}{100}$

$= x$ টাকার $\frac{x}{100}$ বা, $\frac{x^2}{100}$ টাকা।

আবার, ক্ষতি = ক্রয়মূল্য − বিক্রয়মূল্য।

$\therefore$ সর্তানুসারে, $\frac{x^2}{100} = x - 21$

বা, $x^2 = 100x - 2100$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $x^2 - 100x + 2100 = 0$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $(x-70)(x-30) = 0$

$\therefore$ হয় $x - 70 = 0$, নতুবা $x - 30 = 0$

$x - 70 = 0$ হইলে | $x - 30 = 0$ হইলে

$x = 70$ | $x = 30$

$\therefore$ কলমের নির্ণেয় ক্রয়মূল্য $= 70$ টাকা বা 30 টাকা।

প্রশ্নমালা 33

1. কোন্ পূর্ণ সংখ্যার বর্গের দ্বিগুণের সহিত উহার 5 গুণ যোগ করিলে, সমষ্টি 33 হইবে ?

2. দুইটি সংখ্যার যোগফল 58 এবং গুণফল 192 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

3. কোন্ সংখ্যা 30-এর সহিত যোগ করিলে, যোগফল সংখ্যাটির বর্গ অপেক্ষা 12 কম হইবে ? [E. B. S. B. 1950]

4. এমন দুইটি ক্রমিক সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের বর্গের সমষ্টি 265.

5. দুইটি সংখ্যার বিয়োগফল 3 এবং উহাদের বর্গের সমষ্টি 65 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

6. একটি প্রাঙ্গণের ক্ষেত্রফল 120 বর্গমিটার এবং উহার পরিসীমা 44 মিটার। প্রাঙ্গণের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

7. 2000 বর্গমিটার ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একখণ্ড আয়তকার জমির পরিসীমা 180 মিটার। জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

8. 150 মিটার পথ যাইতে কোন গাড়ীর পশ্চাতের চাকা অপেক্ষা সম্মুখের চাকা 5 বার অধিক আবর্তন করে। চাকা দুইটির পরিধির অন্তর 1 মিটার হইলে, চাকা দুইটির পরিধি নির্ণয় কর।

9. এক ব্যক্তি 84 কি. মি. অতিক্রম করিয়া দেখিল যে, সে যদি ঘণ্টায় আরও 5 কি. মি. বেশী চলিত, তবে তাহার সময়ও 5 ঘণ্টা কম লাগিত। ঐ ব্যক্তির গতিবেগ কত?

10. P এবং Q নামক দুইটি স্থানের দূরত্ব 30 কি. মি.। A এবং B সকাল 7 টায় যথাক্রমে P এবং Q হইতে পরস্পরের দিকে রওনা হইল এবং বেলা 10 টায় পরস্পর মিলিত হইল। যদি 1 কি. মি. যাইতে A অপেক্ষা B-এর 16 মিনিট কম সময় লাগে, তবে প্রতি ঘণ্টায় উভয়ের গতিবেগ কত ছিল?

11. এক ব্যক্তি 20 টাকায় কতগুলি কলম ক্রয় করিল। যদি সে ঐ টাকায় একটি কলম বেশী পাইত, তবে প্রতিটি কলমের মূল্য 1 টাকা করিয়া কমিয়া যাইত। ঐ ব্যক্তি কতগুলি কলম ক্রয় করিয়াছিল?

12. এক ব্যক্তি 375 টাকা দিয়া সমান মূল্যের কতগুলি দ্রব্য ক্রয় করিল এবং প্রতিটি 9 টাকা হিসাবে বিক্রয় করিয়া সে মোটের উপর 10টি দ্রব্যের ক্রয়মূল্যের সমান টাকা লাভ করিল। দ্রব্য-সংখ্যা কত?

13. 24 টাকায় একটি গরু বিক্রয় করিলে, গরুটির ক্রয়মূল্য যত টাকা, শতকরা ঠিক তত টাকা ক্ষতি হয়। গরুটির ক্রয়মূল্য কত?

14. একটি সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণ 13 সে. মি.; উহার অপর দুই বাহুর সমষ্টি 17 সে. মি. হইলে ঐ বাহুদ্বয়ের প্রতিটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

15. একটি সমকোণী ত্রিভুজের পরিসীমা 56 সে. মি. এবং উহার অতিভুজ 25 সে. মি.; ত্রিভুজটির ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য কত?

16. একটি ঘরের মেঝের ক্ষেত্রফল $21\frac{1}{3}$ বর্গমিটার। ইহার প্রতিটি বাহু $\frac{2}{3}$ মি. বাড়াইলে ক্ষেত্রফল $6\frac{2}{3}$ বর্গমিটার বাড়িয়া যায়। ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

17. একটি মাঝি $1\frac{1}{2}$ ঘণ্টায় স্রোতের অনুকূলে 9 কি. মি. এবং স্রোতের প্রতিকূলে 3 কি. মি. নৌকা বাহিয়া যায়। ঘণ্টায় স্রোতের ও নৌকার গতিবেগ নির্ণয় কর।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

অনুপাত ও সমানুপাত
(Ratio and Proportion)

A. অনুপাত (Ratio):

এক জাতীয় দুইটি রাশির মধ্যে তুলনায় একটি অপরটির কতগুণ বা কত অংশ, ইহা যদ্দারা প্রকাশিত হয়, তাহাকে রাশি দুইটির **অনুপাত** (Ratio) বলে।

দুইটি রাশির অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে, প্রথম রাশিকে দ্বিতীয় রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হয়। অনুপাতের প্রথম রাশিকে **পূর্ব রাশি** (Antecedent) ও দ্বিতীয় রাশিকে **উত্তর রাশি** (Consequent) বলে।

অতএব, অনুপাতকে ভগ্নাংশের আকারে প্রকাশ করা যায়; আবার রাশি দুইটির মধ্যে ":" এই প্রকার চিহ্ন দিয়াও অনুপাতকে প্রকাশ করা যায়।

যদি a এবং b দুইটি সমজাতীয় রাশি হয়, তাহা হইলে উহাদের অনুপাত $\frac{a}{b}$ অথবা $a : b$; এস্থলে a পূর্বরাশি এবং b উত্তর রাশি।

অনুপাতকে ভগ্নাংশের আকারেও প্রকাশ করা যায় বলিয়া অনুপাত সম্পর্কে নিম্নলিখিত সাধারণ উপপাদ্যটি পাওয়া যায়:

উপপাদ্য: অনুপাতের পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশিকে একই রাশি দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে অনুপাতের মানের কোন পরিবর্তন হয় না।

যেহেতু $\frac{a}{b}=\frac{am}{bm}=\frac{a \div m}{b \div m}$, সুতরাং $a : b = am : bm = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$

বিভিন্ন প্রকারের অনুপাত:

1. অনুপাতের পূর্ব রাশি ও উত্তর রাশি পরস্পর সমান হইলে অনুপাতকে **সাম্যানুপাত** (Ratio of equality) বলে। অনুপাতটি তখন 1-এর সমান। যথা, (*i*) $a : a$; (*ii*) $b : b$.

2. অনুপাতের রাশিদ্বয় অসমান হইলে তাহাকে **বৈষম্যানুপাত** (Ratio of inequality) বলে। যথা, (i) $a : b$; (*ii*) $c : d$.

3. অনুপাতের পূর্বরাশি অপেক্ষা উত্তর রাশি বৃহত্তর হইলে অনুপাতকে **লঘু অনুপাত** (Ratio of less inequality) বলে।

যথা, (i) $x:(x+1)$; (ii) $(x-1):(x+1)$.

4. অনুপাতের পূর্ব রাশি অপেক্ষা উত্তর রাশি ক্ষুদ্রতর হইলে অনুপাতকে **গুরু অনুপাত** (Ratio of greater inequality) বলে।

যথা, (i) $x:(x-1)$; (ii) $(x+2):(x-1)$.

সুতরাং, $a<b$ হইলে $a:b$ একটি লঘু অনুপাত এবং $a>b$ হইলে $a:b$ একটি গুরু অনুপাত।

লঘু অনুপাত ও গুরু অনুপাত সম্পর্কে নিম্নলিখিত উপপাদ্য দুইটি মনে রাখিও :

উপপাদ্য 1. অনুপাতের পদদ্বয়ের প্রত্যেকটির সহিত একই রাশি যোগ করিলে, লঘু অনুপাত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইবে এবং গুরু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত হইবে।

মনে কর, $\frac{a}{b}$ একটি অনুপাত এবং একই রাশি x, অনুপাতটির উভয় পদে যোগ করিয়া নূতন অনুপাত হইল $\frac{a+x}{b+x}$.

তাহা হইলে, $\frac{a}{b}-\frac{a+x}{b+x}=\frac{ab+ax-ab-bx}{b(b+x)}=\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$.

$a-b$ ধনাত্মক হইলে ইহা ধনাত্মক এবং $a-b$ ঋণাত্মক হইলে ইহা ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore$ $a<b$ হইলে, $\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$ ঋণাত্মক ; $\therefore$ $\frac{a+x}{b+x}>\frac{a}{b}$

এবং $a>b$ হইলে, $\frac{x(a-b)}{b(b+x)}$ ধনাত্মক ; $\therefore$ $\frac{a+x}{b+x}<\frac{a}{b}$.

সুতরাং, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

উপপাদ্য 2. অনুপাতের পদদ্বয়ের প্রত্যেকটি হইতে একই রাশি বিয়োগ করিলে, লঘু অনুপাত হ্রাসপ্রাপ্ত হইবে এবং গুরু অনুপাত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইবে।

মনে কর, $\frac{a}{b}$ একটি অনুপাত এবং একই রাশি x অনুপাতটির উভয় পদ হইতে বিয়োগ করিয়া অনুপাতটি হইল $\frac{a-x}{b-x}$.

তাহা হইলে, $\frac{a}{b}-\frac{a-x}{b-x}=\frac{ab-ax-ab+bx}{b(b-x)}=\frac{x(b-a)}{b(b-x)}$.

$a-b$ ঋণাত্মক হইলে ইহা ধনাত্মক এবং $a-b$ ধনাত্মক হইলে ইহা ঋণাত্মক হইবে।

$\therefore$ $a<b$ হইলে, $\frac{x(b-a)}{b(b-x)}$ ধনাত্মক ; $\therefore$ $\frac{a-x}{b-x}<\frac{a}{b}$

এবং $a>b$ হইলে, $\frac{x(b-a)}{b(b-x)}$ ঋণাত্মক ; $\therefore$ $\frac{a-x}{b-x}>\frac{a}{b}$.

সুতরাং, উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

একাধিক অনুপাতের গুণফল দ্বারা গঠিত কোন অনুপাতকে **মিশ্র অনুপাত** (Compound ratio) বলে। যথা,—

$a : b$ এবং $c : d$ অনুপাতদ্বয়ের গুণফল দ্বারা গঠিত অনুপাত $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ $=ac : bd$-কে মিশ্র অনুপাত বলে।

দুইটি অনুপাতের একটির পূর্ব রাশি অপরটির উত্তর রাশি এবং একটির উত্তর রাশি অপরটির পূর্ব রাশি হইলে অনুপাত দুইটিকে পরস্পর **বিপরীত অনুপাত** (Reciprocal ratio) বলে। যথা,—

$a : b$ এবং $b : a$ অনুপাত দুইটি পরস্পর বিপরীত অনুপাত।

বিপরীত অনুপাতদ্বয়ের গুণফল সর্বদা 1 হয়। যথা, $\frac{x}{y}\times\frac{y}{x}=1$.

যদি কোন অনুপাতকে তাহারই সহিত সংযুক্ত করা হয়, তাহা হইলে নূতন অনুপাতটিকে উহার **দ্বৈত অনুপাত** (Duplicate ratio) বলে। যথা,—

$a : b$ একটি অনুপাত এবং $a^2 : b^2$ উহার দ্বৈত অনুপাত।

যদি কোন অনুপাতকে তাহারই দ্বৈত অনুপাতের সহিত সংযুক্ত করা হয়, তাহা হইলে নূতন অনুপাতটিকে উহার **ত্রিগুণানুপাত** (Triplicate ratio) বলে। যথা,—$a : b$ একটি অনুপাত এবং $a^3 : b^3$ উহার ত্রিগুণানুপাত।

আবার, $a : b$ একটি অনুপাত, $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$ বা $\sqrt{a} : \sqrt{b}$ ইহার **দ্বিভাজিত অনুপাত** (Sub-duplicate ratio) এবং $a^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{3}}$ বা বা $\sqrt[3]{a} : \sqrt[3]{b}$ ইহার **ত্রিভাজিত অনুপাত** (Sub-triplicate ratio).

মেয় ও অমেয় অনুপাত :

যে অনুপাতকে দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ করা যায় তাহাকে **মেয় অনুপাত** (Commensurable ratio) বলে এবং যে অনুপাতকে অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতে প্রকাশ করা যায় না তাহাকে **অমেয় অনুপাত** (Incommensurable ratio) বলে। যথা,—

$3\frac{1}{2} : 4\frac{3}{4}$ একটি মেয় অনুপাত এবং $\sqrt{2} : \sqrt{3}$ একটি অমেয় অনুপাত।

অনুপাতের আসন্ন মান :

মনে কর, $a : b$ একটি অনুপাত। এই অনুপাতটিতে b-এর তুলনায় a-র মান যদি অত্যধিক ক্ষুদ্র হয়, তাহা হইলে $\frac{a}{b}$-এর মান ক্ষুদ্র হইবে।

আবার, $\frac{a^2}{b^2} : \frac{a}{b} = a : b$. $\therefore$ $\frac{a^2}{b^2}$-এর মান আরও ক্ষুদ্র হইবে।

তদ্রূপ, $\frac{a^3}{b^3}$-এর মান ক্ষুদ্রতর হইবে এবং $\frac{a^4}{b^4}$-এর মান আরও ক্ষুদ্রতর হইবে।

দেখা যাইতেছে যে, এই সকল রাশিমালার ক্ষুদ্রতার পরিমাণও এক প্রকার নহে। সেইজন্য ক্ষুদ্রতার পরিমাণ বুঝাইবার জন্য $\frac{a}{b}$ আকারে প্রদর্শিত রাশিকে **প্রথম শ্রেণীর ক্ষুদ্ররাশি** (Small quantity of the first order) বলা হয়; $\frac{a^2}{b^2}$ আকারে প্রকাশিত রাশিকে **দ্বিতীয় শ্রেণীর ক্ষুদ্ররাশি** (Small quantity of the second order) ইত্যাদি বলা হয়।

দ্রষ্টব্য : অনুপাতের আসন্ন মান নির্ণয় করিবার সময় প্রথম শ্রেণী অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর রাশিসমূহ সাধারণতঃ পরিত্যাগ করিতে হয়।

উদাহরণ 1. 11 : 10, অনুপাতটির উভয় রাশি হইতে কত বিয়োগ করিলে নব-গঠিত অনুপাতটি 7 : 5 হইবে ?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যা $= x$

$$\therefore \quad \frac{11-x}{10-x} = \frac{7}{5}$$

বা, $55-5x=70-7x$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $7x-5x=70-55$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $2x=15$ $\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা, $x=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$

উদাহরণ 2. $x+y : x-y$, $x^2+y^2 : (x+y)^2$ এবং $x(x^2-y^2)^2 : y(x^4-y^4)$ এই অনুপাত তিনটির মিশ্র অনুপাত কত ?

$$\text{নির্ণেয় মিশ্র অনুপাত}=\frac{x+y}{x-y}\times\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\times\frac{x(x^2-y^2)^2}{y(x^4-y^4)}$$

$$=\frac{x+y}{x-y}\times\frac{x^2+y^2}{(x+y)^2}\times\frac{x(x+y)^2(x-y)^2}{y(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{x}{y}=x:y$$

উদাহরণ 3. a এবং b ধনাত্মক হইলে $a^3+b^3 : a^2+b^2$ এবং $a^2+b^2 : a+b$ অনুপাত দুইটির মধ্যে কোন্‌টি বড় ?

$(a^3+b^3 : a^2+b^2)-(a^2+b^2 : a+b)=$ কত দেখা যাউক।

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}-\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a^3+b^3)-(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)(a+b)}$$

$$=\frac{ab^3+a^3b-2a^2b^2}{(a^2+b^2)(a+b)}=\frac{ab(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a+b)};$$

কিন্তু, কোন রাশির বর্গ কখনও ঋণাত্মক হইতে পারে না।

$\therefore$ $(a-b)^2$ সর্বদাই ধনাত্মক ; অতএব অনুপাতদ্বয়ের বিয়োগফলও ধনাত্মক।

$\therefore$ $\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}>\frac{a^2+b^2}{a+b}$, অর্থাৎ $(a^3+b^3 : a^2+b^2)>(a^2+b^2 : a+b)$.

উদাহরণ 4. 4 ও 5-এর দ্বৈত অনুপাত, $(x+6) : (x+15)$ অনুপাতটির সমান। x-এর মান নির্ণয় কর।

4 : 5-এর দ্বৈত অনুপাত $=4^2 : 5^2=16 : 25$

সর্তানুসারে, $\frac{x+6}{x+15}=\frac{16}{25}$

বা, $25x+150=16x+240$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $9x=90$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $x=\frac{90}{9}=10$

উদাহরণ 5. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 5 : 3 এবং উহাদের বর্গের অন্তর 64 হইলে সংখ্যা দুইটি কত ?

যেহেতু সংখ্যা দুইটির অনুপাত 5 : 3, সুতরাং মনে কর, সংখ্যাদ্বয় $=5x$ ও $3x$.

এখন, সর্তানুসারে, $(5x)^2-(3x)^2$

$$=(5x+3x)(5x-3x)$$

$$=8x.2x=16x^2$$

এখন, $16x^2=64$ বা, $x^2=\frac{64}{16}=4$ $\therefore$ $x=2$

সুতরাং সংখ্যা দুইটি $=5.2$ এবং 3.2 অর্থাৎ 10 ও 6

উদাহরণ 6. $a : b$ অনুপাতের প্রত্যেক পদ হইতে কত বিয়োগ করিলে নবগঠিত অনুপাতটি $c : d$ হইবে ?

মনে কর, নির্ণেয় রাশি $=x$.

$\therefore$ সর্তানুসারে, $a-x : b-x=c : d$

বা, $\frac{a-x}{b-x}=\frac{c}{d}$

বা, $ad-dx=bc-cx$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $cx-dx=bc-ad$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $x(c-d)=bc-ad$

বা, $x=\frac{bc-ad}{c-d}$ $\therefore$ নির্ণেয় রাশি, $x=\frac{bc-ad}{c-d}$

উদাহরণ 7. a-র তুলনায় b-এর মান অত্যন্ত ক্ষুদ্র হইলে প্রমাণ কর যে, $(a+b)^2 : b^2$-এর আসন্ন মান $=2a+b : b$.

এখন, $(a+b)^2 : b^2=\frac{(a+b)^2}{b^2}$

$$=\frac{a^2+2ab+b^2}{b^2}$$

$$=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}+1=\frac{2a}{b}+1$$

$$=\frac{2a+b}{b}=2a+b : b$$

[এস্থলে $\frac{a^2}{b^2}$ একটি দ্বিতীয় শ্রেণীর ক্ষুদ্ররাশি ; সুতরাং উহা পরিত্যাগ করা হইল।]

অনুসিদ্ধান্ত : (i) $(a+b)^3 : b^3$-এর আসন্নমান $=3a+b : b$.

(ii) $(a+b)^4 : b^4$-এর আসন্নমান $=4a+b : b$.

উদাহরণ 8. $5x-2y : 3x+4y=2 : 9$ হইলে, $x : y$ কত হইবে ?

এখন, $\dfrac{5x-2y}{3x+4y}=\dfrac{2}{9}$ বা, $9(5x-2y)=2(3x+4y)$

বা, $45x-6x=18y+8y$ বা, $39x=26y$

বা, $\dfrac{x}{y}=\dfrac{26}{39}=\dfrac{2}{3}$ $\quad x : y=2 : 3$

প্রশ্নমালা 34

1. নিম্নলিখিত অনুপাতদ্বয়ের মধ্যে বৃহত্তরটি নির্ণয় কর :

(*a*) $13 : 18$ এবং $6 : 11$ (*b*) $28 : 39$ এবং $49 : 65$

(*c*) $x+y : x-2y$ এবং $x+2y : x+3y$

(*d*) $a+b : b$ এবং $4a : a+b$

2. মিশ্র অনুপাত গঠন কর :

(*a*) $3 : 5, 7 : 9$ এবং $15 : 28$

(*b*) $x-y : x+y$ এবং $x(x+y) : y(x-y)$

(*c*) $a+b : a-b, a^2-b^2 : (a+b)^2$ এবং $(a^2-b^2)^2 : a^4-b^4$

(*d*) $x^2-9y^2 : x^2-y^2$ এবং $x^2+2xy-3y^2 : x^2-2xy-3y^2$

3. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের অনুপাত $1\frac{1}{2} : 2\frac{2}{3}$; কিন্তু উভয় সংখ্যার সহিত 15 যোগ করিলে অনুপাতটি $1\frac{2}{3} : 2\frac{1}{2}$ হয়।

4. $5 : 7$-এর দ্বৈত অনুপাত এবং $5 : 7$ ও $7 : 11$ দ্বারা গঠিত মিশ্র অনুপাত নির্ণয় কর।

5. $a : b$ অনুপাতটি $a+x : b+x$ অনুপাতের দ্বৈত অনুপাত হইলে x-এর মান নির্ণয় কর।

6. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে $x : y$ কত নির্ণয় কর :

(*a*) $2(2x-y)=\frac{3}{5}(x+2y)$ (*b*) $3x^2+2y^2=7xy$

7. A এবং B-এর বয়সের অনুপাত 2 : 3 ; 7 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত 3 : 4 হইবে। A এবং B-এর বর্তমান বয়স কত ?

8. 196-কে এমন দুইটি অংশে বিভক্ত কর যেন প্রথম অংশের $\frac{9}{10}$ এবং দ্বিতীয় অংশের $\frac{15}{8}$ পরস্পর সমান হয়।

9. দুইটি সংখ্যার সমষ্টি 180 এবং তাহাদের অনুপাত 2 : 3 হইলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

10. এমন দুইটি সংখ্যা নির্ণয় কর যাহাদের অন্তর 39 এবং অনুপাত 4 : 7.

11. দুইটি সংখ্যার অন্তর 44 এবং তাহাদের অনুপাত 13 : 17 হইলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

12. $a : b$ অনুপাতটির উভয় পদের সহিত কত যোগ করিলে নবগঠিত অনুপাত $x : y$ হইবে।

13. $m : n$ অনুপাতের উভয় পদ হইতে কত বিয়োগ করিলে অনুপাতটি $p : q$ হইবে ?

14. $a > b$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^2 - b^2 : a^2 + b^2 > a - b : a + b$.

15. প্রমাণ কর, $x^2 + y^2 : x + y < x^2 - y^2 : x - y$.

16. আসন্ন মান নির্ণয় কর : (i) $326^2 : 324^2$ (ii) $436^3 : 430^3$

17. $p - m : q - m$ অনুপাতটি $p : q$ অনুপাতের দ্বৈত অনুপাত হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{m} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

18. $x : y$ অনুপাতটি $a : b$ অনুপাতের দ্বৈত অনুপাত এবং $a : b$ অনুপাতটি $a + x : a - y$ অনুপাতের দ্বিভাজিত অনুপাত হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{2x}{a} = \frac{x - y}{y}$.

19. $a : b$ অনুপাতটির লঘিষ্ঠ আকার $x : y$ হইলে এবং $b > a$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x+1}{y+1} > \frac{a+1}{b+1}$.

20. $2a : 3b$ অনুপাতটির উভয় পদে কত যোগ করিলে নূতন অনুপাতটি $a : b$ হইবে ?

B. সমানুপাত :

যে সর্তদ্বারা দুই' অনুপাতের সমতা প্রতীয়মান হয়, তাহাকে **সমানুপাত** (Proportion) বলে এবং পরস্পর সম্বন্ধবিশিষ্ট রাশি চারিটিকে **সমানুপাতী** (Proportional) বলে।

যদি $a : b = c : d$ হয়, তবে a, b, c এবং d সকলেই সমানুপাতী। উক্ত সমানুপাতটিকে $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ অথবা $a : b :: c : d$—এরূপভাবেও লেখা যাইতে পারে।

উক্ত সমানুপাতে a ও d-কে **অন্ত্যরাশি** (Extremes) এবং b ও c-কে **মধ্যরাশি** (Means) বলে। d-কে আবার a, b এবং c-এর **চতুর্থ সমানুপাতী** (Fourth proportional) বলা হয়।

দ্রষ্টব্য : সমানুপাতী রাশিগুলি একজাতীয় না হইলেও চলে; কিন্তু প্রথম রাশিদ্বয় একজাতীয় এবং শেষ রাশিদ্বয়ও একজাতীয় হওয়া আবশ্যক।

ক্রমিক সমানুপাত :

তিন বা তদধিক রাশির মধ্যে প্রথম : দ্বিতীয় = দ্বিতীয় : তৃতীয় : তৃতীয় : চতুর্থ রাশি হইলে সমানুপাতটিকে **ক্রমিক সমানুপাত** (Continued proportion) বলে এবং রাশিগুলিকে তখন **ক্রমিক সমানুপাতী** বলে।

তিনটি রাশি a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, অর্থাৎ $a : b = b : c$ হইলে, b-কে a ও c-এর **মধ্য সমানুপাতী** (Mean proportional) এবং c-কে a ও b-এর **তৃতীয় সমানুপাতী** (Third proportional) বলে।

দ্রষ্টব্য : এস্থলে, রাশিগুলি একজাতীয় হওয়া বাঞ্ছনীয়।

সমানুপাত বিষয়ক উপপাদ্য :

উপপাদ্য 1. চারিটি রাশি সমানুপাতী হইলে উহার অন্ত্যরাশিদ্বয়ের গুণফল এবং মধ্যরাশিদ্বয়ের গুণফল পরস্পর সমান।

মনে কর, $a : b : c\ d$ একটি সমানুপাত; $\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

উভয়পক্ষকে, bd দ্বারা গুণ করিলে, $\frac{a}{b}\times bd=\frac{c}{d}\times bd \quad \therefore \quad ad=bc.$

[ইহাকেই **বজ্রগুণন** বলা হয়। ভগ্নাংশের সমীকরণ সমাধানে তোমরা বজ্রগুণন কাহাকে বলে শিখিয়াছ।]

উপপাদ্য 2. তিনটি রাশি ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, অন্তরাশি দুইটির গুণফল, মধ্যরাশিটির বর্গের সমান।

মনে কর, $a : b :: b : c$ একটি ক্রমিক সমানুপাত; $\quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

$\therefore \quad ac=b^2.$ [বজ্রগুণন করিয়া]

উপপাদ্য 3. তিনটি ক্রমিক সমানুপাতীর প্রথম ও তৃতীয়ের অনুপাত, প্রথম ও দ্বিতীয়ের দ্বৈত অনুপাতের সমান।

মনে কর, $a : b :: b : c$ একটি ক্রমিক সমানুপাত; $\quad \therefore \frac{a}{b}=\frac{b}{c}$

এখন, $\frac{a}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2} \qquad a : c=a^2 : b^2.$

উদাহরণ 1. $12m^3$, $9pm^2$ ও $8p^3m$-এর চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, চতুর্থ সমানুপাতী $=x$; $\quad \therefore \quad 12m^3 : 9pm^2 :: 8p^3m : x$

বা, $x=\frac{9pm^2\times 8p^3m}{12m^3}=6p^4$

$\therefore$ নির্ণেয় চতুর্থ সমানুপাতী $=6p^4$.

উদাহরণ 2. $4ab^2c^3$ এবং $9a^3b^2c$-এর মধ্য সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, মধ্য সমানুপাতী $=x$; $\quad \therefore \quad 4ab^2c^3 : x :: x : 9a^3b^2c$

$\therefore \quad x^2=4ab^2c^3\times 9a^3b^2c=36a^4b^4c^4$

বা, $x=\sqrt{36a^4b^4c^4}=6a^2b^2c^2$

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্য সমানুপাতী $=6a^2b^2c^2$

উদাহরণ 3. $3x$ এবং $5x^3$-এর তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর।

মনে কর, তৃতীয় সমানুপাতী $=a \quad \therefore \quad 3x : 5x^3 :: 5x^3 : a$

$\therefore \quad a \times 3x = 5x^3 \times 5x^3$ বা, $a = \dfrac{5x^3 \times 5x^3}{3x} = \frac{25}{3}x^5$

$\therefore$ নির্ণেয় তৃতীয় সমানুপাতী $= \frac{25}{3}x^5$

উদাহরণ 4. z এবং x রাশিদ্বয়ের মধ্য সমানুপাতী y হইলে, প্রমাণ কর যে, $xz + yz$ রাশিটি $x^2 + y^2$ এবং $y^2 + z^2$ রাশিদ্বয়ের মধ্য সমানুপাতী।

প্রশ্নানুসারে, $y^2 = zx$; $\therefore \quad (x^2 + y^2)(y^2 + z^2) = (x^2 + zx)(zx + z^2)$

$$= x^3z + x^2z^2 + x^2z^2 + xz^3$$

$$= zx(x^2 + 2zx + z^2) = zx(x + z)^2$$

$$= y^2(x + z)^2 = \{y(x + z)\}^2 = (xy + yz)^2$$

$\therefore \quad xz + yz$-রাশিটি $x^2 + y^2$ এবং $y^2 + z^2$ রাশিদ্বয়ের মধ্য সমানুপাতী।

উদাহরণ 5. 3, 4, 5 ও 7 রাশিগুলির প্রত্যেকের সহিত কত যোগ করিলে নূতন রাশিগুলি সমানুপাতী হইবে?

মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যা $= x$.

$\therefore \quad 3 + x : 4 + x = 5 + x : 7 + x$

বা, $\dfrac{3 + x}{4 + x} = \dfrac{5 + x}{7 + x}$

বা, $(3 + x)(7 + x) = (4 + x)(5 + x)$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $21 + 10x + x^2 = 20 + 9x + x^2$ বা, $10x - 9x = 20 - 21$

বা, $x = -1$ $\quad \therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= -1$

প্রশ্নমালা 35

1. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের চতুর্থ সমানুপাতী নির্ণয় কর :

(a) a^2b, b^2c, c^2a (b) $6ab, 12ac, 18bc$

(c) $\dfrac{m}{n}, \dfrac{m^2}{n}, \dfrac{m}{n^3}$ (d) $x^2yz, x^3y^2z^3, x^5yz^5$

2. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের তৃতীয় সমানুপাতী নির্ণয় কর :

(a) $x^3 + y^3 - xy(x + y), x^2 - y^2$ (b) $x^3 - y^3, (x - y)^2$

3. নিম্নলিখিত রাশিসমূহের মধ্যসমানুপাতী নির্ণয় কর :

(*a*) $3a, 27a^3$ (*b*) $6+3\sqrt{3}, 8-4\sqrt{3}$

4. 34, 50, 62 ও 94 হইতে কত বিয়োগ করিলে বিয়োগফলগুলি সমানুপাতী হইবে ?

5. a, b এবং c ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$a-2b+c=\frac{(a-b)^2}{\;}=\frac{(b-c)^2}{c}$$

6. যদি $x+y$ এবং $z+x$-এর মধ্য সমানুপাতী $y+z$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $y+z : z+x = z-x : x-y$

নানাবিধ সমানুপাত :

a, b, c ও d সমানুপাতী হইলে বিবিধ প্রক্রিয়াদ্বারা উহা হইতে নানাবিধ সমানুপাত নির্ণয় করা যাইতে পারে। বিবিধ প্রকার সমস্যা সমাধানের জন্য এই সমানুপাতগুলি বিশেষ প্রয়োজনীয়।

1. যদি $a : b = c : d$ হয়, তাহা হইলে $b : a = d : c$.

কারণ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\quad \therefore \quad 1\div\frac{a}{b}=1\div\frac{c}{d}$

$\therefore \quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ অর্থাৎ, $b : a = d : c$.

এই প্রক্রিয়াকে **বিপরীত** বা **ব্যস্ত প্রক্রিয়া** (Invertendo) বা

2. যদি $a : b = c : d$ হয়, তাহা হইলে $a : c = b : d$

কারণ, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $\quad \therefore \quad ad=bc$ (উপপাদ্য অনুসারে)

উভয় পক্ষকে cd দ্বারা ভাগ করিলে, $\frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd}$

$\therefore \quad \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ অর্থাৎ, $a : c = b : d$.

এই প্রক্রিয়াকে **একান্তর প্রক্রিয়া** (Alternando) বলে।

3. যদি $a : b = c : d$ হয়, তাহা হইলে $a+b : b = c+d : d$

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad\therefore\quad \frac{a}{b}+1 = \frac{c}{d}+1$

$\therefore\quad \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ অর্থাৎ, $a+b : b = c+d : d.$

এই প্রক্রিয়াকে **যোগ-প্রক্রিয়া** (Componendo) বলে।

4. যদি $a : b = c : d$ হয়, তাহা হইলে $a-b : b = c-d : d$

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\quad\therefore\quad \frac{a}{b}-1 = \frac{c}{d}-1$

$\therefore\quad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ অর্থাৎ, $a-b : b = c-d : d$

এই প্রক্রিয়াকে **ভাগ-প্রক্রিয়া** (Dividendo) বলে।

5. যদি $a : b = c : d$ হয়, তাহা হইলে $a : a-b = c : c-d$

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হইলে ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

$\therefore$ ব্যস্ত প্রক্রিয়া দ্বারা, $\frac{b}{a-b} = \frac{d}{c-d}.$

এখন, যেহেতু $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $\quad\therefore\quad \frac{b}{a-b} \times \frac{a}{b} = \frac{d}{c-d} \times \frac{c}{d}$

$\therefore\quad \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ অর্থাৎ, $a : a-b = c : c-d.$

এই প্রক্রিয়াকে **রূপান্তর-প্রক্রিয়া** (Convertendo) বলে।

6. যদি $a : b = c : d$ হয়, তাহা হইলে $a+b : a-b = c+d : c-d$

কারণ, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ হইলে যোগ প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \cdots$(i)

এবং ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \cdots$(ii)

(i)-কে (ii) দ্বারা ভাগ করিলে $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

অর্থাৎ, $a+b : a-b = c+d : c-d.$

এই প্রক্রিয়াকে **যোগ ও ভাগ-প্রক্রিয়া** (Componendo and Dividendo) বলে

একটি অত্যাবশ্যকীয় উপপাদ্য :

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ হইলে প্রমাণ কর, প্রত্যেকটি অনুপাত $=\left(\frac{pa^m+qc^m+re^m}{pb^m+qd^m+rf^m}\right)^{\frac{1}{m}}$

মনে কর, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k.$ $\quad\therefore\ a=bk,\ c=dk$ এবং $e=fk.$

এখন, $\left(\frac{pa^m+qc^m+re^m}{pb^m+qd^m+rf^m}\right)^{\frac{1}{m}}$

$$=\left(\frac{pb^mk^m+qd^mk^m+rf^mk^m}{pb^m+qd^m+rf^m}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$=\left\{\frac{k^m(pb^m+qd^m+rf^m)}{pb^m+qd^m+rf^m}\right\}^{\frac{1}{m}}=(k^m)^{\frac{1}{m}}=k.$$

কিন্তু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k.$ $\quad\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\left(\frac{pa^m+qc^m+re^m}{pb^m+qd^m+rf^m}\right)^{\frac{1}{m}}$ (প্রমাণিত)

অনুসিদ্ধান্ত : p, q, r, m প্রভৃতি রাশির বিশেষ বিশেষ মান ধরিলে উক্ত উপপাদ্য হইতে বিশেষ বিশেষ সিদ্ধান্তে উপস্থিত হওয়া যায় ; যথা,—

(a) $p=q=r=m=1$ হইলে, প্রতিটি অনুপাত $=\frac{a+c+e}{b+d+f}$ হইবে।

(b) $m=1$ হইলে, প্রতিটি অনুপাত $=\frac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$ হইবে।

(c) $p=m=1$ এবং $q=r=-1$ হইলে, প্রতিটি অনুপাত $=\frac{a-c-e}{b-d-f}$ হইবে।

উদাহরণ 1. $a:b=c:d$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$a^2+ab+b^2 : a^2-ab+b^2 :: c^2+cd+d^2 : c^2-cd+d^2.$

যেহেতু, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\quad\therefore$ মনে কর, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k.$ $\quad\therefore\ a=bk,\ c=dk.$

এখন, প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ $=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\frac{b^2k^2+b^2k+b^2}{b^2k^2-b^2k+b^2}$

$$=\frac{b^2(k^2+k+1)}{b^2(k^2-k+1)}=\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$$

আবার, প্রমাণিতব্যের দক্ষিণ পক্ষ $=\dfrac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}=\dfrac{d^2k^2+d^2k+d^2}{d^2k^2-d^2k+d^2}$

$$=\frac{d^2(k^2+k+1)}{d^2(k^2-k+1)}=\frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}.$$

$\therefore\quad \dfrac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}=\dfrac{c^2+cd+d^2}{c^2-cd+d^2}$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 2. $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$$

যেহেতু, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$, $\quad\therefore$ মনে কর, $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k.$

$$\therefore\quad x=ak,\ y=bk,\ z=ck.$$

এখন, প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ $=\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}$

$$=\frac{a^3k^3}{a^2}+\frac{b^3k^3}{b^2}+\frac{c^3k^3}{c^2}=k^3(a+b+c).$$

আবার, প্রমাণিতব্যের দক্ষিণ পক্ষ $=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}=\dfrac{(ak+bk+ck)^3}{(a+b+c)^2}$

$$=\frac{\{k(a+b+c)\}^3}{(a+b+c)^2}=k^3(a+b+c).$$

$\therefore$ উভয় পক্ষ সমান।

$\therefore\quad \dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{y^3}{b^2}+\dfrac{z^3}{c^2}=\dfrac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 3. a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3.$$

যেহেতু, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$; $\quad\therefore\quad b^2=ac.$

এখন, প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ$=a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$

$$a^3c^3\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=\frac{a^3c^3}{a^3}+\frac{a^3c^3}{b^3}+\frac{a^3c^3}{c^3}$$

$$=c^3+\frac{b^6}{b^3}+a^3 \quad [\because \ ac=b^2, \quad \therefore \quad a^3c^3=b^6]$$

$=a^3+b^3+c^3=$প্রমাণিতব্যের দক্ষিণ পক্ষ।

$\therefore \ a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 4. যদি $\frac{x}{a+b-c}=\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}$ হয়,

প্রমাণ কর যে, প্রতিটি অনুপাত$=\frac{x+y+z}{a+b+c}$.

যেহেতু, $\frac{x}{a+b-c}=\frac{y}{b+c-a}=\frac{z}{c+a-b}$;

$\therefore$ ইহাদের প্রত্যেকটি$=\frac{x+y+z}{(a+b-c)+(b+c-a)+(c+a-b)}$

$=\frac{x+y+z}{a+b+c}$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 5. যদি $(b+c-a)x=(c+a-b)y=(a+b-c)z=2$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=abc$

[W. B. S. B. 1954]

যেহেতু, $(b+c-a)x=(c+a-b)y=(a+b-c)z=2$,

$\therefore \quad x=\frac{2}{b+c-a}, \ y=\frac{2}{c+a-b}$ এবং $z=\frac{2}{a+b-c}$

$\frac{1}{x}=\frac{b+c-a}{2}, \ \frac{1}{y}=\frac{c+a-b}{2}$ এবং $\frac{1}{z}=\frac{a+b-c}{2}$

এখন প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ

$$=\left(\frac{c+a-b}{2}+\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}+\frac{b+c-a}{2}\right)$$
$$\left(\frac{b+c-a}{2}+\frac{c+a-b}{2}\right)$$

$=\frac{2a}{2}\cdot\frac{2b}{2}\cdot\frac{2c}{2}=abc=$ প্রমাণিতব্যের দক্ষিণ পক্ষ।

$\therefore\quad \left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=abc$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 6. যদি $\frac{a}{y-z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a(b-c)}{y^2+z^2}=\frac{b(c-a)}{z^2-x^2}=\frac{c(a-b)}{x^2-y^2}$$

মনে কর, $\frac{a}{y+z}=\frac{b}{z+x}=\frac{c}{x+y}=k$

$\therefore\quad a=k(y+z),\ b=k(z+x)$ এবং $c=k(x+y)$

$\therefore\quad a-b=k(y-x),\ b-c=k(z-y)$ এবং $c-a=k(x-z)$

সুতরাং, $\frac{a(b-c)}{y^2-z^2}=\frac{k(y+z).\,k(z-y)}{(y+z)(y-z)}=-k^2.$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, প্রতিটি অনুপাত $=-k^2$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত পরস্পর সমান।

উদাহরণ 7. যদি $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ হয়,

প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$ [W. B. S. B. 1952]

মনে কর, $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}=k$

এখন, $ay-bx=ck,\quad \therefore\ c(ay-bx)=c^2k \quad \cdots \quad$ (i)

$cx-az=bk,\quad \therefore\ b(cx-az)=b^2k \quad \cdots \quad$ (ii)

$bz-cy=ak,\quad \therefore\ a(bz-cy)=a^2k \quad \cdots \quad$ (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) যোগ করিলে, $k(a^2+b^2+c^2)=0 \quad \therefore\ k=0$

$\therefore \dfrac{ay-bx}{c}=0$ বা, $ay=bx \quad \therefore \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$

আবার, $\dfrac{cx-az}{b}=0, \quad \therefore \; cx=az \quad \therefore \dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}$

$$\therefore \; \frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$$ (প্রমাণিত)

উদাহরণ 8. যদি $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$ হয়, প্রমাণ কর যে, প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{1}{2}$ অথবা -1.

যেহেতু, $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{c}{a+b}$;

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত $=\dfrac{a+b+c}{(b+c)+(c+a)+(a+b)}=\dfrac{a+b+c}{2(a+b+c)}=\dfrac{1}{2}$

আবার, $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}=\dfrac{-b}{-(c+a)}$

$$\therefore \; \frac{a}{b+c}=\frac{a-b}{(b+c)-(c+a)}=\frac{a-b}{-(a-b)}=-1$$

$\therefore$ প্রত্যেকটি অনুপাত $=\frac{1}{2}$ আবার -1 (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 9. যদি $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$
$=(a+b-c-d)(a-b+c-d)$ হয়, প্রমাণ কর যে, $a:b=c:d$

প্রদত্ত সর্ত হইতে পাওয়া যায়, $\dfrac{a+b+c+d}{a+b-c-d}=\dfrac{a-b+c-d}{a-b-c+d}$

বা, $\dfrac{(a+b)+(c+d)}{(a+b)-(c+d)}=\dfrac{(a-b)+(c-d)}{(a-b)-(c-d)}$

বা, $\dfrac{a+b}{c+d}=\dfrac{a+b}{c-d}$ [যোগ ও ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$ [একান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ [পুনরায় যোগ ও ভাগ-প্রক্রিয়া দ্বারা]

অর্থাৎ, $a:b=c:d$ (প্রমাণিত)।

উদাহরণ 10. যদি $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}$ হয়, প্রমাণ কর যে,

হয় $a=c$, নতুবা $a+b+c+d=0$

যেহেতু, $\frac{a+b}{b+c}=\frac{c+d}{d+a}$, $\therefore$ $\frac{a+b}{c+d}=\frac{b+c}{d+a}$ [একান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $\frac{a+b+c+d}{c+d}=\frac{b+c+d+a}{d+a}$ [যোগ-প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+d}\right)=0$

দুইটি রাশির গুণফল 0 হইলে একটি রাশি অবশ্য 0 হইবে।

$\therefore$ হয়, $a+b+c+d=0$ (প্রমাণিত)।

অথবা, $\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+d}=0$ বা, $\frac{1}{c+d}=\frac{1}{a+d}$

বা, $a+d=c+d$ $\therefore$ $a=c$ (প্রমাণিত)।

প্রশ্নমালা 36

$a:b::c:d$ হইলে প্রমাণ কর যে :

1. $ac:bd=4a^2+5c^2:4b^2+5d^2$ [C. U. 1949]
2. $a^2+b^2:a^2-b^2=c^2+d^2:c^2-d^2$ [C. U. 1939 (Suppl.)]
3. $a^2+c^2:b^2+d^2=(a+c)c:(b+d)d$ [C. U. 1937]
4. $ma-nb:a+b=mc-nd:c+d$
5. $(a^2+c^2)(b^2+d^2)=(ab+cd)^2$ [E. B. S. B. 1955]
6. $\sqrt{a^2+c^2}:\sqrt{b^2+d^2}=ma+nc:mb+nd$

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ হইলে প্রমাণ কর যে :

7. $4(a+b)(c+d)=bd\left(\frac{a+b}{b}+\frac{c+d}{d}\right)^2$
8. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2:(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2=a-b:c-d$
9. $\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}=\frac{ce}{df}$
10. $\left(\frac{2a+3c+5e}{2b+3d+5f}\right)^3=\frac{ace}{bdf}$

11. $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2)=(ab+cd+ef)^2$ [W. B. S. B. 1953]

12. $\frac{a}{b}=\left(\frac{a^2+c^2+e^2}{b^2+d^2+f^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ [C. U. 1930]

$a : b=c : d=e : f$ হইলে, প্রমাণ কর যে, উহাদের প্রত্যেকে নিম্নলিখিত অনুপাতগুলির সমান :

13. $ka+lc+me : kb+ld+mf$

14. $\sqrt[3]{(a^3+c^3+e^3)} : \sqrt[3]{(b^3+d^3+f^3)}$

যদি a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হয়, প্রমাণ কর যে :

15. $a^2+ab+b^2 : b^2+bc+c^2=a : c$ [C. U. 1948]

16. $a_2+b^2 : ab+bc=ab+bc : b^2+c^2$ [G. U. 1953]

17. $(a+b+c)^2 : (a^2+b^2+c^2)=(a+b+c) : (a-b+c)$

18. $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$ [W. B. S. B. 1957]

19. $abc(a+b+c)^3=(bc+ca+ab)^3$ [W. B. S. B. 1954 (Comp.)]

যদি $a : b=b : c=c : d$ হয়, প্রমাণ কর যে :

20. $(a+b)(c+d)=(b+c)^2$ [W. B. S. B. 1958 (Suppl.)]

21. $a+b : c+d=a^2+b^2+c^2 : b^2+c^2+d^2$ [D. B. 1949]

22. $(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2=(a-d)^2$ [G. U. 1951]

23. $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(b^2-c^2)^2$ [C. U. 1943]

24. $(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$

25. যদি $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $(x^2+y^2)(a^2+b^2)=(ax+by)^2$

26. $\frac{a+3b}{a-4b}=\frac{c+3d}{c-4d}$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

27. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{x^3+y^3+z^3}{a^3+b^3+c^3}=\frac{xyz}{abc}$.

[W. B. S. B. 1955]

28. $\frac{x}{y}=\frac{y}{z}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{xyz(x+y+z)^3}{(xy+yz+zx)^3}=1$

29. যদি $x(b+c-a)=y(c+a-b)=z(a+b-c)=t(a+b+c)$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{t}$. [G. U. 1950]

30. যদি $\frac{x}{b+c-a}=\frac{y}{c+a-b}=\frac{z}{a+b-c}$ হয় তাহা হইলে $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z$-এর মান কত ? [C. U. 1948]

31. $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$\frac{a}{y+z-x}=\frac{b}{z+x-y}=\frac{c}{x+y-z}$. [Nag. U. 1946]

32. যদি $\frac{x}{b-c}=\frac{y}{c-a}=\frac{z}{a-b}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x+y+z=0$.

33. $\frac{bz+cy}{b-c}=\frac{cx+az}{c-a}=\frac{ay+bx}{a-b}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$. [C. U. 1935]

34. যদি $(x^2+y^2)(a^2+b^2)-(ax+by)^2=0$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}$. [W. B. S. B. 1954 (Suppl.)]

35. যদি $a^2+b^2 : ab=a+c : b$ হয়, প্রমাণ কর যে, b, a এবং c-এর মধ্য সমানুপাতী হইবে।

36. যদি $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a+b+c=0$, অথবা $a=b=c$.

37. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c}{d}$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{a^2+ab}{ab-b^2}=\frac{c^2+cd}{cd-d^2}$.
[W. B. S. B. 1956]

38. যদি $x=\frac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ হয়, তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে,
$bx^2-2abx+b=0$.

39. যদি $\frac{}{(b-c)(b+c-2a)}=\frac{y}{(c-a)(c+a-2b)}$

$=\frac{z}{(a-b)(a+b-2c)}$ হয়, তাহা হইলে $x+y+z$ কত হইবে ?

40. যদি $x : ax+by+cz=y : bx+cy+az=z : cx+ay+bz$ হয় এবং $(x+y+z)$-এর মান 0 না হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, প্রতিটি অনুপাত $=\frac{1}{a+b+c}$.

C. সমীকরণ ও সমানুপাত :

সমানুপাত-সম্বন্ধীয় নানাবিধ প্রক্রিয়ার প্রয়োগে বিভিন্ন প্রকার সমীকরণের সমাধান সহজসাধ্য হয়। নিম্নে কয়েকটি উদাহরণ দেওয়া হইল।

উদাহরণ 1. সমাধান কর : $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+4)(x+5)}=\frac{x+5}{x+9}$

$$\frac{(x+2)(x+3)}{(x+4)(x+5)}=\frac{x+5}{x+9}$$

বা, $\frac{x^2+5x+6}{x^2+9x+20}=\frac{x+5}{x+9}$

বা, $\frac{x^2+5x+6}{x+5}=\frac{x^2+9x+20}{x+9}$ [একান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা]

বা, $x+\frac{6}{x+5}=x+\frac{20}{x+9}$

বা, $\frac{6}{x+5}=\frac{20}{x+9}$

বা, $6x+54=20x+100$ [বজ্রগুণন দ্বারা]

বা, $14x=-46$

বা, $x=\frac{-46}{14}$ বা $-3\frac{2}{7}$

$\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=-3\frac{2}{7}$.

উদাহরণ 2. সমাধান কর : $\left(\frac{2x-10}{2x-5}\right)^2=\frac{x-10}{x-5}$ [C. U. 1941]

$$\left(\frac{2x-10}{2x-5}\right)^2=\frac{x-10}{x-5}$$

বা, $\frac{4x^2-40x+100}{4x^2-20x+25}=\frac{x-10}{x-5}$

বা, $\frac{4x^2-40x+100}{x-10}=\frac{4x^2-20x+25}{x-5}$ [একান্তর প্রক্রিয়া]

বা, $4x+\frac{100}{x-10}=4x+\frac{25}{x-5}$ [লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $\frac{100}{x-10}=\frac{25}{x-5}$ [উভয় পক্ষ হইতে $4x$ বিয়োগ করিয়া]

বা, $\frac{4}{x-10}=\frac{1}{x-5}$ [উভয় পক্ষকে 25 দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $4x-20=x-10$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $4x-x=20-10$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $3x=10$

বা, $x=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$ ∴ নির্ণেয় বীজ, $x=3\frac{1}{3}$.

উদাহরণ 3. সমাধান কর : $\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^3=\frac{x+1}{x+4}$

$$\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^3=\frac{x+1}{x+4}$$

বা, $\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2\cdot\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+1}{x+4}$

বা, $\left(\frac{x+2}{x+3}\right)^2=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)(x+4)}$

বা, $\frac{x^2+4x+4}{x^2+6x+9}=\frac{x^2+4x+3}{x^2+6x+8}$

বা, $\frac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}=\frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+8}$ [একান্তর প্রক্রিয়া]

বা, $1+\frac{1}{x^2+4x+3}=1+\frac{1}{x^2+6x+8}$ [লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $\frac{1}{x^2+4x+3}=\frac{1}{x^2+6x+8}$ [উভয়পক্ষ হইতে 1 বিয়োগ করিয়া]

বা, $x^2+6x+8=x^2+4x+3$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $x^2+6x-x^2-4x=3-8$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $2x=-5$

বা, $x=-\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}$ $\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=-2\frac{1}{2}$.

উদাহরণ 4. সমাধান কর : $\frac{x-3}{x-4}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-5}{x-6}$

$\frac{x-3}{x-4}+\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-5}{x-6}$

বা, $1+\frac{1}{x-4}+1+\frac{1}{x-7}=1+\frac{1}{x-5}+1+\frac{1}{x-6}$

[লবকে হর দ্বারা ভাগ করিয়া]

বা, $\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-5}+\frac{1}{x-6}$ [উভয়পক্ষ হইতে 2 বিয়োগ করিয়া]

বা, $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x-7}$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $\frac{-1}{(x-4)(x-5)}=\frac{-1}{(x-6)(x+7)}$

বা, $-x^2+9x-20=-x^2+13x-42$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $x^2-x^2+9x-13x=20-42$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $-4x=-22$

বা, $x=\frac{-22}{-4}=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$ $\therefore$ নির্ণেয় বীজ, $x=5\frac{1}{2}$.

[এস্থলে লবকে হর দ্বারা ভাগ করায় অঙ্কটি খুব সহজেই সমাধান করা গিয়াছে।]

প্রশ্নমালা 37

সমাধান কর :

1. $\frac{x-2}{x-3}+\frac{x-3}{x-4}=\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-4}{x-5}$

2. $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-5}{x-6}=\frac{x-4}{x-5}+\frac{x-2}{x-3}$ [B. U. 1922]

3. $\frac{x+8}{x+9}+\frac{x+4}{x+5}=\frac{x+9}{x+10}+\frac{x+3}{x+4}$

4 $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$ [Nag. U. 1947]

5. $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2=\frac{x+2}{x+4}$ $\left(\frac{x+3}{x+4}\right)^3=\frac{x+2}{x+5}$

7. $\frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+7)}=\frac{x+5}{x+8}$ 8. $\frac{(x+2)(x+6)}{(x+4)(x+5)}=\frac{x+8}{x+9}$

9. $\frac{2x^2-7x+1}{2x-7}+\frac{4x^2-8x+1}{2x-4}=\frac{4x^2-10x+1}{2x-5}+\frac{2x^2-[illegible]x+1}{2x-6}$

10. $\frac{4x^2+7}{2x-1}+\frac{6x^2-8x+11}{3x-1}=\frac{4x^2+3x+6}{x+1}$

D. অনুপাত ও সমানুপাত-ঘটিত প্রশ্নাবলী :

অনুপাত ও সমানুপাতঘটিত প্রশ্নাবলীর সমাধান কি প্রকারে করিতে হয়, নিম্নের উদাহরণগুলি হইতে তাহা বুঝিতে পারিবে।

উদাহরণ 1. দুই অঙ্কবিশিষ্ট দুইটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের একটি অপরটির বিপরীত এবং সংখ্যা দুইটির অনুপাত 4 : 7 ; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর। [P. U. 1896]

মনে কর, অঙ্কদ্বয় x এবং y ;

∴ তাহাদের দ্বারা গঠিত সংখ্যাদ্বয় হইতেছে $10x+y$ এবং $10y+x$

সর্তানুসারে, $10x+y : 10y+x=4:7$

বা, $\frac{10x+y}{10y+x}=\frac{4}{7}$

বা, $7(10x+y)=4(10y+x)$ [বজ্রগুণন করিয়া]

বা, $70x+7y=40y+4x$

বা, $70x-4x=40y-7y$ [পক্ষান্তর করিয়া]

বা, $66x=33y$

বা, $\frac{x}{y}=\frac{1}{2}$ $x:y=1:2$

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, একটি অঙ্ক অপরটির দ্বিগুণ। এইরূপ চারি জোড়া অঙ্ক হইতে পারে ; যেমন, 1, 2 ; 2, 4 ; 3, 6 ; 4, 8.

∴ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 12 এবং 21, বা 24 এবং 42 ; বা 36 এবং 63, বা 48 এবং 84.

উদাহরণ 2. A এবং B-এর বয়সের অনুপাত 9 : 10 এবং 20 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত ছিল 4 : 5 ; তাহাদের বর্তমান বয়স কত ?

মনে কর, A এবং B-এর বর্তমান বয়স যথাক্রমে $9x$ বৎসর এবং $10x$ বৎসর ; সুতরাং 20 বৎসর পূর্বে A এবং B-এর বয়স ছিল যথাক্রমে $(9x-20)$ বৎসর এবং $(10x-20)$ বৎসর। ∴ সর্তানুসারে, $9x-20 : 10x-20 = 4 : 5$

বা, $\dfrac{9x-20}{10x-20}=\dfrac{4}{5}$

বা, $45x-100=40x-80$

বা, $5x=20$ ∴ $x=4$

∴ $9x=9\times4=36$ এবং $10x=10\times4=40$

∴ A-র বর্তমান বয়স 36 বৎসর এবং B-এর বর্তমান বয়স = 40 বৎসর।

উদাহরণ 3. একটি পাত্রে দুধ ও জলের অনুপাত ছিল 9 : 1 ; উহাতে 4 লিটার জল মিশাইলে দুধ ও জলের অনুপাত হইবে 6 : 1. ঐ পাত্রে দুধের পরিমাণ কত ছিল ?

মনে কর, ঐ পাত্রে জল ও দুধের পরিমাণ ছিল যথাক্রমে x লিটার এবং $9x$ লিটার। পাত্রে 4 লিটার জল মিশাইলে জলের পরিমাণ হইবে $(x+4)$ লিটার।

∴ সর্তানুসারে, $9x : x+4 = 6 : 1$

বা, $\dfrac{9x}{x+4}=\dfrac{6}{1}$

বা, $9x=6x+24$

বা, $3x=24$ ∴ $x=8$

∴ ঐ পাত্রে দুধের পরিমাণ ছিল $9x$ বা 9×8 বা 72 লিটার।

উদাহরণ 4. দুইটি সমান পাত্রে মদ্য এবং জল মিশ্রিত আছে; মদ্য ও জলের পরিমাণের অনুপাত যথাক্রমে $5 : 1$ এবং $4 : 1$; প্রথম পাত্রের জলমিশ্রিত মদ্যের সহিত দ্বিতীয় পাত্রের জলমিশ্রিত মদ্য মিশ্রিত করিলে মদ্য ও জলের পরিমাণের অনুপাত কত হইবে ?

মনে কর, প্রত্যেক পাত্রে x লিটার জল-মিশ্রিত মদ্য আছে।

$\therefore$ প্রশ্নানুযায়ী, প্রথম পাত্রে $\frac{5}{5+1}x$ লিটার মদ্য এবং $\frac{1}{5+1}x$ লিটার জল আছে।

তদ্রূপ, দ্বিতীয় পাত্রে $\frac{4}{4+1}x$ লিটার মদ্য এবং $\frac{1}{4+1}x$ লিটার জল আছে।

উভয় পাত্রের পদার্থ একত্র মিশ্রিত করিলে, উক্ত মিশ্রণে $\left(\frac{5}{5+1}+\frac{4}{4+1}\right)x$ লিটার মদ্য এবং $\left(\frac{1}{5+1}+\frac{1}{4+1}\right)x$ লিটার জল থাকিবে।

$\therefore$ উক্ত মিশ্রণে মদ্য : জল $=\left(\frac{5}{5+1}+\frac{4}{4+1}\right) : \left(\frac{1}{5+1}+\frac{1}{4+1}\right)$

$$=\left(\frac{5}{6}+\frac{4}{5}\right) : \left(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{49}{30} : \frac{11}{30}=49 : 11$$

$\therefore$ মদ্য ও জলের নির্ণেয় অনুপাত $= 49 : 11$

উদাহরণ 5. প্রতি কিলোগ্রাম 6 টাকা দরের চা-এর সহিত প্রতি কিলোগ্রাম 8 টাকা দরের চা কি অনুপাতে মিশ্রিত করিয়া মিশ্রিত চা প্রতি কিলোগ্রাম টা. 8·50 দরে বিক্রয় করিলে 30% লাভ হইবে।

টা. $8{\cdot}50 = 8\frac{1}{2}$ টাকা $=\frac{17}{2}$ টাকা।

মনে কর, মিশ্রিত চা-এর অনুপাত,

প্রথম প্রকার : দ্বিতীয় প্রকার $= x : y$.

এখন 6 টাকা কিলোগ্রাম দরের x কিলোগ্রাম এবং 8 টাকা কিলোগ্রাম দরের y কিলোগ্রাম চা-এর মোট মূল্য $=(6x+8y)$ টাকা; আবার $\frac{17}{2}$ টাকা কিলোগ্রাম দরে সমস্ত চা-এর বিক্রয়মূল্য $=\frac{17}{2}(x+y)$ টাকা।

সর্তানুসারে, $(6x+8y)\times\frac{130}{100}=\frac{17}{2}(x+y)$

বা, $6x+8y=\frac{17}{2}(x+y)\times\frac{100}{130}$

বা, $6x+8y=\frac{85}{13}x+\frac{85}{13}y$

বা, $6x-\frac{85}{13}x=\frac{85}{13}y-8y$

বা, $7x=19y \quad \therefore \quad \frac{x}{y}=\frac{19}{7}$

নির্ণেয় অনুপাত, প্রথম প্রকার : দ্বিতীয় প্রকার = 19 : 7

প্রশ্নমালা 38

1. 39-কে এমন দুই ভাগে বিভক্ত কর যেন বৃহত্তর সংখ্যাটির সহিত 6 যোগ করিলে এবং ক্ষুদ্রতর সংখ্যাটি হইতে 3 বিয়োগ করিলে উহাদের অনুপাত 5 : 2 হয়।

2. A এবং B-এর বয়সের অনুপাত 8 : 7 ; 27 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত 5 : 4 ছিল। উভয়ের বর্তমান বয়স নির্ণয় কর।

3. 12 বৎসর পূর্বে A ও B-এর বয়সের অনুপাত ছিল 3 : 4 ; 12 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত হইবে 5 : 6. বর্তমানে কাহার কত বয়স ?

4. এক কিলোগ্রাম জল-মিশ্রিত দুধের মধ্যে দুধ ও জলের অনুপাত 4 : 1 ; ঐ দুধে আর কত জল মিশাইলে অনুপাত 8 : 3 হইবে ?

5. A, B ও C তিন ব্যক্তির মাসিক বেতন যথাক্রমে 150 টাকা, 200 টাকা এবং 250 টাকা। A, B ও C যদি প্রতি মাসে যথাক্রমে টা. 87·50, টা. 112·50 এবং টা. 156·25 ব্যয় করে, তবে তুলনায় তাহাদের মধ্যে কে বেশী অমিতব্যয়ী ?

6. দুইটি সৈন্যদলে যথাক্রমে 11000 ও 7000 সৈন্য আছে। যুদ্ধ করিবার পূর্বে প্রত্যেক দলে আরও 1000 সৈন্য যোগদান করিল। কোন্ দলের সৈন্য অনুপাত হিসাবে অধিক বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইল ?

7. দুইটি পাত্রে জল-মিশ্রিত দুধ আছে। প্রথম পাত্রে দুধের পরিমাণ জলের $\frac{3}{4}$ অংশ এবং দ্বিতীয় পাত্রে দুধের পরিমাণ জলের $\frac{4}{5}$ অংশ। প্রত্যেক পাত্র হইতে

কি পরিমাণ জল মিশ্রিত দুধ লইয়া মিশ্রিত করিলে মিশ্রণের 56 লিটারে দুধ ও জলের পরিমাণ সমান হইবে ?

9. একটি পাত্রে 60% মদ্য এবং অবশিষ্ট জল আছে। অপর একটি তুল্য পাত্রে 85% মদ্য এবং অবশিষ্ট জল আছে। কি অনুপাতে এই দুইটি পাত্রের মদ্য ও জল মিশ্রিত করিলে মিশ্রিত মদ্যে 30% জল থাকিবে ?

8. এক গোয়ালা দুধ কিনিয়া তাহাতে জল মিশাইল। যে দরে সে প্রতি লিটার দুধ কিনিয়াছিল, সেই দরে সে জল-মিশ্রিত দুধ বিক্রয় করাতে তাহার 25% লাভ হইল। জল-মিশ্রিত দুধে দুধ ও জলের অনুপাত কত ?

10. এক ব্যক্তি প্রতি কিলোগ্রাম 6 টাকা দরের কিছু চা-এর সহিত প্রতি কিলোগ্রাম টা. 7·20 দরের কিছু চা মিশ্রিত করিল। মিশ্রিত চা-এর প্রতি কিলোগ্রাম টা. 7·80 দরে বিক্রয় করাতে তাহার 17% লাভ হইল। কি অনুপাতে সে দুই প্রকারের চা মিশাইয়াছিল ?

তৃতীয় অধ্যায়

লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণের সমাধান

(Graphical Solution of Equations)

প্রথম মানের সমীকরণের লেখচিত্রের অঙ্কন পদ্ধতি পূর্বে আলোচিত হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে লেখচিত্রের সাহায্যে সমীকরণের সমাধান-পদ্ধতি আলোচিত হইবে।

লেখচিত্রের সাহায্যে সরল সমীকরণের সমাধান :

A. $2x+6=0$,—ইহা একটি অজ্ঞাত রাশিবিশিষ্ট সরল সমীকরণ। লেখচিত্র-সাহায্যে এই সমীকরণটির সমাধান করিতে হইলে, $y=2x+6$, এই সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করিতে হইবে। ঐ লেখচিত্রটি X-অক্ষরেখাকে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে, তাহার ভুজই উক্ত সমীকরণের নির্ণেয় বীজ।

উদাহরণ 1. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর :

$$2x+6=0$$

মনে কর, $y=2x+6$

সমীকরণ হইতে নিম্নের ছকটি পাওয়া যায় :—

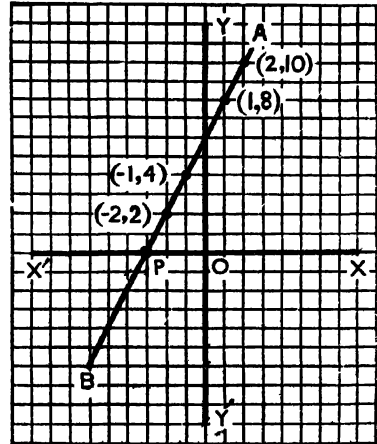
যখন $x=$	1	2	-1	-2
তখন $y=$	8	10	4	2

মনে কর, XOX' এবং YOY' অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের একটি বাহুকে একক ধরিয়া তালিকা হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর স্থানাঙ্কগুলি ছক কাগজে সংস্থাপিত করিলাম। উক্ত বিন্দুগুলি যোগ করিয়া AB একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। ইহাই প্রদত্ত সমীকরণের লেখচিত্র।

মনে কর, AB সরলরেখাটি X-অক্ষরেখাকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। সুতরাং OP-এর পরিমাণ হইতেই সমীকরণটির বীজ নির্ণীত হইবে; কারণ X-অক্ষ-রেখার উপর $y=0$.

গণনা দ্বারা দেখা যায়, $OP=3$ এবং উহা মূলবিন্দুর বামদিকে আছে।

$\therefore\ x=-3$; এবং ইহাই সমীকরণটির নির্ণেয় বীজ।

B. সমীকরণের উভয় পক্ষেই অজ্ঞাতরাশি x থাকিলে, যথা, $x+\frac{1}{2}=\frac{x}{3}-\frac{5}{2}$ হইলে, উভয় পার্শ্বস্থ রাশির লেখচিত্র দুইটি একই অক্ষ এবং একই একক ধরিয়া পৃথক পৃথক ভাবে অঙ্কিত করিতে হইবে এবং ঐ লেখচিত্রদ্বয়ের ছেদবিন্দুর ভুজই উক্ত সমীকরণের নির্ণেয় বীজ হইবে।

উদাহরণ 2. লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর :

$$x+\frac{1}{2}=\frac{x}{3}+\frac{5}{2}.$$

মনে কর, উভয় পক্ষই y-এর সমান। অতএব দুইটি সমীকরণ পাওয়া গেল

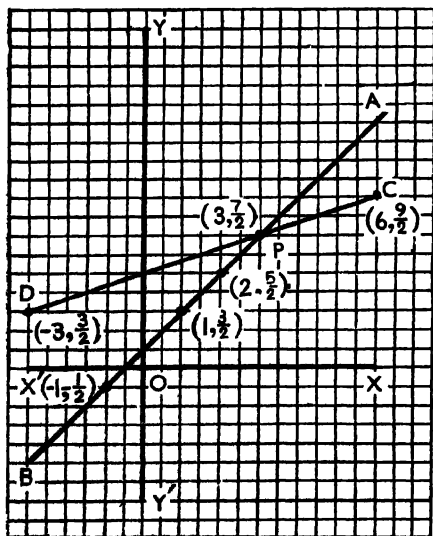
$$y=x+\frac{1}{2} \quad \text{(i) এবং } y=\frac{x}{3}+\frac{5}{2} \quad \cdots\text{(ii)}$$

(i) হইতে পাওয়া যায় :-

যখন $x=$	1	2	-1
তখন $y=$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$

(ii) হইতে পাওয়া যায় :—

যখন $x=$	3	-3	6
তখন $y=$	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{2}$

মনে কর, XOX′ এবং YOY′ অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের দুইটি বাহুকে একক ধরিয়া (i) সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর স্থানাঙ্কগুলি ছক-কাগজে সংস্থাপিত কর। উক্ত বিন্দুগুলি যোগ করিয়া AB একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। ইহাই (i) সমীকরণের লেখচিত্র।

পুনরায়, একই অক্ষদ্বয় এবং একই একক ধরিয়া (ii) সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর স্থানাঙ্কগুলি ছক-কাগজে সংস্থাপিত কর। উক্ত বিন্দুগুলি যোগ করিয়া CD একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। ইহাই (ii) সমীকরণের লেখচিত্র।

মনে কর, সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ইহার ভুজই প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় বীজ।

ক্ষুদ্রবর্গের দুইটি বাহুকে একক ধরা হইয়াছে। সুতরাং P বিন্দুর ভুজ $=3$; অতএব প্রদত্ত সমীকরণের নির্ণেয় বীজ, $x=3$

(*a*) একটি সমীকরণ সমাধান করিতে দুইটি লেখচিত্র অঙ্কন করিবার প্রয়োজন হইলে, লেখচিত্র দুইটির একই অক্ষ এবং একই একক ব্যবহার করিয়া অঙ্কন করিতে হয়।

পূর্ববর্তী লেখচিত্র দুইটিতে স্থানাঙ্ক গণনার সুবিধার জন্য দুইটি ক্ষুদ্র বর্গের বাহুকে একক ধরা হইয়াছে।

(*b*) প্রদত্ত সমীকরণটি, $y=mx+c$ আকারে পরিণত করিয়াও সমাধান করা যাইতে পারে। এই প্রকারের সমাধান-পদ্ধতি হইতে তোমরা সহসমীকরণের সমাধান প্রণালীর তত্ত্বটি বোধ হয় বুঝিতে পারিয়াছ।

সহসমীকরণের সমাধান প্রণালী :

মনে কর, $\left.\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right\}$ একটি সহসমীকরণ।

এই সমীকরণটি সমাধান করিতে হইলে পূর্বের ন্যায় একই অক্ষদ্বয় ও একই একক ধরিয়া পৃথকভাবে উভয় সমীকরণের দুইটি লেখচিত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

এক্ষণে, প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণের মধ্যে x এবং y-এর সাধারণ মানযুক্ত যে বিন্দু রহিয়াছে, উক্ত বিন্দুতেই উভয় লেখচিত্র পরস্পরকে ছেদ করিবে। সুতরাং ঐ বিন্দুর ভুজ-কোটিই সহসমীকরণটির নির্ণেয় দুইটি বীজ।

উদাহরণ 1. লেখচিত্র সাহায্যে সমাধান কর :

$$\left.\begin{array}{l} x-y=3\cdots\cdots(\text{i}) \\ 3x+2y=14\cdots(\text{ii}) \end{array}\right\}$$

(i) হইতে, $-y=3-x$ বা, $y=x-3$

এবং (ii) হইতে, $2y=14-3x$ বা, $y=\dfrac{14-3x}{2}$

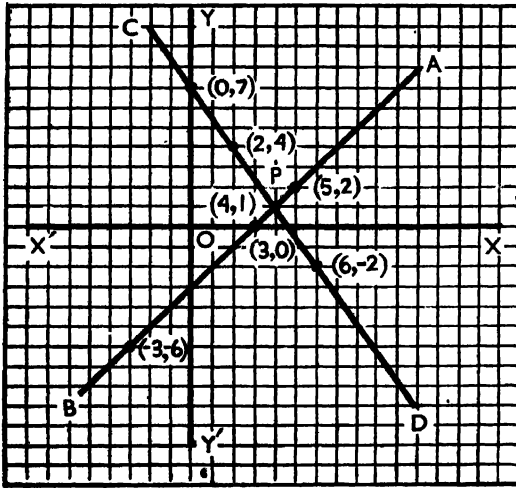
(i) হইতে পাওয়া যায় :—

যখন $x=$	3	−3	5
তখন $y=$	0	−6	2

(ii) হইতে পাওয়া যায় :—

যখন $x=$	0	2	6
তখন $y=$	7	4	−2

মনে কর, XOX' এবং YOY' অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের একটি বাহুকে একক ধরিয়া (i) নং সমীকরণ হইতে

প্রাপ্ত x এবং y-এর স্থানাঙ্কগুলি ছক-কাগজে সংস্থাপিত কর। উক্ত বিন্দুগুলি যোগ করিয়া AB একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। ইহাই (i) নং সমীকরণের লেখচিত্র।

পুনরায় একই অক্ষদ্বয় এবং একই একক ধরিয়া (ii) নং সমীকরণ হইতে x এবং y-এর স্থানাঙ্কগুলি ছক-কাগজে সংস্থাপিত কর। উক্ত বিন্দুগুলি যোগ করিয়া CD একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। ইহাই (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র।

মনে কর, সমীকরণ দুইটির লেখচিত্রদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এই ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কই প্রদত্ত সহসমীকরণটির নির্ণেয় বীজ।

গণনা দ্বারা দেখা যায়, P বিন্দুর ভুজ$=4$ এবং কোটি$=1$; সুতরাং প্রদত্ত সহসমীকরণের নির্ণেয় বীজ, $x=4$ এবং $y=1$.

উদাহরণ 2. লেখচিত্র সাহায্যে সমাধান কর :

$$\left.\begin{array}{l} 3y-x+2=0\cdots\text{(i)} \\ 3y+x=3\cdots\cdots\text{(ii)} \end{array}\right\}$$

(i) হইতে, $3y=x-2$; $\therefore \quad y=\dfrac{x-2}{3}$

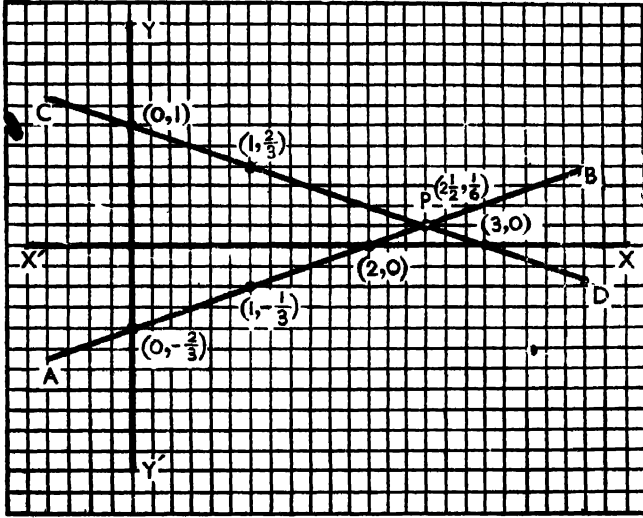
এবং (ii) হইতে, $3y=3-x$; $\therefore \quad y=\dfrac{3-x}{3}$.

(i) হইতে পাওয়া যায় :—

যখন $x=$	0	1	2
তখন $y=$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0

(ii) হইতে পাওয়া যায় :—

যখন $x=$	0	1	3
তখন $y=$	1	$\frac{2}{3}$	0

মনে কর, XOX' এবং YOY' অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের ছয়টি বাহুকে একক ধরিয়া (i) নং সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর স্থানাঙ্কগুলি ছক-কাগজে সংস্থাপিত কর। উক্ত বিন্দুগুলি যোগ করিয়া AB একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। ইহাই (i) নং সমীকরণের লেখচিত্র।

পুনরায়, একই অক্ষদ্বয় এবং একই একক ধরিয়া (ii) নং সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর স্থানাঙ্কগুলি ছক-কাগজে সংস্থাপিত কর। উক্ত বিন্দুগুলি যোগ করিয়া CD একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। ইহাই (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র।

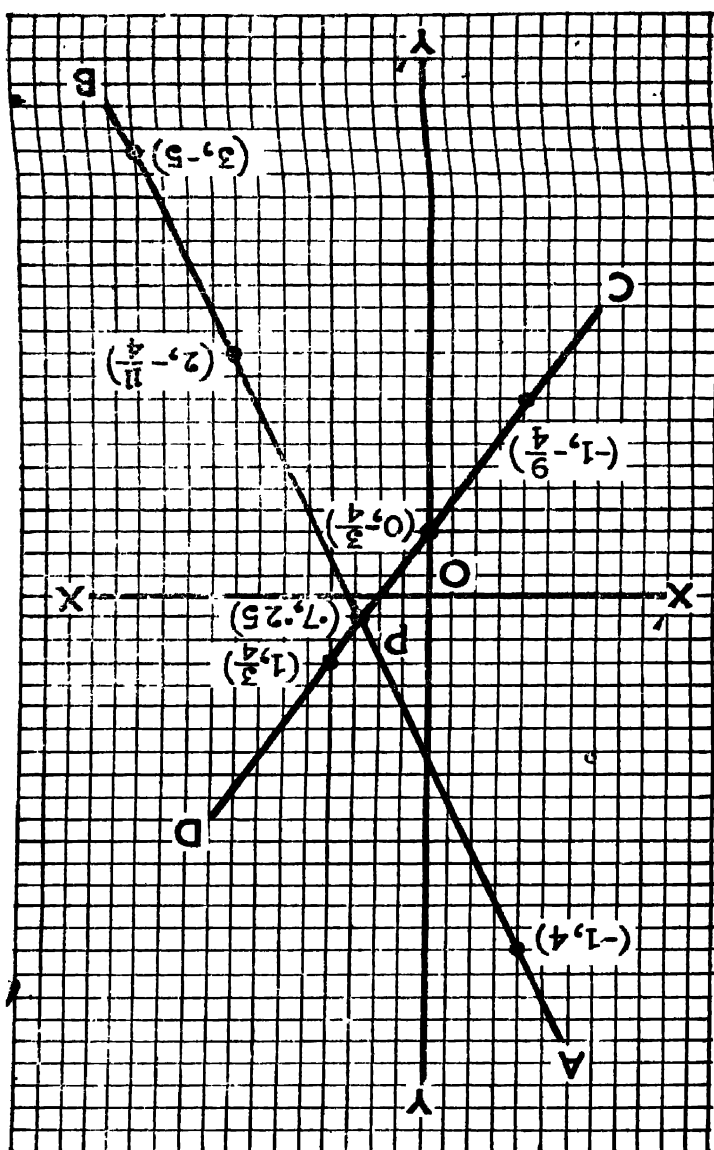
মনে কর, সমীকরণ দুইটির লেখচিত্র পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এই ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কই প্রদত্ত সহসমীকরণের নির্ণেয় বীজ।

যেহেতু ছয়টি ক্ষুদ্রবর্গের বাহুকে একক ধরা হইয়াছে; অতএব P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{5}{2}, \frac{1}{6})$.

সুতরাং প্রদত্ত সহসমীকরণের নির্ণেয় বীজ, $x=\frac{5}{2}$ বা $2\frac{1}{2}$ এবং $y=\frac{1}{6}$.

[এখানে সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করিবার কালে ভগ্নাংশ এড়াইবার জন্য ছয়টি ক্ষুদ্রবর্গের বাহুকে একক ধরা হয়।]

উদাহরণ 3. লেখচিত্র সাহায্যে সমাধান কর

$$\left.\begin{array}{l} 9x+4y=7\cdots(i) \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=\frac{1}{4}\cdots(ii) \end{array}\right\}$$

(i) হইতে, $4y=7-9x$ বা, $y=\frac{7-9x}{4}$

এবং (ii) হইতে, $\frac{1}{3}y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ বা, $y=6x-3$

(i) হইতে পাওয়া যায় :—

যখন $x=$	-1	3	2
তখন $y=$	4	-5	$-1\frac{1}{4}$

(ii) হইতে পাওয়া যায় :—

যখন $x=$	0	1	-1
তখন $y=$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{9}{4}$

মনে কর, XOX' এবং YOY' অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে মূলবিন্দু O-তে ছেদ করিয়াছে। ক্ষুদ্রবর্গের চারিটি বাহুকে একক ধরিয়া (i) নং সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর স্থানাঙ্কগুলি ছক-কাগজে সংস্থাপিত কর। উক্ত বিন্দুগুলি যোগ করিয়া AB একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। ইহাই (i) নং সমীকরণের লেখচিত্র।

পুনরায়, একই অক্ষদ্বয় এবং একই একক ধরিয়া (ii) নং সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত x এবং y-এর স্থানাঙ্কগুলি ছক-কাগজে সংস্থাপিত কর। উক্ত বিন্দুগুলি যোগ করিয়া CD একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। ইহাই (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র।

মনে কর, সমীকরণ দুইটির লেখচিত্রদ্বয় পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এই ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্কই প্রদত্ত সহসমীকরণটির নির্ণেয় বীজ।

গণনা দ্বারা দেখা যায়, P বিন্দুর ভুজ $=$ প্রায় 2·8 ক্ষুদ্রাংশ এবং কোটি $=1$ ক্ষুদ্রাংশ। যেহেতু চারিটি ক্ষুদ্রবর্গের বাহুকে একক ধরা হইয়াছে ; অতএব নির্ণেয় সমাধান,

$x=$ প্রায় $\frac{2\cdot8}{4}$ বা (প্রায়) ·7 এবং $y=\frac{1}{4}$ বা ·25 [পূর্ব পৃষ্ঠার লেখচিত্র দ্রষ্টব্য।]

[এখানে সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করিবার কালে ভগ্নাংশ এড়াইবার জন্য চারিটি ক্ষুদ্রবর্গের বাহুকে একক ধরা হইয়াছে।]

প্রশ্নমালা 39

লেখচিত্র সাহায্যে সমাধান কর :

1. $x+3=8$ 2. $3x+5=2$ 3. $2x-6=0$ 4. $3x+1\frac{1}{2}=7\frac{1}{2}$

5. $2\frac{1}{2}x-8\frac{1}{3}=-3\frac{1}{3}$ 6. $x+1=2x-3$ 7. $3x+10=8x-15$

8. $4x+3=2x+11$ 9. $3x-5=5x+7$ [D. B. 1926]

10. $\frac{x}{3}+3=\frac{x}{2}+2$

11. $\frac{3x}{2}-\frac{2x}{7}=17$

12. $\frac{x+2}{3}+4=\frac{3x+4}{2}+\frac{1}{3}$

লেখচিত্র সাহায্যে সমাধান কর :

13. $\left.\begin{array}{l} y-x=15 \\ 3x+y=11 \end{array}\right\}$

14. $\left.\begin{array}{l} x+y=15 \\ y=x+15 \end{array}\right\}$

15. $\left.\begin{array}{l} x+y-5=0 \\ x-y-1=0 \end{array}\right\}$

16. $\left.\begin{array}{l} y-5x=4 \\ y-2x=13 \end{array}\right\}$

17. $\left.\begin{array}{l} y=3x \\ y+2x=10 \end{array}\right\}$

18. $\left.\begin{array}{l} 2y-5x=15 \\ 3y-4x=12 \end{array}\right\}$

19. $\left.\begin{array}{l} 2x-y=8 \\ 4x+3y=6 \end{array}\right\}$

20. $\left.\begin{array}{l} 2x-y-3=0 \\ 3x-5y-15=0 \end{array}\right\}$

21. $\left.\begin{array}{l} 2x+2y=1 \\ 2x-3y=11 \end{array}\right\}$

22. $\begin{array}{l} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=4 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=2 \end{array}$

23. $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}y=1 \\ x-y=1 \end{array}\right\}$

24. $\begin{array}{l} \frac{3x}{2}=\frac{17}{2}-y \\ y=\frac{2x}{3}+2 \end{array}$

25. $\left.\begin{array}{l} 4x-3y=0 \\ \ldots 2\frac{1}{12} \end{array}\right\}$

26. $x-y=1\frac{1}{4}$

27. $\left.\begin{array}{l} 3x+4y=9 \\ x+6y=10 \end{array}\right\}$

28. $3y-2x=4$, সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং উহা হইতে $2x+1=0$, সমীকরণটি সমাধান কর।

29. লেখচিত্র সাহায্যে $x+y=2$, $x=y$-এর সমাধান কর এবং ঐ লেখদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [W. B. S. B. 1952]

প্রশ্নমালা 4C

(বিবিধ প্রশ্ন)

1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) x^3+x^2-x-1 (ii) $a^2b^2-a^2-b^2+1$

2. সরল কর : $\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}\times\frac{x+1}{x-1}\times\frac{x^2-x+1}{x^3+1}$

3. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $x^4-3x^3-2x^2+12x-8$ এবং x^3-7x+6

4. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$4x^2-4x+1$, $8x^2+4x-4$ এবং $6x^2+12x+6$

5. $x+y=a$ এবং $xy=b$ হইলে x^4+y^4-এর মান নির্ণয় কর।

6. সমাধান কর : $\cdot4\left(\frac{x}{3}+1\cdot2\right)-1=\cdot8$

7. এক কৃষক 1060 টাকা দিয়া তিনটি গরু কিনিল। প্রথম গরু অপেক্ষা দ্বিতীয় গরুর দাম 50 টাকা বেশী এবং দ্বিতীয় গরু অপেক্ষা তৃতীয় গরুর দাম 60 টাকা বেশী। প্রতিটি গরুর দাম নির্ণয় কর।

8. $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ হইলে, প্রমাণ কর $\frac{x^3}{a^2}+\frac{y^3}{b^2}+\frac{z^3}{c^2}=\frac{(x+y+z)^3}{(a+b+c)^2}$.

9. গুণফল নির্ণয় কর : $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

10. x^3+px+q এবং x^3+qx+p রাশিদ্বয়ের একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকিলে, প্রমাণ কর $p+q+1=0$.

11. সমাধান কর : $ax-by=2(a^2-b^2)$, $x-2y=-3b$.

12. $x=5$ হইলে, $\frac{x^3-8x^2+16x-5}{6x^3-17x^2+11x-5}$-এর মান নির্ণয় কর।

13. $a:b=c+d:c-d$ হইলে প্রমাণ কর যে,

$a^2+ab:ab-b^2=c^2+cd:cd-d^2$.

14. প্রতি কিলোগ্রাম 60 ন. প. দরের 80 কিলোগ্রাম দুধের সহিত কত পরিমাণ জল-মিশ্রিত করিলে, মিশ্রণের প্রতি কিলোগ্রাম 48 ন. প. দরে বিক্রয় করিয়া 10% লাভ হইবে ?

15. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(a) $x^2+(a+b+c)x+ab+ac$

(b) $x^2-y^2-z^2+2yz+x+y-z$

16. সরল কর : $\dfrac{(a+b)\{(a+b)^2-c^2\}}{4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2}$

17 সমাধান কর :: $\dfrac{x+y}{xy}=5$, $\dfrac{x-y}{xy}=9$

18. লেখচিত্র সাহায্যে দেখাও, x-এর মান কত হইলে $\frac{x}{2}+1$ এবং $\frac{3(8-x)}{4}$ রাশি দুইটি পরস্পর সমান হইবে।

19. একটি বিদ্যালয়ে 600 এবং অপর একটি বিদ্যালয়ে 800 ছাত্র ছিল। বিদ্যালয় দুইটি হইতে যথাক্রমে 50 জন ও 60 জন ছাত্র চলিয়া গেলে কোন্ বিদ্যালয়ের অধিক ক্ষতি হইল ?

20. প্রমাণ কর :

(i) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$.

(ii) $x+y=1+xy$ হইলে, $x^3+y^3=1+x^3y^3$.

[W. B. S. B. 1959]

21. দুইটি সংখ্যার অনুপাত 3 : 7 এবং উহাদের উভয়ের সহিত 13 যোগ করিলে অনুপাতটি 7 : 12 হয়। সংখ্যাদ্বয় নির্ণয় কর।

22. সমাধান কর : $\dfrac{(x+2)(x+3)}{(x+4)(x+7)}=\dfrac{x+5}{x+11}$

23. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$

[C. U. 1946]

24. গ. সা. গু. নির্ণয় কর : $a^5+11a-12$ এবং a^5+11a^3+54

[C. U. 1949]

25. ল. সা. গু. নির্ণয় কর : $6x^2-x-1$, $3x^2+7x+2$, $2x^2+3x-2$

26. $x+\dfrac{1}{x}=5$ হইলে $\dfrac{x}{x^2+x+1}$-এর মান নির্ণয় কর।

27. সরল কর : $\dfrac{x-y}{(a+x)(a+y)}+\dfrac{y-z}{(a+y)(a+z)}+\dfrac{z-x}{(a+z)(a+x)}$

28. $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+50$-কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

29. লেখচিত্র সাহায্যে সমাধান কর : $2x-5y=0, (x-y)=6$

[W. B. S. B. 1959]

30. সমাধান কর : (i) $\dfrac{a+b+x}{a+b-x}=\dfrac{x+a-b}{x-a+b}$

(ii) $\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{(x+1)^2-(x-1)^2}=2$

31. একটি পাত্রে দুধ ও জলের অনুপাত 3 : 1. এই জল-মিশ্রিত দুধের কত অংশ তুলিয়া লইয়া তাহার পরিবর্তে জল ঢালিলে মিশ্রণে দুধ ও জলের পরিমাণ সমান হইবে ?

32. (*a*) গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$x^4+5x^3+6x^2+5x+1$ এবং $x^4+3x^3-2x^2+3x+1$

(*b*) ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$x^2-4x+3-y^2+2y$ এবং $x^2-5x+4-y^2+3y$

33. a, b এবং c তিনটি ক্রমিক সংখ্যা হইলে, প্রমাণ কর যে,

$a^3+c^3=2b(b^2+3)$.

34. a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2$.

35. সমাধান কর : (i) $x+y=a+b, \quad \dfrac{x+b}{2a}+\dfrac{y+a}{2b}=2$

(ii) $\dfrac{a}{bx}-\dfrac{b}{ax}=a^2-b^2$ [W. B. S. B. 1952]

36. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : (i) $x^4-2(a^2+b^2)x^2+(a^2-b^2)^2$

(ii) $1+a+b+c+ab+ac$

(iii) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$

37. A এবং B একত্রে 6 দিনে একটি কাজ করিতে পারে। B একা কাজটি যতদিনে করিতে পারে, A একা উহা অপেক্ষা 5 দিন কম সময়ে করিতে পারে। কে কতদিনে কাজটি করিতে পারে ?

38. যদি x এবং y রাশিদ্বয়ের গ. সা. গু. h এবং ল. সা. গু. l হয়, এবং যদি $h+l=x+y$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর $h^3+l^3=x^3+y^3$.

39. $a:b=c:d$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $\frac{a}{a-b}:\frac{a+b}{b}=\frac{c}{c-d}:\frac{c+d}{d}$

(ii) $a:a+c=a+b:a+b+c+d$

40. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1296 বর্গমিটার। ক্ষেত্রটি দৈর্ঘ্যে 18 মিটার বেশী এবং প্রস্থে 6 মিটার কম হইলে, উহার ক্ষেত্রফল অপরিবর্তিত থাকিত। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

41. $a+b+c=0$ হইলে, প্রমাণ কর,

$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ [P. U. 1931]

42. $y+x=0$, $5y=3x$ এবং $y=3x+12$, ইহাদের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এই রেখা তিনটি দ্বারা যে ত্রিভুজ গঠিত হয়, তাহার শীর্ষবিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

43. $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c}{d}$ হইলে প্রমাণ কর, $\frac{a^2+ab}{ab-b^2}=\frac{c^2+cd}{cd-d^2}$

[W. B. S. B. 1956]

44. সমাধান কর : (i) $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{x-6}=\frac{8}{x+3}$

(ii) $\frac{2}{x}+\frac{5}{y}=1, \frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{19}{20}$

45. $(x^2+y^2)(a^2+b^2)+(ax+by)^2=0$ হইলে, প্রমাণ কর $x:y=a:b$.

46. একটি পাত্রে দুধ ও জলের অনুপাত 2 : 3 এবং অপর একটি পাত্রে দুধ ও জলের অনুপাত 3 : 1. পাত্র দুইটি হইতে কি অনুপাতে জল-মিশ্রিত দুধ তুলিয়া লইয়া দুই পাত্রের জল-মিশ্রিত দুধ একত্র মিশ্রিত করিলে নূতন মিশ্রণে দুধ ও জলের পরিমাণ সমান হইবে ?

47. $a:b::b:c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$ [W. B. S. B. 1957]

(ii) $a^4+a^2c^2+c^4=b^2\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{b^2}{a^2}-1\right)(a^2+b^2+c^2)$

48. এক সৈন্যাধ্যক্ষ দেখিলেন যে তাঁহার অধীনস্থ সৈন্যদিগকে একপ্রকার বর্গাকৃতি ব্যূহে সাজাইলে 55 জন সৈন্য বেশী থাকে, অথচ যদি প্রতি সারিতে

একজন করিয়া সৈন্য বাড়ান হয়, তবে 40 জন লোক কম পড়ে। তাঁহার অধীনে কত সৈন্য ছিল ?

49. (i) ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$21x^2-13x+2$, $28x^2-15x+2$ এবং $12x^2-7x+1$

(ii) গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$x^5+2x^4-5x^2-7x+3$ এবং $3x^6-3x^4-18x^3+x^2+2x+3$

50. (i) সমাধান কর : $\left(\frac{2x-10}{2x-5}\right)^2=\frac{x-10}{x-5}$ [C. U. 1941]

(ii) $\left.\begin{array}{l}67x+33y-233=0\\33x-133y+333=0\end{array}\right\}$

51. এক সৈন্যাধ্যক্ষ তাঁহার সৈন্যদলকে 4 গভীরতাবিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ বর্গে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন যে 50 জন সৈন্য বেশী থাকিয়া যায় এবং 5 গভীরতাবিশিষ্ট শূন্যগর্ভ বর্গে সাজাইতে গিয়া দেখিলেন 50 জন সৈন্য কম পড়ে। উভয় ক্ষেত্রে সম্মুখ-সারির সৈন্যসংখ্যা সমান থাকিলে সৈন্যাধ্যক্ষের অধীনে কত সৈন্য ছিল ?

52. প্রমাণ কর :

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2$$

53. সরল কর : $\frac{4a^2-(b-c)^2}{(2a+c)^2-b^2}+\frac{b^2-(2a-c)^2}{(2a+b)^2-c^2}+\frac{c^2-(2a-b)^2}{(b+c)^2-4a^2}$

54. লেখচিত্র সাহায্যে সমাধান কর : $\frac{2x-3}{3}=\frac{3x-5}{4}$

55. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $(a-b)^3+91a^3-b^3$ (ii) $5x^2-6xy-8y^2$

56. যদি $y=\frac{22x-45}{13}$ হয় এবং x ও y পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে উহাদের মান কত ?

57. $2x-3y=4y-5x$ হইলে $x:y$-এর অনুপাত নির্ণয় কর।

58. $x:a$ অনুপাতটিতে a-র তুলনায় x একটি ক্ষুদ্ররাশি হইলে $(a+x)^3:a^3$-এর আসন্নমান নির্ণয় কর।

59. সমাধান কর : $\frac{(x-a)^3}{(x-b)^3}=\frac{x-2a+b}{x+a-2b}$

60. সরল কর :

$$\frac{a+x}{a^2+ax+x^2}+\frac{a-x}{a^2-ax+x^2}+\frac{2x^3}{a^4+a^2x^2+x^4}$$

61. ল. সা. গু. নির্ণয় কর :

$1+4x+8x^2+8x^3$, $1+4x+4x^2-16x^4$ এবং $1+2x-8x^3-16x^4$

62. গ. সা. গু. নির্ণয় কর :

$2a^4-a^3-a^2-a-3$ এবং $2a^4-5a^3+a^2+5a-3$

63. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

(i) $(1-c^2)(1+a)^2-(1-a^2)(1+c)^2$

(ii) $(ab+1)^4-4ab(ab+1)^2-(a^2-b^2)^2$

64. এক ব্যক্তি 48 কি. মি. পথ হাঁটিয়া দেখিল যে, তাহার গতিবেগ ঘণ্টায় আরও 5 কি.মি. অধিক হইলে সে ঐ পথ 5 ঘণ্টা কম সময়েই অতিক্রম করিতে পারিত ; ঐ ব্যক্তির গতিবেগ ঘণ্টায় কত ছিল ?

65. সমাধান কর : (i) $x^2+\frac{36}{x^2}=13$ [C. U. 1931]

(ii) $x+\frac{1}{x}=25\frac{1}{25}$

66. সরল কর : $\left(\frac{1}{1+x}+\frac{x}{1-x^2}\right)\div\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{x}{1+x}\right)\times\left(\frac{1}{1-x}-x\right)$

67. $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে,

$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3=0$ [W. B. S. B. 1952]

68. a, b, c, d ক্রমিক সমানুপাতী হইলে, প্রমাণ কর যে, $2a-3b, 2b-3c$ এবং $2c-3d$ রাশিগুলিও ক্রমিক সমানুপাতী হইবে।

69. দুই অঙ্কবিশিষ্ট কোন সংখ্যার দশক স্থানীয় অঙ্কটি একক স্থানীয় অঙ্কের দ্বিগুণ। অঙ্ক দুইটি পরস্পর স্থান পরিবর্তন করিলে যে সংখ্যাটি গঠিত হয়, তাহার এবং 60-এর অনুপাত 4 : 5 ; সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

70. (i) $3x+4y=12$ এবং $4x-3y=6$-এর লেখচিত্রদ্বয় অঙ্কিত কর এবং ঐ লেখদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. 1929]

(ii) $\frac{x+3}{2}$-এর লেখচিত্র অঙ্কিত কর। $x=3$ হইলে, ঐ লেখচিত্রের সাহায্যে অপেক্ষকটির মান নির্ণয় কর। x-এর মান কত হইলে অপেক্ষকটির মান শূন্য হইবে?

[D. B. 1934]

71. (i) যদি a, b, c ক্রমিক সমানুপাতী হয় এবং $a(b-c)=2b$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $a-c=\frac{2(a+b)}{a}$. [P. U. 1916]

(ii) যদি $x : y=a+2 : a-2$ হয়, তাহা হইলে $x^2-y^2 : x^2+y^2$-এর মান নির্ণয় কর।

72. $a+b+c=0$ হইলে প্রমাণ কর যে,

(i) $(bc+ca+ab)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)^2$

(ii) $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2=3abc$ [W. B. S. B. 1957]

73. জল-মিশ্রিত 120 কি. গ্রা. দুধে 75% দুধ আছে। ইহাতে আর কত দুধ মিশাইলে মিশ্রণে 80% দুধ হইবে?

74. পিতা ও পুত্রের বর্তমান বয়সের অনুপাত $7 : 3$ এবং 10 বৎসর পূর্বে তাহাদের বয়সের অনুপাত ছিল $4 : 1$; 10 বৎসর পরে তাহাদের বয়সের অনুপাত কত হইবে?

75. (i) দুইটি সংখ্যার অনুপাত $3 : 4$ এবং তাহাদের গুণফল 5808; সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

(ii) একই অঙ্কদ্বয় দ্বারা গঠিত দুইটি সংখ্যার অনুপাত $4 : 7$ হইলে সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

76. (i) $a+b+c=0$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}=3$

(ii) যদি $a+c=2b$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$a\ (b+c)+b^2(c+a)+c^3(a+b)=6b^3.$$

77. $2s=a+b+c+d$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$4(bc+ad)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2=16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$$

78. যদি $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=2$ হয়,

তাহা হইলে, $\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}+\frac{c}{1+c}=1$

*অতিরিক্ত সূত্রাবলী

বীজগণিতের নানাবিধ অঙ্ক কষিতে হইলে পূর্বোক্ত সূত্রাবলী ব্যতীত আরও কয়েকটি সূত্রের অনুশীলনের প্রয়োজন। এই সূত্রগুলি সম্পর্কে এখানে আলোচনা করা হইতেছে।

সূত্র 1. $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a).$

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= \{a+(b+c)\}^3\\ &=a^3+(b+c)^3+3a(b+c)\{a+(b+c)\}\\ &=a^3+b^3+c^3+3bc(b+c)+3a(b+c)(a+b+c)\\ &=a^3+b^3+c^3+3(b+c)\{bc+a(a+b+c)\}\\ &=a^3+b^3+c^3+3(b+c)(a^2+ab+ac+bc)\end{aligned}$$

[a-র ঘাত অনুযায়ী সাজাইয়া]

$$\begin{aligned}&=a^3+b^3+c^3+3(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}\\ &=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

অনুসিদ্ধান্ত (i) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a).$

(ii) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a).$

সূত্র 2. $a^3+b^3+c^3-3abc$

$$\begin{aligned}&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \quad \cdots\text{(i)}\\ &=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \quad \cdots\text{(ii)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\ &=a^3+(b+c)^3-3bc(b+c)-3abc\\ &=(a+b+c)\{a^2-a(b+c)+(b+c)^2\}-3bc(a+b+c)\\ &=(a+b+c)(a^2-ab-ca+b^2+2bc+c^2-3abc)\\ &=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \quad \cdots \quad \cdots\text{(i)}\\ &=\tfrac{1}{2}(a+b+c).2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\ &=\tfrac{1}{2}(a+b+c)(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)\\ &=\tfrac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2)\\ &=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \quad \cdots \quad \cdots\text{(ii)}\end{aligned}$$

অনুসিদ্ধান্ত (i) $a+b+c=0$ হইলে $a^3+b^3+c^3=3abc$

$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=0\times(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=0.$$
$$\therefore\quad a^3+b^3+c^3=3abc$$

অনুসিদ্ধান্ত (ii) $a=b=c$ হইলে $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\{(a-a)^2+(b-b)^2+(c-c)^2\}$$
$$(\because\quad a=b=c)$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b+c)\times 0=0.$$

উদাহরণ 1. গুণ কর :

$$(3x+2y+z)(9x^2+4y^2-z^2-6xy-2yz-3zx)$$

নির্ণেয় গুণফল $=$

$$(3x+2y+z)\{(3x)^2+(2y)^2+z^2-(3x)(2y)-(2y)z-z(3x)\}$$
$$=(3x)^3+(2y)^3+z^3-3.(3x)(2y)z$$
$$=27x^3+8y^3+z^3-18xyz.$$

উদাহরণ 2. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $x^3-y^3+3xy+1$

$$x^3-y^3+3xy+1=x^3+(-y)^3+1^3-3.x(-y).1$$
$$=\{x+(-y)+1\}\{x^2+(-y)^2+1^2-x(-y)-(-y)1-1.x\}$$
$$=(x-y+1)(x^2+y^2+1+xy+y-x)$$

উদাহরণ 3. $x=331$, $y=333$ এবং $z=336$ হইলে

$x^3+y^3+z^3-3xyz$-এর মান নির্ণয় কর।

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=\tfrac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}(331+333+336)\{(331-333)^2+(333-336)^2+(336-331)^2\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\times 1000\times(4+9+25)=\tfrac{1}{2}\times 1000\times 38=19000.$$

উদাহরণ 4 $3s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর,

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=3(s-a)(s-b)(s-c)$$

[E. B. S. B. 1953]

মনে কর, $(s-a)=x$, $(s-b)=y$ এবং $(s-c)=z$

$\therefore \quad x+y+z=s-a+s-b+s-c=3s-a-b-c$

$=a+b+c-a-b-c=0$

এখন, প্রমাণিতব্যের বামপক্ষ $=x^3+y^3+z^3$

$=x^3+y^3+z^3-3xyz+3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=0\times(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=3xyz$

$=3(s-a)(s-b(s-c)$ প্রমাণিত।

প্রশ্নমালা 41

গুণ কর :

1. $4m^2+n^2-2mn-4m-2n+4$-কে $2m+n+2$ দ্বারা।
2. $x^2+4y^2+z^2+2xy+xz-2yz$-কে $x-2y-z$ দ্বারা।
3. $a^2+25b^2+5ab-a+5b+1$-কে $a-5b+1$ দ্বারা।
4. $p^2+36q^2-6pq+3p+18q+9$-কে $3-p-6q$ দ্বারা।

সরল কর :

5. $(x-2y)^3+(2y-1)^3-(x-1)^3+3(x-1)(x-2y)(2y-1)$
6. $(2a+b+c)^3+(2b+c+a)^3+(2c+a+b)^3-3(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

7. $a^3+125b^3+30ab-8$
8. $2x^3+54y^3+36xy-16$
9. x^6-2x^3+1
10. x^6+5x^3+8
11. $(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3$ [I. P. S. 1936]
12. $8(a+b+c)^3-(b+c)^3-(c+a)^3-(a+b)^3$

মান নির্ণয় কর :

13. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$-র, যখন $a=x+1$, $b=x+2$ এবং $c=x+3$

14. $a^3+b^3+c^3-3abc$-এর, যখন $a=178$, $b=168$ এবং $c=148$

15. $a^3+b^3+c^3$-এর যখন $a+b+c=9$, $a^2+b^2+c^2=29$, এবং $abc=24$

16. abc-এর, যখন $a+b+c=15$, $a^2+b^2+c^2=83$ এবং $a^3+b^3+c^3=495$

17. $x^3+y^3+z^3-3xyz$-এর, যখন $x+y+z=5$, $xy+yz+zx=10$ [C. U. 1949]

18. $a^3+b^3+c^3-3abc$-এর যখন $a+b+c=8$, $a^2+b^2+c^2=0$ [C. U. 1950]

19. প্রমাণ কর : $(2a+3b+4c)^3+(2b+3c+4a)^3+(2c+3a+4b)^3-3(2a+3b+4c)(2b+3c+4a)(2c+3a+4b)=27(a^3+b^3+c^3-3abc)$

20. $2s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর,

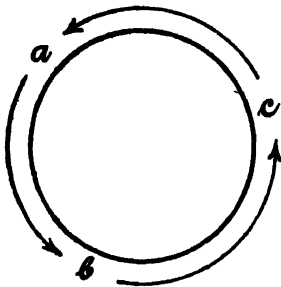
$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3-3(s-a)(s-b)(s-c)=\tfrac{1}{4}(a^3+b^3+c^3-3abc)$$

21. $x=a(b+c)$, $y=b(c+a)$ এবং $z=c(a+b)$ হইলে

প্রমাণ কর, $\left(\frac{x}{a}\right)^3+\left(\frac{y}{b}\right)^3+\left(\frac{z}{c}\right)^3=\frac{3xyz}{abc}$. [D. B. 1924]

22. $3s=a+b+c$ হইলে প্রমাণ কর,

$$\frac{s-a}{(s-b)^2(s-c)^2}+\frac{s-b}{(s-c)^2(s-a)^2}+\frac{s-c}{(s-a)^2(s-b)^2}=\frac{3}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

চক্র-ক্রম : মনে কর, কোন বৃত্তের পরিধির উপর a, b, c অক্ষর তিনটি নিম্নের চিত্রানুযায়ী সজানো আছে। এখন a হইতে আরম্ভ করিয়া তীরচিহ্নিত দিকে চলিতে থাকিলে অক্ষর তিনটি $a\ b\ c$—এই ক্রমে পাওয়া যায়। তদ্রূপ, b হইতে আরম্ভ করিয়া তীরচিহ্নিত দিকে চলিতে থাকিলে অক্ষর তিনটি $b\ c\ a$—এই ক্রমে পাওয়া যায় এবং c হইতে আরম্ভ করিলে অক্ষর তিনটি $c\ a\ b$—এই ক্রমে পাওয়া যায়। এই ক্রমগুলিকে **চক্র-ক্রম** (Cyclic Order) বলে। যে সকল বীজগণিতীয় রাশিমালা এই ক্রমে সজ্জিত থাকে তাহাদিগকে **চক্র-ক্রমে বিন্যস্ত রাশিমালা** (Expressions in Cyclic Order) বলা হয়।

(i) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$, (ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)$ ইত্যাদিকেই চক্র-ক্রমে বিন্যস্ত রাশিমালা বলা হয়।

এখানে চক্র-ক্রমে বিন্যস্ত রাশিমালার কতিপয় সূত্র দেওয়া হইল :

সূত্র 3. (i) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

(ii) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

(i) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=a^2(b-c)-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2$ [a-র ঘাত অনুসারে সাজাইয়া]

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-a(b+c)+bc\}$

$=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$

$=(b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$.

(ii) $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)$

$=bc(b-c)+ac^2-a^2c+a^2b-ab^2$

$=bc(b-c)+a^2b-a^2c-ab^2+ac^2$ [a-র ঘাত অনুসারে সাজাইয়া]

$=bc(b-c)+a^2(b-c)-a(b^2-c^2)$

$=(b-c)\{bc+a^2-a(b+c)\}$

$=(b-c)(bc-ab-ac+a^2)$

$= (b-c)\{b(c-a)-a(c-a)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a) = -(a-b)(b-c)(c-a).$

অনুসিদ্ধান্ত : $-\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\}$
$= -(a-b)(b-c)(c-a).$

সূত্র 4. (i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$
$= (b+c)(c+a)(a+b).$

(ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$
$= (b+c)(c+a)(a+b).$

(i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$= a^2(b+c)+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$

$= a^2(b+c)+ab^2+2abc+ac^2+b^2c+bc^2$

[a-এর ঘাত অনুসারে সাজাইয়া]

$= a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)+bc(b+c)$

$= (b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$

$= (b+c)(a^2+ab+ac+bc)$

$= (b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$

$= (b+c)(c+a)(a+b).$

(ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+2abc$

$= bc(b+c)+ac^2+a^2c+a^2b+ab^2+2abc$

$= bc(b+c)+a^2b+a^2c+ab^2+2abc+ac^2$

[a-র ঘাত অনুসারে সাজাইয়া]

$= bc(b+c)+a^2(b+c)+a(b^2+2bc+c^2)$

$= (b+c)\{bc+a^2+a(b+c)\}$

$= (b+c)(a^2+ab+ac+bc)$ [a-র ঘাত অনুসারে সাজাইয়া]

$= (b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$

$= (b+c)(c+a)(a+b).$

অনুসিদ্ধান্ত : $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$
$= (b+c)(c+a)(a+b).$

সূত্র 5. (i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
$= (a+b+c)(bc+ca+ab).$

(ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$
$$=(a+b+c)(bc+ca+ab)$$

(i) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+3abc$
$=a^2(b+c)+abc+b^2(c+a)+abc+c^2(a+b)+abc$
$=a\{a(b+c)+bc\}+b\{b(c+a)+ca\}+c\{c(a+b)+ab\}$
$=a(ab+ca+bc)+b(bc+ab+ca)+c(ca+bc+ab)$
$=(a+b+c)(bc+ca+ab).$

(ii) $bc(b+c)+ca(c+a)+ab(a+b)+3abc$
$=bc(b+c)+abc+ca(c+a)+abc+ab(a+b)+abc$
$=bc(b+c+a)+ca(c+a+b)+ab(a+b+c)$
$=(a+b+c)(bc+ca+ab).$

অনুসিদ্ধান্ত : $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b)$

$(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc$
$=\{a+(b+c)\}\{bc+a(b+c)\}-abc$
$=abc+a^2(b+c)+bc(b+c)+a(b+c)^2-abc$
$=(b+c)\{a^2+bc+a(b+c)\}$
$=(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$ [a-র ঘাত অনুসারে সাজাইয়া]
$=(b+c)\{a(a+b)+c(a+b)\}$
$=(b+c)(c+a)(a+b).$

উদাহরণ 1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর : $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$
[Pat. U. 1931

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$
$=a^3(b-c)+b^3c-ab^3+ac^3-bc^3$
$=a^3(b-c)-ab^3+ac^3+b^3c-bc^3$
$=a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$
$=(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$
$=(b-c)(a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2)$
$=(b-c)(a^3-ab^2-abc+b^2c-ac^2+bc^2)$

$$=(b-c)\{a(a^2-b^2)-bc(a-b)-c^2(a-b)\}$$
$$=(b-c)(a-b)\{a(a+b)-bc-c^2\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a^2-c^2+ab-bc)$$
$$=(b-c)(a-b)\{(a+c)(a-c)+b(a-c)\}$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

উদাহরণ 2. সরল কর :

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)}+\frac{1}{b(b-c)(b-a)}+\frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$ [P. U. 1947]

রাশিমালা $=\frac{1}{a(a-b)(c-a)}+\frac{1}{-b(b-c)(a-b)}+\frac{1}{-c(c-a)(b-c)}$

$$=\frac{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)}{-abc(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-abc(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{1}{abc}.$$

উদাহরণ 3. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ হইলে প্রমাণ কর,

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3}.$$ [C. U. 1941]

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

বা, $\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c}$

বা, $(a+b+c)(bc+ca+ab)=abc$

বা, $(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=0$

বা, $(b+c)(c+a)(a+b)=0$

তিনটি রাশির গুণফল 0 হইলে, যে-কোন একটি রাশি অবশ্যই 0 হইবে।

$\therefore$ যদি $b+c=0$ হয়, তবে $b=-c$

যদি $c+a=0$ হয়, তবে $c=-a$

এখন $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{-a^3}=\frac{1}{b^3}$

$$\frac{}{a^3+b^3+c^3}=\frac{}{a^3+b^3-a^3}=\frac{}{b^3}$$

$$\frac{1}{(a+b+c)^3}=\frac{1}{(a+b-a)^3}=\frac{1}{b^3}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}=\frac{1}{(a+b+c)^3} \text{ (প্রমাণিত)}$$

প্রশ্নমালা 42

উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর :

1. $b^2c^2(b^2-c^2)+c^2a^2(c^2-a^2)+a^2b^2(a^2-b^2)$
2. $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+a^3+b^3+c^3$
3. $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

সরল কর :

4. $\frac{}{(a-b)(a-c)}+\frac{}{(b-c)(b-a)}+\frac{}{(c-a)(c-b)}$
5. $\frac{a^2}{(c-a)(a-b)}+\frac{b^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{c^2}{(b-c)(c-a)}$
6. $\frac{a(b+c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(c+a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(a+b)}{(c-a)(c-b)}$
7. $\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$
8. $\frac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2+ca}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$
9. $\frac{xa^2+ya+z}{(a-b)(a-c)}+\frac{xb^2+yb+z}{(b-c)(b-a)}+\frac{xc^2+yc+z}{(c-a)(c-b)}$
10. প্রমাণ কর : $(b-c)(x-a)^2+(c-a)(x-b)^2+(a-b)(x-c)^2$
$=-(a-b)(b-c)(c-a)$
11. যদি $a+b+c=0$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর,
$$\frac{a^3}{2a^2+bc}+\frac{b^3}{2b^2+ca}+\frac{c^3}{2c^2+ab}=0$$
12. $a+b+c=1$, $ab+bc+ca=2$ এবং $abc=3$ হইল

প্রমাণ কর, $\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ca}+\frac{1}{c+ab}=-2$

বাজগণিত

উত্তরমালা

(নবম শ্রেণী)

প্রশ্নমালা 1 (পৃঃ 2)

1. +15 টাকা, −12 টাকা
2. +36 মিটার, −9 মিটার
3. +17 জন, −12 জন
4. $-\frac{1}{4}$ আয়, $+\frac{1}{4}$ আয়
5. +275 টাকা, −187 টাকা
6. −3 মিনিট, +8 মিনিট
7. −35 বৎসর, +22 বৎসর
8. +13 কিলোমিটার, −20 কিলোমিটার

প্রশ্নমালা 2 (পৃঃ 5)

1. $-x+y+z$
2. $-2b+c$
3. a^2-b^2
4. $a+b+c$
5. $2a+7b-c$

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 7)

1. $13a+4x$
2. $-15a+15b$
3. $29a^2-114a-12$
4. $8ax-5bx+16cx$
5. 0
6. $181x-79y$

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 10)

1. $2\frac{1}{4}$
2. 2
3. 6
4. −1
5. $-2\frac{5}{7}$
6. 20
7. $2\frac{9}{13}$
8. 3
9. 13
10. $\frac{1}{3}$
11. 3
12. 18
13. −1
14. 18
15. 7
16. 4
17. −2·75
18. 10
19. 5
20. 4

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 12—14)

1. 317, 139
2. 34, 20
3. 360
4. 87, 88, 89
5. 14
6. 24 বৎসর
7. 25 বৎসর
8. 1830 টাকা

9. 92 টাকা ; A—46 টাকা, B—30 টকা, C—16 টাকা

10. 32-টি টাকা, 96-টি '10 ন. প.', 128-টি '5 ন.প.', 160-টি '2 ন.প.'

11. 49   12. A—128 টাকা, B—120 টাকা

13. 121 টা. 50 ন.প.   14. 5 দিন

15. $3\frac{1}{2}$ ঘণ্টা যায় ঘণ্টায় 10 কি. মি. বেগে এবং $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা যায় ঘণ্টায় 18 কি.মি. বেগে   16. 24 কিলোমিটার   17. $29\frac{3}{8}$ কিলোমিটার

18. 12-টি   19. 4600 টাকা   20. 5600 টাকা

প্রশ্নমালা 6 (পৃ: 17—18)

1. (i) $\frac{25}{36m^2}+\frac{16m^2}{225}+\frac{4}{9}$ (ii) $\frac{p^2}{4m^2}+\frac{9m^2}{16p^2}-\frac{3}{4}$

   (iii) $x^4+4y^4+9z^4+4x^2y^2-12y^2z^2-6x^2z^2$

2. (i) $y^2+2yz+z^2$ (ii) $1{\cdot}44$

3. 0   4. 27   5. 6   6. 34 এবং 0

7. 69   8. 5   9. 25   10. 0

11. $7y^2$ 12. 16   13. (i) $(3m+3n)^2-(m-n)^2$

   (ii) $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$ 14. $\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{9}y^2$

15. $\frac{4}{9}m^2n^2-\frac{9}{16}p^2q^2$ 16. x^2y^2-z

17. x^4+x^2+1 18. $4x^2-9y^2+16z^2-24yz$

19. $25p^2-9m^2-4n^2+12mn$ 20. a^2b^2+ab+1

21. $x^8+x^4y^4+y^8$ 22. $m^8n^8+m^4n^4+1$

23. $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$

প্রশ্নমালা 7 (পৃ: 19—20)

1. (i) $a^3+8b^3-27c^3+6a^2b+12ab^2-9a^2c+27ac^2-36b^2c$
   $+54bc^2-36abc$

   (ii) $m^6-27n^3+p^3q^3-9m^4n+27m^2n^2+3m^4pq+3m^2p^2q^2$
   $+27n^2pq-9np^2q^2-18m^2npq$

2. $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ 3. $8m^3$

4. $8y^3+24y^2z+24yz^2+8z^3$ 5. 1000 6. 1

7. p^3-3p 8. c^3+3c 9. 100 10. 64

11. (অঙ্কে 'b^2'-এর স্থলে 'b^3' হইবে।) 14. 3 15. 8

প্রশ্নমালা 8 (পৃ: 21)

1. $8a^3+343b^3$ 2. $x^3+\frac{1}{x^3}$ 3. $m+n$

4. $8x^3-27y^3$ 5. $8a^3-$ [illegible] 6. $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{y^3}$

7. $64x^6-729y^6$ (অঙ্কে '$27x^3$'-এর স্থলে '$27y^3$' হইবে।

8. a^9+512b^9 9. p^6- [illegible] 10. m^3-n^3

11. $27x^3-223y^3$ 12. $18q^3-36p^3$

13. 0 14. $\frac{2}{[illegible]}$

প্রশ্নমালা 9 (পৃ: 23—24)

1. $(x+2a)(x-2a)$ 2. $(p^3+9)(p^3-9)$

3. $a(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ 4. $3(5a+4b)(5a-4b)$

5. $3x(3+4x)(3-4x)$ 6. $(x-3y)(x+3y)(x^2+9y^2)$

7. $8(a-b)(3b-a)$ 8. $-4c(2a+3b-4c)$

9. $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$

10. $3(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$

11. $(m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)$

12. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$

13. $(x^2+2x-2)(x^2-2x-2)$ 14. $(x^2+3x-4)(x^2-3x-4)$

15. $(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$

16. $(x^2+3xy+y^2)(x^2-3xy+y^2)$

17. $x(9x^2+12xy+8y^2)(9x^2-12xy+8y^2)$

18. $(x$ [illegible] $2a-y)(x^2-4a+y)$ 19. $(a+b+4c)(a-b+2c)$

20. $(x+2y+3a-b)(x+2y-3a+b)$

21. $(4+5x+3x^2)(4-5x+3x^2)$ 22. $(x+y+1)(x-y+1)$

23. $(a+b-2c)(a-b+2c)$
24. $(a+1)(a-1)(b+1)(b-$
25. $(a-b)(a+b-2)$
26. $(a-b-c)(a+b+c+1$
27. $(a+b)^3(a-b)$
28. $(3a+b+c)(a-b-c)$
29. $(x+z)(x-z)(x^2+y^2+z^2)$
30. $(3x+y+z)(y+z-x)$
31. $(a+b)(a-b)(c+d)(c-d)$
32. $4(mp+nq)(mq+np)$
33. $(x+2y-3z)(x-2y+3z)$
34. $(2a+b-c)(2a-b+c)$
35. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(b+c-a-d)$
36. $(a+b-c-8)(a-b+c-8)$
37. $(x+4y+4z)(x+4y-4z)$
38. $(1+a+b-c)(1+a-b+c)$
39. $(3x^2+y^2)(x^2+3y^2)$
40. $(5m-3p+q+2)(5m-3p-q-2)$

প্রশ্নমালা 10 (পৃঃ 26—27)

1. $(x+2)(x+4)$
2. $(x-2)(x-3)$
3. $(x-4)(x+5)$
4. $(x-2)(x-10)$
5. $(x+6)(x-7)$
6. $(x-3)(x-4)$
7. $(m+1)(m-6)$
8. $(x+2)(x-3)$
9. $(x+4)(x-7)$
10. $(1+a)(2-a)$
11. $(2-a)(3-a)$
12. $(5+x)(1-x)$
13. $(x^2-7)(x-1)(x+1)$
14. $(x+19)(x-17)$
15. $(x+5y)(x-5y)(x^2+20y^2)$
16. $(x+1)(3x-8)$
17. $(2a^2+5)(2a+3)(2a-3)$
18. $(2-3a)(3+4a)$
19. $(x+2)(2x-5)$
20. $(4x+7)(3x+11)$
21. $(x+2)(3x+4)$
22. $(x+4)(3x+2)$
23. $(x+3)(2x-5)$
24. $(x-8)(4x-3)$
25. $6(x-1)(x+4)$
26. $(2x-1)(3-2x)$
27. $(15b-13a)(5a-3b)$
28. $(a^2+2a+3)(a+5)(a-3)$
29. $(a-3b)(3a+b)(a+2b)(2a-b)$
30. $(x+y)^2(x+3y)(3x+y)$
31. $(m+a)(am+1)$
32. $(ax-ay-by+bz)(a-b)$
33. $(a+b-3)(a+b-2)$
34. $(x+a+2)(x-a-1)$
35. $(a+x-1)(a-x+2)$

36. $(2x-3)(3x+1)$
37. $(x-2)^2(x-5)(x+1)$
38. $(x+14)(x+4)$
39. $(a+x+3)(a-x-1)$
40. $(a-x-1)(a+x-1)$
41. $(m+p+3)(m-p-2)$
42. $(a-x)(a-\frac{1}{x})$

প্রশ্নমালা 11 (পৃঃ 28)

1. $(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$
2. $a(a-4)(a^2+4a+16)$
3. $(a+b)(a-b)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$
4. $(m^2+n^2)(m^4-m^2n^2+n^4)$
5. $(3p+3q+r)(9p^2+9q^2+r^2+18pq-3pr-3qr)$
6. $(2x+2y-z)(4x^2+4y^2+z^2+8xy+2yz+2zx)$
7. $x^2y^3(5x-3y)(25x^2+15xy+9y^2)$
8. $3(a-3b^2)(a^2+3ab^2+9b^4)$
9. $(x+3y)(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$
10. $(2x-1)(4x^2+2x+3)$
11. $(1+3a)(1+3a^2)$
12. $(2m-1)(m^2-m+1)$
13. $(2x+3y)(28x^2+30xy+9y^2)$
14. $(a^2-2bc)(a^4-a^2bc+b^2c^2)$
16. $(a^2+\frac{1}{3}b^2)(a^2-ab+\frac{1}{3}b^2)$

প্রশ্নমালা 12 (পৃঃ 30)

1. $(x^2+1)(x^2+x+1)$
2. $(a+b)(a+b-3)$
3. $(x+2)(x^2+9x+4)$
4. $(x-1)(x+1)(x-3)$
5. $(x-1)^2)(x+2)$
6. $(x+1)(x+2)(x-1)$
7. $(a+2)(a+3)(a-5)$
8. $(m+1)(2m^2+m+2)$
9. $(a+1)^2(a^2+3a+1)$
10. $(x-1)(x-2)(x-3)$
11. $(x+1)(x+6)(x^2+7x+16)$
12. $(x^2+5x+7)(x^2+5x+3)$
13. $(x^2-3x-5)(x^2-3x-16)$
14. $(2a^2-5a+1)(2a^2-5a+4)$
15. $(2x^2-3x+7)(x-3)(2x+3)$
16. $(a-1)(a^2-a-4)$
17. $(a+2)(a^2+3a+4)$
18. $(x-3)(x-4)(x+5)$
19. $(x+1)(x-3)(x^2-2x-2)$ (অঙ্কে "$10a$"-র পরিবর্তে "$10x$" হইবে।)
20. $(x+1)(x-1)(2x+5)$

প্রশ্নমালা 14 (পৃ: 34)

1. $p+3$ 2. $x-1$ 3. a^2-ab+b^2 4. $m+n$
5. $x+1$ 6. $4(x+y)$ 7. $x-2$ 8. $x+1$
9. $3x+5y$ 10. $x+2$ 11. x^2+1 12. $x-3$
13. $x-2$ 14. $3x+1$

প্রশ্নমালা 15 (পৃ: 35)

1. $(x+y)^2(x^4+x^2y^2+y^4)$ 2. $72x^2y(x^2-y^2)(x^6+y^6)$
3. $(x-a)(x^2-c^2)$ 4. $(x+2)(x^2-1)$
5. $(a+3b)(a-3b)(a+2b)(a+4b)$
6. $(1-8x^3)(1+2x)(1+4x^2-8x^3)$ 7. $(x^2-1)(2x+1)$
8. $(x-2)(x^2+2x-12)(2x^2-x-2)$
9. $(x+1)(2x+1)(3x+1)(2x-3)$ 10. $(x^2-4)(x^2-1)$
11. $(2a-3b)(3a+2b)(a-b)(4a^2+6ab+9b^2)$
12. $(x-3)(2x^2+6x+13)(x^3+3x^2+9x+6)$
13. $(2x+3)(4x^2+6x+9)(4x^2-6x+9)(7x^2-5x-6)$
14. x^2-1 এবং x^2+2x-3

প্রশ্নমালা 16 (পৃ: 41—42)

1. $x+3$ 2. x^2+4x+3 3. x^2-3x-4
4. $2x-1$ 5. x^2+xy+y^2 6. $(x^2-1)^2$
7. x^2-3x+4 8. x^2+5x+1 9. x^2+7x+1
10. $m(2m-3n)$ 11. x^3-2x-1 12. x^3-2x+3
13. x^2+2x+3 14. $x-2$ 15. $2x-9$
16. x^2+x-3 17. $a-2$

প্রশ্নমালা 17 (পৃ: 44)

1. $a^5+4a^4-4a^3-64a^2-165a-108$
2. $2x^6+6x^5+13x^4-42x^3-162x^2-381x-234$
3. $2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4$

4. $a^7-a^6-9a^5+29a^4-16a^3-44a^2-144a-64$

5. $8y^6+4y^5-6y^4-5y^3-3y^2+y+1$

6. $x^7+x^6-7x^5-4x^4+15x^3-2x^2-12x+8$

7. $a^5+10a^4+36a^3+59a^2+50a+24$

8. $192x^7+128x^6-2187x-1458$

9. $16x^5+32x^4-48x^3+4x^2+11x-3$

প্রশ্নমালা 18 (পৃঃ 48—49)

1. 0 2. $\frac{2}{x+3}$ 3. $\frac{2a+c}{c(a+c)}$ 4. $2x$

5. $-\frac{64ax^3}{a^4-16x^4}$ 6. $\frac{7x+5}{(x^2-1)(x+2)}$ 7. 0

8. 1 9. 1 10. $\frac{2}{(x+1)(x+5)}$ 11. 0

12. 0 13. $\frac{8x^7}{x^8-y^8}$ 14. $\frac{1}{a-x}$ 15. $\frac{2a}{a+b}$

16. -2 17. 0 18. $\frac{3x^2+2x+1}{4(1-x^4)}$ 19. $\frac{9x+17}{(x-2)(x+1)}$

20. 0 21. $\frac{a+1}{3(a-2)(a-3)}$ 22. 0

প্রশ্নমালা 19 (পৃঃ 52—53)

1. $\frac{a+b}{b(a-b)}$ 2. $\frac{a(a+b)^2(a^2+b^2)}{(a-b)^2}$ 3. $\frac{a+b}{a-b}$

4. $\frac{1}{x^2-1}$ 5. $\frac{m^2-mn+n^2}{m(m+9n)}$ 6. $\frac{a^2-b^2}{a^4+a^2b^2+b^4}$

7. $\frac{p-1}{p+1}$ 8. 1 9. $\frac{1}{x}$

10. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$ 11. n 12. $a+b$ (অঙ্কে "b_2" স্থলে 'b^2' হইবে ।)

13. $-\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{ab(a-b)^2}$ 14. 2 15. x

16. $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$ 17. $\frac{y}{x-y}$ 18. m^2+n^2

19. $a+b+c$ 20. 6

প্রশ্নমালা 21 (পৃঃ 64)

1. b 2. -1 3. 2 4. 8 5. $2a$

6. $\frac{ab}{a-2b}$ 7. $1\frac{4}{5}$ 8. 1 9. $a-2b$ 10. $-\frac{2}{3}$

11. -2 12. 4 13. 6 14. $-\frac{1}{2}(a+b)$

15. $\frac{ac+b^2}{b^2+c^2}$ 16. $-\frac{n^3}{(m-n)^2}$

প্রশ্নমালা 22 (পৃঃ 67—68)

1. $1\frac{1}{2}$ 2. 3 3. $-1\frac{3}{8}$ 4. $2\frac{21}{29}$

5. $-1\frac{2}{5}$ 6. $\frac{2}{5}$ 7. $2\frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{2}(a+b)$

9. $\frac{ab}{a+b}$ 10. 6 11. $-2\frac{1}{2}$ 12. $-2\frac{1}{2}$

13. $-1\frac{1}{2}$ 14. 6 15. 9 16. $a+b+c$

17. $ab+bc+ca$ 18. $\frac{ab}{a+b}$

19. $\frac{pq(p+q-2r)}{p(r-p)+q(r-q)}$ 20. $-\frac{mn(m^2+n^2)}{m^4+n^4}$

21. $\frac{2(a-b)(b-c)}{(c-a)}$ 22. $-(a+b+c)$ 23. $a+b$

24. $a^3+b^3+c^3$ [অঙ্কে '$(a+b+c)$'-এর স্থলে '$2(a+b+c)$' হইবে।]

25. $-(a^2+b^2+c^2)$ 26. $\frac{1}{2}(a+2b)$

27. $\frac{b(2a-b)}{a}$ 28. $\frac{1}{3}a$

প্রশ্নমালা 23 (পৃঃ 70—71)

1. $x=1, y=4$ 2. $x=1, y=-1$ 3. $x=2, y=1$

4. $x=3, y=1$ 5. $x=3, y=2$ 6. $x=1, y=2$

7. $x=8, y=5$ 8. $x=4, y=2$ 9. $x=1, y=1$

10. $x=13, y=6$ 11. $x=2, y=\frac{1}{2}$ 12. $x=16, y=4$

13. $x=\frac{1}{2}, y=-1\frac{1}{2}$ 14. $x=\frac{1}{3}, y=3$ 15. $x=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$, $y=\frac{a}{2b}(b^2-a^2)$ 16. $x=a+b, y=b-a$ 17. $x=\frac{1}{5}, y=\frac{1}{6}$

প্রশ্নমালা 24 (পৃ: 74—75)

1. $x=3, y=2$ 2. $x=-1, y=2$ 3. $x=5, y=2$
4. $x=4, y=-1$ 5. $x=5, y=2$ (অঙ্কে '$6x-5y$' স্থলে '$6x-7y$' হইবে ।)
7. $x=\frac{24}{209}, y=-\frac{4}{247}$ 8. $x=\frac{1}{5}, y=\frac{1}{6}$ (অঙ্কে '$\frac{1}{15}$' স্থলে '$8\frac{1}{15}$' হইবে ।) 9. $x=4, y=5$
10. $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{3}$ 11. $x=6, y=2$ 12. $x=\frac{1}{5}, y=\frac{1}{6}$
13. $x=3, y=1$ 14. $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{bm-an-cn}, y=\frac{a^2-b^2-c^2}{am-bn-cm}$
15. $x=-\frac{765}{2773}, y=\frac{175}{2773}$ 16. $x=c, y=b$
17. $x=3, y=1$ 18. $x=\frac{a}{a^2+b^2}, y=\frac{b}{a^2+b^2}$
19. $x=45°, y=46°$.

প্রশ্নমালা 25 (পৃ: 76—77)

1. $x=1, y=2$ 2. $x=4, y=-1$
3. $x=-1\frac{23}{31}, y=-\frac{3}{31}$ 4. $x=\frac{c(b-c)}{a(b-a)}, y=\frac{c(a-c)}{b(a-b)}$
5. $x=10, y=15$ 6. $x=1, y=-1$
7. $x=\frac{a^2+b^2}{2ab}, y=\frac{b^2-a^2+2ab}{2ab}$
8. $x=2\frac{1}{6}, y=3\frac{5}{6}$ 9. $x=\frac{ac-bc-b}{a^2-b^2}, y=\frac{a-bc+ac}{a^2-b^2}$
10. $x=a, y=b$ 11. $x=3, y=2$
12. $x=\frac{1}{2}, y=2$ 13. $x=\frac{a^2-b^2}{am-bn}, y=\frac{a^2-b^2}{an-bm}$
14. $x=2, y=3$ 15. $x=\frac{1}{15}, y=18$ 16. $x=5, y=9$

প্রশ্নমালা 26 (পৃঃ 80)

1. $x=1, y=2$ 2. $x=4, y=5$ 3. $x=-7, y=-8\frac{4}{5}$
4. $x=5, y=3$ 5. $x=8, y=12$ 6. $x=a+b, y=b-a$
7. $x=4, y=2$ 8. $x=8, y=6$ 9. $x=\frac{1}{3}, y=\frac{1}{2}$
10. $x=6, y=2$ 11. $x=4, y=10$ 12. $x=4, y=7$
13. $n=\frac{1}{m}, y=\frac{1}{n}$ 14. $x=a, y=b$ 15. $x=\frac{a^2bc}{a^2+b^2}, y=\frac{1}{bc}$
16. $x=5, y=9$.

প্রশ্নমালা 27 (পৃঃ 95—100)

1. 32 বৎসর, 11 বৎসর 2. 30 বৎসর 3. 45 বৎসর
4. পিতা—40 ব., বড় ছেলে—10 ব., ছোট ছেলে—8 ব.
5. 45 6. 63 7. 75 8. 253 9. $\frac{15}{26}$
10. $\frac{3}{7}$ 11. $\frac{17}{3}$ মি., $\frac{13}{3}$ মি. 12. $2\frac{26}{27}$ মি.
13. 18 দিন, 36 দিন 14. A—6 দিন, B—16 দিন 15. $6\frac{6}{19}$ মিনিট
16. 210 কি. মি. 17. ঘণ্টায় 10 কি. মি.
18. A—$10\frac{29}{30}$ কি. মি., B—$10\frac{8}{15}$ কি. মি. 19. ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ কি. মি.
20. ঘণ্টায় 4 কি. মি. ; ঘণ্টায় 1 কি. মি. 21. 1000
22. 450 23. টা. 156·25 24. 10000 টাকা
25. $2\frac{2}{49}$% ক্ষতি 26. 4600 টাকা
27. ঘোড়া—400 টা., গাড়ী—300 টা. 28. 600
29. 2448 30. 1200
31. 10টা $10\frac{5}{11}$ মিনিট এবং 10টা $38\frac{2}{11}$ মিনিট
32. (i) 2টা $10\frac{10}{11}$ মিনিট (ii) 2টা $43\frac{7}{18}$ মিনিট
33. 3টা $10\frac{10}{11}$ মিনিট এবং 3টা $21\frac{9}{11}$ মিনিট
34. 5টা $32\frac{4}{13}$ মিনিট 35. 3টা $41\frac{7}{13}$ মিনিট 36. 3টা $1\frac{4}{11}$ মিনিট
37. 4টা 48 মিনিট 38. 135 এবং 9 39. 300 টাকা
40. 150 এবং 100 41. 14 এবং 6 42. 2400 লিটার

43. 57 টাকা　44. 24 জন, 120 টাকা　45. 3টি
46. পক্ষে 84, বিপক্ষে 63　47. $\frac{1}{3}(a+4b)$

প্রশ্নমালা 29 (পৃ: 112—113)

3. (i) $x-2y+7=0$ (ii) $3x+2y=14$ (iii) $2x+3y=7$ (iv) $7x-5y+1=0$　4. 1, 1　5. $-12, 20$
6. 2, 3　7. 3　8. -2
9. 7, -5　10. 7　11. 7, 7
12. (10, 2), (2, 10), (-2, 2)　13. (3, 0), (0, 4) ; 6 বর্গ একক
14. $4x-5y+7=0$

প্রশ্নমালা 30 (পৃ: 113—117)

1. (*a*) 0 (*b*) $\frac{3}{8}$　2. 158, 474
3. (*a*) $(a+b-c)(a-b+c)$　(*b*) $(2x+z)(2x-2y-z)$
4. $\dfrac{a(a-b+c)}{c(a+b+c)}$　5. $(x-3)$
7. ·3　8. $\dfrac{1}{ab}$　9. 16
10. (*a*) $(x^2+x-1)(x^2-x-1)$　(*b*) $(a+b+1)(a+b-1)$
11. 322　12. 1　13. $(x-3\frac{1}{2})^2-(5\frac{1}{2})^2$
14. $x^2(x-2)(x+2)(x+4)$　16. $-(a+2b+3c)$
17. $2\frac{1}{2}$ ঘণ্টা　18. (i) 6
19. (*a*) $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$　(*b*) $(x-1)(x^2+x-1)$
21. $x=3, y=1$　22. $\dfrac{4x^4}{1-x^4}$　23. $x-2$
24. $x^2(x-1)(x-2)(x+3)$　25. -1
26. 60　27. (3, 2)　28. (*a*) $(x-a)^2(x+2a)$ (*b*) $(5-x)(3x+1)$　30. $(x+2)(2x-1)(3x+1)$

31. $2x+5$ 32. (a) 6 (b) 2 33. $\frac{7}{8}$

34. $(a-1)^2-8^2$ 35. 0 36. (a) $(2-x)(7x-3)$

(b) $(2x+z)(2x-2y-z)$ 37. (i) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

38. $3x^3-8x-3$ 39. (a) $x=1, y=2$ (b) $x=8, y=12$

40. $x=3$ 41. 38 বৎসর, 14 বৎসর 42. (a) $x+2$

(b) $6x^5+29x^4+27x^3-27x^2-29x-6$ 43. 1

44. 520 টাকা 46. (a) $\left(x-\frac{a}{b}\right)\left(x+\frac{b}{a}\right)$ (b) (x^3-3x-6)

$(x^2-3x-16)$

47. 1 48. (a) $x=\frac{1}{4}, y=-4$ (b) $x=\frac{ac-bd}{a^2-b^2}, y=\frac{ad-bc}{a^2-b^2}$

49. $(x+7)$; $(x+7)(3x-5)(x-5)(x-3)(x^2-7x+49)$

50. 16 মিটার, 12 মিটার 51. $\frac{2a}{a+b}$ 53. $(4, -3)$

প্রশ্নমালা 31 (পৃঃ 120—121)

1. ± 12 2. ± 10 3. $\pm a^2$ 4. ± 4 5. $\pm 1\frac{1}{3}$

6. ± 6 7. ± 1 8. $\pm\sqrt{6}$ 9. $\pm 2\frac{1}{2}$ 10. ± 3

11. ± 2 12. ± 8 13. ± 1 14. $\pm\sqrt{\frac{6}{7}}$

15. $\pm\sqrt{ab}$ 16. ± 1 17. $\pm\sqrt{13}$ 18. ± 7

19. $\pm\sqrt{-3}$ 20. $\pm\sqrt{mn}$

প্রশ্নমালা 32 (পৃঃ 125—126)

1. $\frac{1}{3}$ বা 3 2. 8 বা 9 3. 2 বা $-$[illegible]

4. 37 বা -11 5. 0 বা $-1\frac{5}{6}$

6. 1 বা $-\frac{3}{4}$ 7. -2 বা $-2\frac{5}{6}$

8. $\frac{3}{4}$ বা 12 9. a বা $\frac{1}{a}$ 10. 1 বা $-\frac{1}{2}(a+b+c)$

11. -4 বা 2 12. 0 বা $\frac{2}{3}$ 13. 6 বা 9

14. $2m$ বা $1\frac{2}{3}m$ 15. 0 বা -7 16. $-\frac{3}{4}a$ বা $1\frac{1}{3}a$

17. 4 বা $1\frac{1}{2}$ 18. 3 বা $-7\frac{5}{9}$ 19. 9 বা $1\frac{2}{13}$

20. $1\frac{2}{3}$ বা -9 21. 4 বা 12 22. 0 বা $(2a-b)$

23. $\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$ $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 24. 25 বা $\frac{1}{25}$ 25. $(a+b)$

26. $(a+b+c)$ 27. $-2\pm\sqrt{10}$ 28. $-11a\pm\sqrt{13a^2}$

প্রশ্নমালা 33 (পৃ: 128—129)

1. 3 2. 12, 16 3. $-6, 7$ 4. 11, 12

5. 4, 7 6. 12 মিটার, 10 মিটার 7. 50 মিটার, 40 মিটার

8. 5 মিটার, 6 মিটার 9. ঘণ্টায় 7 কি. মি

10. A—ঘণ্টায় $2\frac{1}{2}$ কি. মি., B—ঘণ্টায় $7\frac{1}{2}$ কি. মি.

11. 4 12. 50 13. 40 টাকা বা 60 টাকা

14. 15 সে. মি., 12 সে. মি. 15. 7 সে. মি.

16. দৈর্ঘ্য—$5\frac{1}{3}$ মিটার, প্রস্থ—4 মিটার

17. স্রোত—2 কি.মি., নৌকা—4 কি. মি.

প্রশ্নমালা 34 (পৃ: 136—137)

1. (a) $13:18$ (b) $49:65$ (c) $x+y:x-2y$ (d) $a+b:b$ 2. (a) $1:4$ (b) $x:y$ (c) $a^2-b^2:a^2+b^2$ (d) $(x+3y)^2:(x+y)^2$

3. 24, 48 4. $25:49$, $5:11$ 5. $\pm\sqrt{ab}$

6. (a) $2:1$ (b) $2:1$ অথবা $1:3$

7. 14 বৎসর, 21 বৎসর 8. 100, 96 9. 72, 108

10. 52, 91 11. 143, 187 12. $\frac{ay-bx}{x-y}$

13. $\frac{mq-np}{q-p}$ 14. (i) $1\frac{1}{81}$ (ii) $1\frac{\;}{215}$ 20. $\frac{ab}{3b-2a}$

প্রশ্নমালা 35 (পৃঃ 140—141)

1. (a) $\frac{bc^3}{a}$ (b) $36c^2$ (c) $\frac{m^3}{n^3}$ (d) $x^6y^2z^7$

2. (a) $x+y$ (b) $\frac{(x+y)^3}{x^2+xy+y^2}$

3. (a) $9a^2$ (b) $2\sqrt{3}$ 4. 6

প্রশ্নমালা 36 (পৃঃ 148—151)

30. 0 39. 0

প্রশ্নমালা 37 (পৃঃ 153—154)

1. $3\frac{1}{2}$ 2. 4 3. -7 4. 4
5. $-1\frac{1}{3}$ 6. $-3\frac{1}{2}$ 7. 13 8. $-6\frac{1}{2}$
9. $2\frac{3}{4}$ 10. $\frac{2}{5}$

প্রশ্নমালা 38 (পৃঃ 157—158)

.1 24, 15 2. A—72 বৎসর, B—63 বৎসর
3. A—48 বৎসর, B—60 বৎসর 4. 100 গ্রাম
5. B 6. প্রথম দলে 7. 28 লিটার
8. 3 : 2 9. 4 : 1 10. 4 : 5

প্রশ্নমালা 39 (পৃঃ 165—166)

1. 5 2. -1 3. 3 4. 2
5. 2 6. 4 7. 5 8. 4
9. 6 10. 6 11. 14 12. 2
13. $x=-1, y=14$ 14. $x=0, y=15$
15. $x=3, y=2$ 16. $x=3, y=19$
17. $x=2, y=6$ 18. $x=-3, y=0$

19. $x=3, y=-2$
20. $x=0, y=-3$
21. $x=2\frac{1}{2}, y=-2$
22. $x=6, y=3$
23. $x=2, y=1$
24. $x=3, y=4$
25. $x=3, y=4$
26. $x=3\frac{1}{2}, y=2\frac{1}{4}$
27. $x=1, y=1\frac{1}{2}$
28. $x=2$
29. $x=1,\ y=1,$ 1 সমকোণ

প্রশ্নমালা 40 (পৃঃ 167—173)

1. (i) $(x+1)^2(x-1)$ (ii) $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$
2. $\dfrac{1}{x+1}$
3. $(x+1)(x-2)$
4. $12(2x-1)^2(x+1)^2$
5. $a^4-4a^2b+2b^2$
6. 9·9
7. 300 টাকা, 350 টাকা, 410 টাকা
9. $2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$
11. $x=2a+b, y=a+2b$
12. 0
14. 30 কি. গ্রা.
15. (a) $(x+a)(x+b+c)$ (b) $(x+y-z)(x-y+z+1)$
16. $\dfrac{a+b}{c^2-a^2-b^2+2ab}$
17. $x=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{7}$
18. $x=4$
19. প্রথমটি
21. 15, 35
22. $-3\frac{4}{11}$
23. $(x^2+5x+7)(x^2+5x+3)$
24. a^2-2a+3
25. $(x+2)(2x-1)(3x+1)$
26. $\frac{1}{8}$
27. 0
28. $(x^2+7x+11)^2+7^2$
29. $x=10, y=4$
30. (i) $\pm\sqrt{a^2-b}$ (ii) 1 বা $\frac{1}{3}$
31. $\frac{1}{3}$
32. (a) x^2+4x+1 (b) $(3-x-y)(x^2-5x+4-y^2+3y)$
35. (i) $x=2a-b, y=2b-a$ (ii) $\dfrac{1}{ab}$
36. (i) $(x+a+b)(x-a-b)(x+a-b)(x-a+b)$ (ii) $(1+a)(1+b+c)$ (iii) $(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$

37. A—10 দিনে, B—15 দিনে।

44. (i) 3 (ii) $x=4, y=10$ 46. $5:2$

48 2264 49. (i) $(3x-1)(7x-2)(4x-1)$

(ii) x^2+2x+3 50. (i) $3\frac{1}{3}$ (ii) $x=3, y=3$

51. 530 53. 1 54. 3

55. (i) $(4a-b)(23a^2-5ab+2b^2)$ (ii) $(5x+4y)(x-2y)$

56 $x=y=5$ 57. $1:1$

58. $\dfrac{a+3x}{a}$ 59. $\frac{1}{2}(a+b)$ 60. $\dfrac{2(a+x)}{a^2+ax+x^2}$

61. $(1+2x)(1-2x)(1+2x+4x^2)(1+2x-4x^2)$

62. $2a^2-a-3$ 63. (i) $2(1+a)(1+c)(a-c)$

(ii) $(a^2+1)(b^2+1)(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)$ 64. ঘণ্টায় 7 কি. মি

65. (i) $\pm 2, \pm 3$ (ii) 25 বা $\frac{1}{25}$ 66. $\dfrac{1}{1-x}$

69 84 70. (i) $90°$ (ii) $x=3, y=3$; $x=-3$ হইলে অপেক্ষকটি 0 হইবে।

71 (ii) $\dfrac{4a}{a^2+4}$ 73. 30 কি. গ্রা. 74. $13:7$

75. (i) 66, 88 (ii) 12, 21

প্রশ্নমালা 41 (পৃঃ 176—177)

1. $8m^3+n^3-12mn+8$
2. $x^3-8y^3-z^3-6xyz$
3. $a^3-125b^3+15ab+1$
4. $27-p^3-216q^3-54pq$
5. 0
6. $4a^3+4b^3+4c^3-12abc$
7. $(a+5b-2)(a^2+25b^2+4-5ab+10b+2a)$
8. $2(x+3y-2)(x^2+9y^2+4-3xy-2x-6y)$
9. $(x^2+x+1)(x^4-x^3-x+1)$
10. $(x^2-x+2)(x^4+x^3-x^2+2x+4)$
11. $-3(2a-b-c)(2b-c-a)(2c-a-b)$

12. $3(2a+b+c)(a+2b+c)(a+b+2c)$

13. $1\frac{1}{2}$ 14. 345800

15. 99 16. 105

17. -25 18. 104

প্রশ্নমালা 42 (পৃঃ 182)

1. $-(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$

2. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$ 3. $(a+b)(b+c)(c+a)$

4. 1 5. -1 6. -1

7. $a+b+c$ 8. 2 9. x

জ্যামিতি

জ্যামিতি

(নবম শ্রেণী)

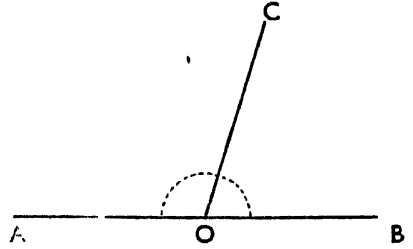
প্রথম অধ্যায়

স্বতঃসিদ্ধ ও উপপাদ্য
(Axioms and Theorems)

[পুনরালোচনা]

পূর্ববর্তী শ্রেণীসমূহে তোমরা যে সকল স্বতঃসিদ্ধ এবং উপপাদ্য শিক্ষা করিয়াছ, এখানে সংক্ষেপে তাহার পুনরালোচনা করা হইতেছে।

স্বতঃসিদ্ধ (i) একটি সরলরেখার উপর অপর একটি সরলরেখা দণ্ডায়মান হইলে যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

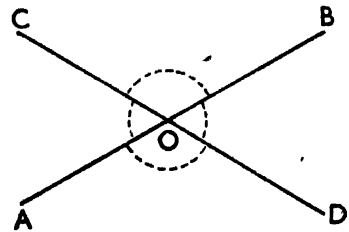
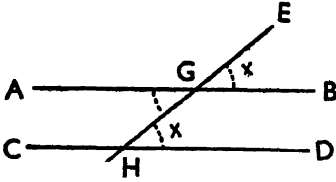
AB সরলরেখার উপর OC সরলরেখা দণ্ডায়মান হওয়ায় ∠AOC এবং ∠BOC দুইটি সন্নিহিত কোণের উৎপত্তি হইয়াছে। উহাদের সমষ্টি, অর্থাৎ ∠AOC + ∠BOC = 2 সমকোণ।

স্বতঃসিদ্ধ (ii) দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইলে উহাদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকিবে।

উপরের চিত্রে, ∠AOC এবং ∠BOC সন্নিহিত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান এবং এই কোণ দুইটির সাধারণ বাহু OC; সুতরাং OA এবং OB ঐ কোণদ্বয়ের বহিঃস্থ বাহু। OA এবং OB একই সরলরেখায় অবস্থিত।

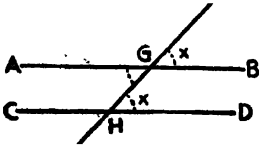
উপপাদ্য 1. দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করিলে, বিপ্রতীপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

∴ (i) ∠AOC = বিপ্রতীপ ∠BOD

এবং (ii) ∠AOD = বিপ্রতীপ ∠BOC

অনুসিদ্ধান্ত (iii) একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে যদি উৎপন্ন অনুরূপ কোণদ্বয় পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে শেষোক্ত সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইবে।

EF সরলরেখাটি AB এবং CD সরলরেখা দুইটিকে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করায় ∠EGB = অনুরূপ ∠GHD উৎপন্ন হইয়াছে।

সুতরাং, AB এবং CD সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল।

উপপাদ্য 2. কোন একটি সরলরেখা অপর দুইটি সরলরেখাকে ছেদ করিলে, যদি (i) একান্তর কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, অথবা, (ii) ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়, তাহা হইলে শেষোক্ত সরলরেখাদ্বয় সমান্তরাল হইবে।

EF সরলরেখা AB এবং CD সরলরেখা দুইটিকে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

যেহেতু, (i) ∠AGH = একান্তর ∠GHD

এবং (ii) অন্তঃকোণ ∠BGH + অন্তঃকোণ ∠GHD = 2 সমকোণ;

সুতরাং, AB ও CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

উপপাদ্য 3. কোন সরলরেখা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করিলে (i) একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান, (ii) অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান এবং (iii) ছেদকের একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হইবে।

উপরের চিত্রে EF সরলরেখা AB এবং CD সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়কে যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

সুতরাং, (i) ∠AGH = একান্তর ∠GHD,

(ii) ∠EGB = অনুরূপ ∠GHD

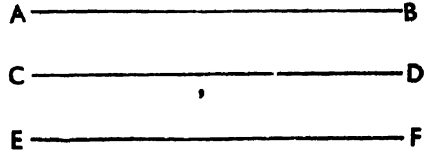
এবং (iii) অন্তঃকোণ ∠BGH + অন্তঃকোণ ∠GHD = 2 সমকোণ।

প্লেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ :

দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার উভয়েই তৃতীয় একটি সরলরেখার সমান্তরাল হইতে পারে না।

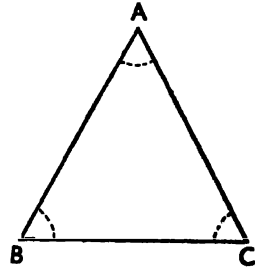
AB এবং CD দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করায় উহারা উভয়ে কখনও তৃতীয় সরলরেখা EF-এর সমান্তরাল হইতে পারে না।

উপপাদ্য 4. যে সকল সরলরেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল, তাহারা পরস্পর সমান্তরাল।

AB এবং CD সরলরেখাদ্বয়ের প্রত্যেকে EF সরলরেখার সমান্তরাল।

সুতরাং, AB ও CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

উপপাদ্য 5. ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

ABC একটি ত্রিভুজ।

ইহার $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB$ $=2$ সমকোণ।

উপপাদ্য 6. ত্রিভুজের যে-কোন একটি বাহুকে বর্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ: উৎপন্ন হয়, তাহা বিপরীত অন্তঃকোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করায় ACD বহিঃকোণটি উৎপন্ন হইয়াছে এবং $\angle ABC$ ও $\angle BAC$ ঐ বহিঃ-কোণটির দুইটি বিপরীত অন্তঃকোণ।

সুতরাং, $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$.

উপপাদ্য 7. যে-কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি, উহার বাহু-সংখ্যার দ্বিগুণ সংখ্যক সমকোণ অপেক্ষা চারি সমকোণ কম।

ABCDEF একটি বহুভুজ এবং ইহা ছয়টি বাহুবিশিষ্ট।

সুতরাং, ইহার $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=(2\times6-4)$ অর্থাৎ, 8 সমকোণ।

উপপাদ্য 8. প্রবৃদ্ধকোণহীন কোন বহুভুজের বাহুগুলি পর্যায়ক্রমে একই দিকে বর্ধিত করিলে যে বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সমকোণের সমান।

ABCDEF একটি প্রবৃদ্ধকোণহীন বহুভুজ। ইহার বাহুগুলিকে পর্যায়ক্রমে একই দিকে বর্ধিত করায় $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ ও $\angle F$ বহিঃকোণগুলি উৎপন্ন হইয়াছে।

সুতরাং, $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=4$ সমকোণ।

ত্রিভুজের সর্বসমতা :

প্রত্যেক ত্রিভুজের মোট ছয়টি অঙ্গ আছে,—তিনটি বাহু এবং তিনটি কোণ।

যদি কোন ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গই যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গের সমান হয়, তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটিকে সর্বসম (congruent) বলা হয়।

স্বতসিদ্ধ (iv) কোন ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ যথাক্রমে অপর এক ত্রিভুজের দুই বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণের সমান হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

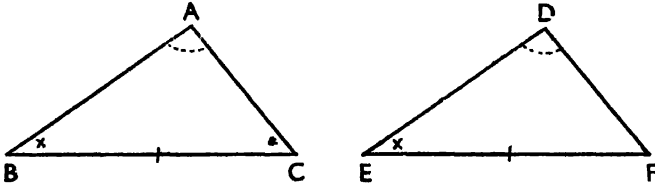
ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ে,

$AB=DE$,

$AC=DF$

এবং অন্তর্ভূত $\angle BAC=$ অন্তর্ভূত $\angle EDF$.

সুতরাং, $\triangle ABC\cong\triangle DEF$.

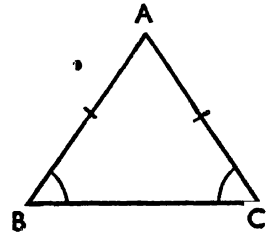
স্বতঃসিদ্ধ (v) কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপর এক ত্রিভুজের অনুরূপ দুইটি কোণ ও অনুরূপ বাহুর সমান হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ে $\angle BAC = \angle EDF$, $\angle ABC = \angle DEF$

এবং $BC = EF$;

সুতরাং, $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

উপপাদ্য 9. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হইলে ঐ দুই বাহুর বিপরীত কোণদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

ABC ত্রিভুজে AB বাহুর বিপরীত কোণ $\angle ACB$ এবং AC বাহুর বিপরীত কোণ $\angle ABC$.

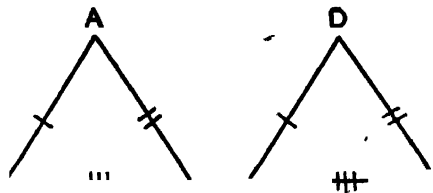
এখন, $AB = AC$. $\therefore$ $\angle ACB = \angle ABC$.

উপপাদ্য 10. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হইলে ঐ দুই কোণের বিপরীত বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে।

উপরের চিত্রে, ABC ত্রিভুজে $\angle ABC$ কোণের বিপরীত বাহু AC এবং $\angle ACB$ কোণের বিপরীত বাহু AB.

এখন, $\angle ABC = \angle ACB$. $\therefore$ $AC = AB$.

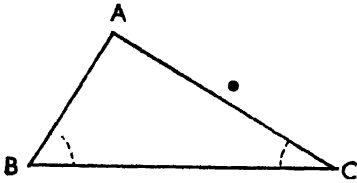
উপপাদ্য 11. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে অপর এক ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমান হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ে $AB = DE$, $AC = DF$ এবং $BC = EF$.

সুতরাং $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$.

উপপাদ্য 12. দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় পরস্পর সমান এবং একটির এক বাহু অপরটির এক বাহুর সমান হইলে, ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হইবে।

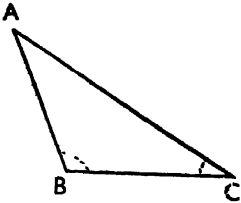
ABC ও DEF দুইটি সমকোণী ত্রিভুজে AC অতিভুজ = DF অতিভুজ, AB বাহু = DE বাহু।

স্থতরাং, সমকোণী △ABC ≡ সমকোণী △DEF.

উপপাদ্য 13. কোন ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণটি ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ABC ত্রিভুজে AC বাহুর বিপরীত কোণ ∠ABC এবং AB বাহুর বিপরীত কোণ ∠ACB.

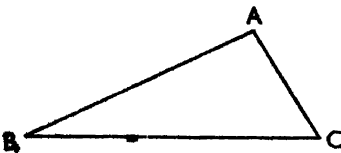
ত্রিভুজটির AC বাহু > AB বাহু ;

স্থতরাং, ∠ABC > ∠ACB.

উপপাদ্য 14. কোণ ত্রিভুজের একটি কোণ, অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু, ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

ABC ত্রিভুজে ∠ABC-এর বিপরীত বাহু AC এবং ∠ACB-এর বিপরীত বাহু AB.

ত্রিভুজটির ∠ABC > ∠ACB.

স্থতরাং, AC বাহু > AB বাহু।

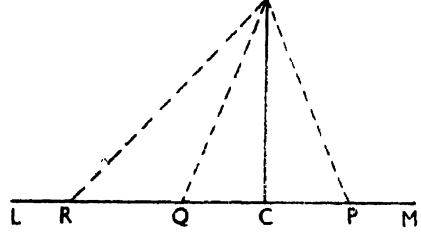
উপপাদ্য 15. ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

ABC ত্রিভুজের AB, BC ও CA তিনটি বাহু। ইহার AB + AC > BC,

AB + BC > AC

এবং AC + BC > AB.

উপপাদ্য 16. কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখা পর্যন্ত অঙ্কিত যাবতীয় সরলরেখাগুলির মধ্যে লম্বই ক্ষুদ্রতম।

LM সরলরেখাটির উপর বহিঃস্থ বিন্দু O হইতে OR, OQ, OC এবং OP রেখাগুলি অঙ্কন করা হইয়াছে।

OC রেখাটি LM রেখার উপর লম্ব; স্থতরাং, OR, OQ, OC এবং OP রেখাগুলির মধ্যে OC-ই ক্ষুদ্রতম।

অনুশীলনী 1

1. দুইটি বিপ্রতীপ কোণের দ্বিখণ্ডকদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকিবে।

2. যে-কোন কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের দ্বারা গঠিত কোণটি এক সমকোণের সমান। [D. B. 1942]

3. যদি দুইটি কোণের দুই বাহুই পরস্পর সমান্তরাল হয়, তাহা হইলে কোণ দুইটি, (i) হয় পরস্পর সমান, নতুবা (ii) পরস্পরের সম্পূরক হইবে।

4 যদি দুইটি সরলরেখা অপর একটি সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তাহা হইলে পূর্বোক্ত সরলরেখাদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হইবে। [C. U. 1917]

5. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু দিয়া ভূমির সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন করিলে উহা শিরঃকোণের বহির্দ্বিখণ্ডক হইবে।

6. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার কোন ছেদকের একই পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি অন্তঃকোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি এক সমকোণের সমান।

7. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা তিনটি একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

8. চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণ।

9. সমবাহু ত্রিভুজের কোণগুলি পরস্পর সমান।

10. কোন ত্রিভুজের ভূমি উভয় দিকে বর্ধিত করিলে যে দুইটি বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা পরস্পর সমান হইলে উহা একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

11. ABC ত্রিভুজের $\angle ABC$ ও $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। যদি BO = CO হয়, তবে প্রমাণ কর, $\triangle ABC$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

12. একই ভূমির উপর এবং তাহার একই পার্শ্বস্থ দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক-সরলরেখা ভূমি পর্যন্ত বর্ধিত করিলে উহা ত্রিভুজদ্বয়ের শিরঃকোণ দুইটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে এবং ভূমির উপর লম্ব হইবে।

13. ABC ত্রিভুজের B ও C বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্ব দুইটি পরস্পর সমান হইলে, প্রমাণ কর, উহা একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

[**ইঙ্গিত**: ABC ত্রিভুজের AC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর BD ও CE যথাক্রমে B ও C হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয় এবং $BD = CE$ উপ 12 অনুসারে, $\triangle DBC \equiv \triangle EBC$.
∴ $\angle B = \angle C$ অর্থাৎ, $AB = AC$, ইত্যাদি।]

14. ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহুসংলগ্ন কোণদ্বয় সূক্ষ্মকোণ।

15. সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় পরস্পর সমান।

16. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে অঙ্কিত মধ্যমা ভূমির উপর লম্ব।

17. চতুর্ভুজের যে-কোন দুইটি সন্নিহিত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণটি চতুর্ভুজের অপর দুইটি কোণের সমষ্টির অর্ধেক। [W B S. B 1955]

18. ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর অন্তর তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।
[W. B. C S. 1955]

19. D, ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু। BD ও CD যুক্ত করিলে, প্রমাণ কর যে, $AB + AC > BD + DC$.

[**ইঙ্গিত**: BD-কে বর্ধিত কর, উহা যেন AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে।
∴ $AB + AE > BE = BD + DE$ সুতরাং, $AB + AE + EC > BD + DE + EC$, কিন্তু $DE + EC > DC$. ∴ $AB + AC > BD + DC$]

20. ABC ত্রিভুজের ∠B ও ∠C-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

21. যদি ABC ত্রিভুজের BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$.

22. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে অতিভুজের মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা অতিভুজের অর্ধেক হইবে

23. কোন চতুর্ভুজের পরিসীমা উহার কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

24. কোন ত্রিভুজের পরিসীমা উহার মধ্যমা তিনটির সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর।

25. কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপর সূক্ষ্মকোণটির দ্বিগুণ হইলে, অতিভুজটি ক্ষুদ্রতম বাহুর দ্বিগুণ হইবে। [W. B. S. B. 1956]

26. কোন বহুভুজের বাহুসংখ্যা 7 ; উহার অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি কত ?

27. কোন বহুভুজের অন্তঃকোণগুলির সমষ্টি ও বহিঃকোণগুলির সমষ্টি পরস্পর সমান হইলে উহার বাহুসংখ্যা কত ? [C. U. 1949 (Suppl.)]

28. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু, অপর একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর সমান্তরাল হইলে, উহাদের অনুরূপ কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে। [C. U. 1932]

29. ABCD চতুর্ভুজের মধ্যস্থ একটি বিন্দু P ; যদি PA = PC হয়, প্রমাণ কর, PB ও PD একই সরলরেখায় অবস্থিত হইবে। [C. U. 1945]

30. ABC ত্রিভুজে AB > AC. AD সরলরেখা ∠A-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BC-এর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর, BD > CD.

[**ইঙ্গিত** ঃ AB হইতে AC-এর সমান করিয়া AE অংশ কাটিয়া লও এবং DE সংযুক্ত কর। △ADE ≡ △ADC. এখন, ∠BED > বিপরীত অন্তঃকোণ ∠ADE = ∠ADC > বিপরীত অন্তঃকোণ ∠ABD. ∴ উপ. 14 অনুসারে, BD > DE = CD.]

31. ABC একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। AB উহার অতিভুজ। ∠A-র সমদ্বিখণ্ডক BC-এর সহিত D বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর, AB = AC + CD. [C. U. 1923]

32. ABCD চতুর্ভুজের AD বৃহত্তম এবং BC ক্ষুদ্রতম বাহু। প্রমাণ কর, ∠BCD > ∠BAD. [C. U. 1940]

33. ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। প্রমাণ কর, ACE একটি সমবাহু ত্রিভুজ। [C. U. 1918]

34. সমকোণী ত্রিভুজ ABC-এর AC অতিভুজ। BC-এর উপর D একটি বিন্দু, এবং BC-কে বর্ধিত করিয়া বর্ধিতাংশের উপর E বিন্দু লইলে, প্রমাণ কর, AC > AD, কিন্তু < AE.

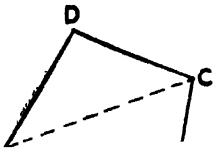
35. ABC ত্রিভুজের মধ্যে O যে-কোন একটি বিন্দু লওয়া হইল ; প্রমাণ কর, AB + BC + CA > OA + OB + OC. [উদা. 19-এর সাহায্যে প্রমাণ কর।] [C. U. 1937]

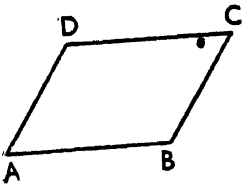
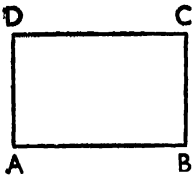
দ্বিতীয় অধ্যায়

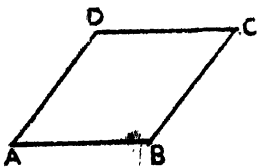
সামান্তরিক

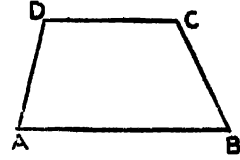
(Prallelograms)

সংজ্ঞা ঃ

ঃ চারিটি সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ সামতলিক ক্ষেত্রকে **চতুর্ভুজ** (Quadrilateral) বলে। ABCD একটি চতুর্ভুজ।

চতুর্ভুজের বিপরীত কৌণিকবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে চতুর্ভুজের **কর্ণ** (Diagonal) বলে। ABCD চতুর্ভুজের AC একটি কর্ণ।

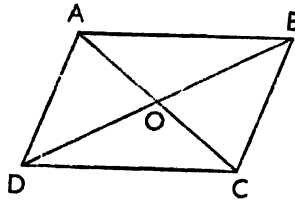
যে বাহুগুলি দ্বারা চতুর্ভুজটি সীমাবদ্ধ, তাহাদের প্রত্যেককে চতুর্ভুজের **বাহু** বা **ভুজ** (Side) বলে।

সামান্তরিক ঃ যে চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলি সমান্তরাল, তাহাকে **সামান্তরিক** (Parallelogram) বলে। ABCD একটি সামান্তরিক।

আয়তক্ষেত্র ঃ যে সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, তাহাকে **আয়তক্ষেত্র** (Rectangle) বলে। ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

বর্গক্ষেত্র ঃ যে আয়তক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান, তাহাকে **বর্গক্ষেত্র** (Square) বলে। ABCD একটি বর্গক্ষেত্র।

রম্বস ঃ যে সামান্তরিকের বাহুগুলি পরস্পর সমান, কিন্তু কোণগুলি সমকোণ নহে, তাহাকে **রম্বস** (Rhombus) বলে। ABCD একটি রম্বস।

ট্রাপিজিয়াম : যে চতুর্ভুজের দুইটি বাহু সমান্তরাল এবং অপর দুইটি বাহু তির্যক, তাহাকে **ট্রাপিজিয়াম** (Trapezium) বলে। ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম।

ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহু দুইটি পরস্পর সমান হইলে উহাকে **সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম** (Isosceles Trapezium) বলে।

উপপাদ্য 17

সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি এবং বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সমান ; প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে এবং উহার কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(The opposite sides and angles of a parallelogram are equal, each diagonal divides the parallelogram into two congruent triangles and diagonals of a parallelogram bisect one another.)

মনে কর, ABCD একটি সামান্তরিক এবং উহার AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে,

(i) $AB = DC$, (ii) $AD = BC$, (iii) $\angle ABC = \angle ADC$, (iv) $\angle BAD = \angle BCD$, (v) $\triangle ABC \cong \triangle ADC$, (vi) $\triangle BAD \cong \triangle BCD$ এবং (vii) $AO = OC$ ও $BO = OD$.

প্রমাণ : $AB \parallel CD$ এবং AC উহাদের ছেদক ; $\therefore$ $\angle BAC =$ একান্তর $\angle ACD$.

আবার, $AD \parallel BC$ এবং AC উহাদের ছেদক ; $\therefore$ $\angle DAC =$ একান্তর $\angle ACB$.

এখন, ABC ও ADC ত্রিভুজদ্বয়ে

$\angle BAC = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle CAD$ এবং AC সাধারণ বাহু,

∴ (v) $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$.

∴ (i) $AB = DC$, (ii) $AD = BC$ এবং (iii) $\angle ABC = \angle ADC$.

আবার, $\angle BAC = \angle ACD$ ও $\angle DAC = \angle ACB$

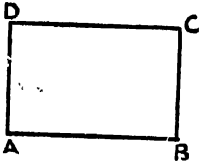
∴ (iv) সমগ্র $\angle BAD =$ সমগ্র $\angle BCD$.

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, (vi) BD কর্ণও সামান্তরিকটিকে $\triangle BAD$ ও $\triangle BCD$, এই দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

আবার, AOD এবং COD ত্রিভুজদ্বয়ে

$\angle OAD = \angle OCB$, $\angle ODA = \angle OBC$ এবং $AD = BC$.

∴ $\triangle AOD \equiv \triangle COB$ ∴ (vii) $AO = OC$ এবং $BO = OD$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. কোন সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হইলে উহার সকল কোণই সমকোণ হইবে।

মনে কর, ABCD একটি সামান্তরিক এবং ইহার $\angle D$ একটি সমকোণ।

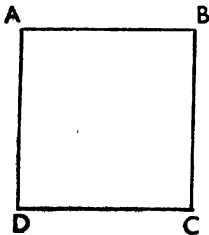
প্রমাণ করিতে হইবে, সামান্তরিকটির প্রতিটি কোণ এক সমকোণ।

প্রমাণ : AB ∥ CD এবং AD উহাদের ছেদক,

∴ $\angle A + \angle D = 2$ সমকোণ ; ∴ $\angle A$ একটি সমকোণ।

আবার, ABCD একটি সামান্তরিক ; ∴ $\angle D = \angle B$ এবং $\angle A = \angle C$.

∴ $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D =$ এক সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত 2. কোন আয়তক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু পরস্পর সমান হইলে, উহার সকল বাহুই পরস্পর সমান হইবে।

মনে কর, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র এবং ইহার দুইটি সন্নিহিত বাহু AB ও BC পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে, আয়তক্ষেত্রটির সকল বাহু পরস্পর সমান।

প্রমাণ : যেহেতু আয়তক্ষেত্রও একটি সামান্তরিক,

∴ $AB = CD$ এবং $AD = BC$.

$AB = BC$, ∴ $AB = CD = AD = BC$.

উপপাদ্য 18

যদি কোন চতুর্ভুজের—

(i) বিপরীত বাহুযুগলের উভয় যুগলই পরস্পর সমান হয়,

বা, (ii) বিপরীত কোণযুগলের উভয় যুগলই পরস্পর সমান হয়,

বা, (iii) বিপরীত বাহুযুগলের যে-কোন যুগল সমান ও সমান্তরাল হয়,

বা, (iv) কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে,

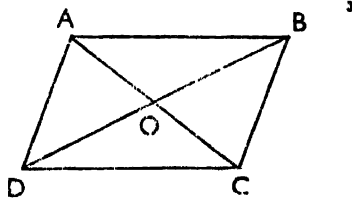
তাহা হইলে চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

(A Quadrilateral is a parallelogram if—

(i) both pairs of opposite sides are equal,

or, (ii) both pairs of opposite angles are equal,

or, (iii) one pair of opposite sides are equal and parallel,

or, (iv) its diagonals bisect one another.)

মনে কর, ABCD একটি চতুর্ভুজ, এবং ইহার (i) AB = DC ও AD = BC, বা, (ii) $\angle$ABC = $\angle$ADC ও $\angle$BAD = $\angle$BCD, বা, (iii) AB = DC ও AB $\parallel$ DC, বা, (iv) AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : (i) ABD ও CBD ত্রিভুজদ্বয়ে AB = CD, AD = BC এবং BD সাধারণ বাহু, $\therefore$ $\triangle$ABD $\equiv$ $\triangle$CBD.

সুতরাং, $\angle$ABD = $\angle$CDB ; [অনুরূপ কোণ বলিয়া]

কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ। $\therefore$ AB $\parallel$ CD.

আবার, $\angle$ADB = $\angle$CBD, [অনুরূপ কোণ বলিয়া]

কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ। $\therefore$ AD $\parallel$ BC.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

(ii) $\angle ADC = \angle ABC$ এবং $\angle BAD = \angle BCD$.

$\therefore \quad \angle ADC + \angle BAD = \angle ABC + \angle BCD$.

চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি = 4 সমকোণ

$\therefore \quad \angle ADC + \angle BAD + \angle ABC + \angle BCD = 4$ সমকোণ

$\therefore \quad 2(\angle ADC + \angle BAD) = 4$ সমকোণ

$\therefore \quad \angle ADC + \angle BAD = 2$ সমকোণ,

ইহারা AB ও CD সরলরেখাদ্বয়ের ছেদক AD-এর একই পার্শ্বস্থ অন্তঃে

$\therefore \quad AB \parallel CD$.

অনুরূপভাবে, $\angle ADC + \angle BCD = 2$ সমকোণ,

ইহারা AD ও BC সরলরেখাদ্বয়ের ছেদক DC-এর একই পার্শ্বস্থ অন্তঃকোণ ;

$\therefore \quad AD \parallel BC$.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

(iii) $AB \parallel DC$ এবং BD ইহাদের ছেদক,

$\therefore \quad \angle ABD =$ একান্তর $\angle CDB$.

এখন, ABD ও CDB ত্রিভুজদ্বয়ে $AB = DC$, BD সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABD =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CDB$. $\therefore \quad \triangle ABD \equiv \triangle CDB$.

$\therefore \quad AD = BC$ এবং $\angle ADB = \angle CBD$; ইহারা একান্তর কোণ, $\therefore$ $AD \parallel BC$.

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

(iv) AOB এবং COD ত্রিভুজদ্বয়ে

$AO = OC$, $BO = OD$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle DOC$

[বিপ্রতীপ কোণ বলিয়া]

$\therefore \quad \triangle AOB \equiv \triangle COD$.

$\therefore \quad \angle ABD$ (অর্থাৎ, $\angle ABO$) $= \angle BDC$ (অর্থাৎ, $\angle ODC$),

এবং ইহারা একান্তর কোণ, $\therefore \quad AB \parallel DC$.

আবার $AB = DC$ [$\because \quad \triangle AOB \equiv \triangle COD$]

এখন, ABCD চতুর্ভুজের AB ও DC বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। [(iii) অনুসারে]

অনুশীলনী 2

1. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হইলে, উহা একটি আয়তক্ষেত্র হইবে। [C. U. 1924]

2. রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. 1935]

3. একই ভূমির বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ একটি সামান্তরিক উৎপন্ন করে। [C. U. 1916]

4. কোন আয়তক্ষেত্রের বাহুসমূহের মধ্যবিন্দুগুলি পর্যায়ক্রমে যোগ করিলে একটি রম্বস গঠিত হয়।

5. কোন সামান্তরিকের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডক রেখা চারিটি দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র হইবে।

6. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইতে যে-কোন সরলরেখা অঙ্কন করিলে উহা সামান্তরিকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

7. ABCD রম্বসের মধ্যে P একটি বিন্দু লওয়া হইল। যদি AP = PB হয়, প্রমাণ কর, PB এবং PD একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকিবে। [C. U. 1945]

8. ABCD এবং ABEF সামান্তরিক দুইটির সাধারণ বাহু AB ; CE এবং DF যুক্ত করিলে, প্রমাণ কর, CDFE একটি সামান্তরিক হইবে।

9. সামান্তরিকের যে-কোন এক বাহুসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় একটি সমকোণ উৎপন্ন করে।

10. রম্বসের কর্ণদ্বয় রম্বসটিকে চারিটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

11. চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের প্রত্যেকটি চতুর্ভুজটিকে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করিলে, চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক হইবে।

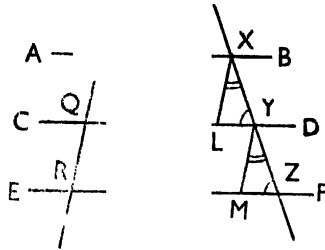
12. P, Q, R ও S বিন্দুগুলি ABCD সামান্তরিকের যথাক্রমে AB, BC, CD ও DA বাহুর উপর অবস্থিত। যদি AP = CR এবং AS = QC হয়, তাহা হইলে PQRS একটি সামান্তরিক হইবে।

13. কোন সামান্তরিকের দুই বিপরীত কৌণিক বিন্দুর সংযোজক কর্ণ হইতে উহার অপর দুই কৌণিক বিন্দুর দূরত্ব পরস্পর সমান। [W. B. S. B. 1960]

14. ABCD একটি সামান্তরিক। P ও Q যথাক্রমে AB ও CD-এর উপর দুইটি বিন্দু। যদি AP = CQ হয়, তবে BPDQ একটি সামান্তরিক।

উপপাদ্য 19

তিন বা তদধিক সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা ছিন্ন কোন ছেদকের অংশগুলি পরস্পর সমান হইলে, উক্ত সমান্তরাল সরলরেখাগুলি দ্বারা ছিন্ন অপর যে-কোন ছেদকের অনুরূপ অংশগুলিও পরস্পর সমান হইবে।

(If there are three or more parallel straight lines, and the intercepts made by them on any one straight line that cuts them are equal, then the corresponding intercepts on any other straight line that cuts them are also equal.)

মনে কর, AB, CD এবং EF তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা PR ছেদককে PQ এবং QR দুইটি সমান অংশে বিভক্ত করিয়াছে। অপর একটি ছেদক XZ-ও উক্ত তিনটি সমান্তরাল সরলরেখা দ্বারা XY এবং YZ অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, XY = YZ.

অঙ্কন: PQR সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া, X বিন্দু দিয়া XL এবং Y বিন্দু দিয়া YM সরলরেখা দুইটি অঙ্কন কর। মনে কর, XL যেন CD-কে L এবং YM যেন EF-কে M বিন্দুতে ছেদ করিল।

প্রমাণ: CD ∥ EF এবং XYZ ইহাদের ছেদক,

∴ ∠XYL = অনুরূপ ∠YZM.

আবার, XL ও YM উভয়েই PQR রেখার সহিত সমান্তরাল,

∴ XL ∥ YM.

XL এবং YM-কে XYZ রেখা যথাক্রমে X এবং Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে,

∴ ∠LXY = অনুরূপ ∠MYZ.

পুনশ্চ, PQLX এবং QRMY উভয়েই সামান্তরিক,

∴ PQ = XL এবং QR = YM.

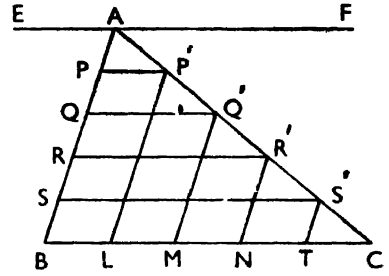
$PQ = QR, \quad \therefore \quad XL = YM.$

এখন, XLY এবং YMZ ত্রিভুজদ্বয়ে

$\angle LXY = \angle MYZ, \ \angle XYL = \angle YZM$ এবং $XL = YM$;

$\therefore \quad \triangle XLY \equiv \triangle YMZ. \quad \therefore \quad XY = YZ.$

অনুসিদ্ধান্ত : ত্রিভুজের একটি বাহু সমান n-সংখ্যক ভাগে বিভক্ত হইলে, ছেদবিন্দুসমূহের মধ্য দিয়া ত্রিভুজটির ভূমির সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখাগুলি ত্রিভুজের অপর বাহুটিকেও সমান n-সংখ্যক ভাগে বিভক্ত করিবে এবং ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য BC হইলে শীর্ষবিন্দু হইতে সমান্তরাল সরলরেখাগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $\frac{BC}{n}, \frac{2BC}{n}, \frac{3BC}{n}$ ইত্যাদি হইবে।

ABC ত্রিভুজের AB বাহুকে AP, PQ, QR, RS এবং SB, সমান 5 ভাগে বিভক্ত করা হইল। P, Q, R এবং S-এর মধ্য দিয়া BC-এর সমান্তরাল করিয়া PP′, QQ′, RR′ এবং SS′ সরলরেখাগুলি অঙ্কিত কর। মনে কর, এই সমান্তরাল সরলরেখাগুলি AC-কে যথাক্রমে P′, Q′, R′ এবং S′ বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে,

$AP' = P'Q' = Q'R' = R'S' = S'C$

এবং $PP' = \frac{BC}{5}, \ QQ' = \frac{2BC}{5}, \ RR' = \frac{3BC}{5}, \ SS' = \frac{4BC}{5}.$

অঙ্কন : A বিন্দুর মধ্য দিয়া BC-এর সমান্তরাল করিয়া EAF সরলরেখা অঙ্কন কর।

প্রমাণ : EF, PP′, QQ′, RR′, SS′ এবং BC পরস্পর সমান্তরাল এবং AB ও AC ইহাদের দুইটি ছেদক।

∵ AB ছেদকের AP, PQ, QR, RS এবং SB পরস্পর সমান ; সুতরাং, AC ছেদকের AP′, P′Q′, Q′R′, R′S′ এবং S′C পরস্পর সমান।

এক্ষণে, P′, Q′, R′ এবং S′ বিন্দুর মধ্য দিয়া যথাক্রমে P′L, Q′M, R′N এবং S′T রেখাগুলি AB-এর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কন কর এবং মনে কর, ইহরা যেন BC-কে যথাক্রমে L, M, N এবং T বিন্দুকে ছেদ করিয়াছে।

∵ AB, P′L, Q′M, R′N এবং S′T পরস্পর সমান্তরাল এবং AC ছেদকের $AP' = P'Q' = Q'R' = R'S' = S'C$;

∴ BC ছেদকের $BL = LM = MN = NT = TC$.

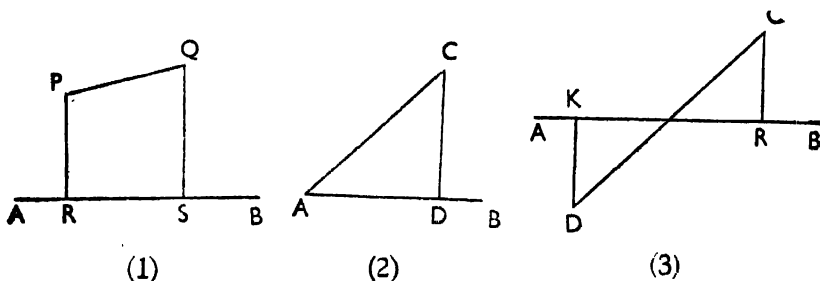
$$QQ' = 2PP',\ RR' = 3PP',\ SS' = 4PP',\ BC = 5PP'$$

$$PP' = \frac{BC}{5},\ QQ' = \frac{2BC}{5}\ \ RR' = \frac{3BC}{5} \text{ এবং } SS' = \frac{4BC}{5}.$$

সুতরাং প্রমাণিত হইল, AB রেখা সমান n-সংখ্যক ভাগে বিভক্ত হইলে, উল্লিখিত ক্ষেত্রে শীর্ষবিন্দু হইতে পর পর সমান্তরাল সরলরেখাগুলির দৈর্ঘ্য হইবে যথাক্রমে $\frac{BC}{n}, \frac{2BC}{n}, \frac{3BC}{n}$ ইত্যাদি

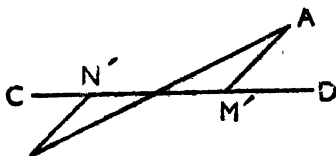
সংজ্ঞা ঃ

লম্ব অভিক্ষেপ ঃ কোন সসীম সরলরেখার প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অপর একটি অসীম সরলরেখার উপর লম্ব অঙ্কন করিলে, উক্ত লম্বদ্বয়ের দ্বারা অসীম সরলরেখার ছিন্ন অংশকে দ্বিতীয় সরলরেখার উপর প্রথম সরলরেখার **লম্ব অভিক্ষেপ** (Orthogonal Projection) বলে।

(1) (2) (3)

চিত্র (1), AB সরলরেখার উপর PQ সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ RS,

চিত্র (2), AB সরলরেখার উপর CD সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ AD

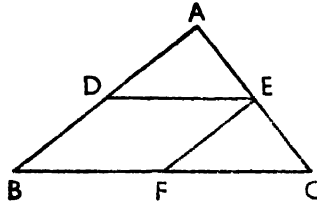
এবং চিত্র (3), AB সরলরেখার উপর CD সরলরেখার লম্ব অভিক্ষেপ KR.

তির্যক অভিক্ষেপ ঃ যদি AB সরলরেখার দুই প্রান্তবিন্দু হইতে লম্ব অঙ্কন না

করিয়া কোন নির্দিষ্ট দিকে CD সরলরেখা পর্যন্ত দুইটি সমান্তরাল রেখা AM′ ও BN′

অঙ্কন করা হয়, তাহা হইলে এই দুইটি সমান্তরাল রেখাদ্বারা CD সরলরেখার ছিন্ন অংশ M′N′-কে CD সরলরেখার উপর AB সরলরেখার **তির্যক অভিক্ষেপ** (Oblique Projection) বলে।

উপপাদ্য 20

ত্রিভুজের কোন এক বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া অপর এক বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা ত্রিভুজের তৃতীয় বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে এবং ত্রিভুজের ঐ দুই বাহু কর্তৃক সরলরেখাটির ছিন্ন অংশ উহার সমান্তরাল বাহুটির অর্ধেক হইবে।

(The straight line drawn through the middle point of one side of a triangle parallel to another side bisects the third side and is equal to half of the parallel side.)

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং D, AB বাহুর মধ্যবিন্দু। D বিন্দু দিয়া BC বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা DE, AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু এবং DE সরলরেখা, BC বাহুর অর্ধেক।

অঙ্কন : E বিন্দু দিয়া AB বাহুর সমান্তরাল করিয়া EF অঙ্কিত কর। মনে কর, EF যেন BC-কে F বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ : DE ∥ BC এবং EF ∥ AB, ∴ DBFE একটি সামান্তরিক।

∴ DE=BE এবং EF=BD=AD. [∵ D, AB বাহুর মধ্যবিন্দু]

আবার, ADE এবং EFC ত্রিভুজদ্বয়ের

∠ECF = অনুরূপ ∠AED [∵ DE ∥ BC এবং AC উহাদের ছেদক]

$\angle DAE$ = অনুরূপ $\angle CEF$ [$\because$ AB $\parallel$ EF এবং AC উহাদের ছেদক]

এবং $AD = EF$. $\therefore$ $\triangle ADE \equiv \triangle EFC$. $\therefore$ $AE = CE$.

অর্থাৎ, E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু।

আবার, $\because$ $\triangle ADE \equiv \triangle EFC$

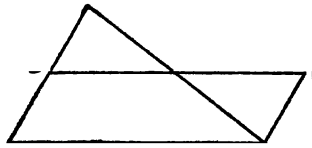
$\therefore$ $DE = FC$.

$\because$ $DE = BF$, $\therefore$ $BF = FC$.

অর্থাৎ, F, BC বাহুর মধ্যবিন্দু। $\therefore$ DE সরলরেখা, BC বাহুর অর্ধেক।

উপপাদ্য 21

ত্রিভুজের যে-কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর **সমান্তরাল** **এবং অর্ধেক।**

(The straight line joining the middle points of two sides of a triangle is parallel to the third side and equal to half of it.)

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং D ও E যথাক্রমে AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে, DE সরলরেখা BC বাহুর সমান্তরাল এবং অর্ধেক।

অঙ্কন : DE-কে F পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন $DE = EF$ হয়। CF যুক্ত কর।

প্রমাণ : AED এবং CEF ত্রিভুজদ্বয়ে

$AE = EC$, $DE = EF$ এবং অন্তর্ভূত $\angle AED$ = অন্তর্ভূত $\angle CEF$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore$ $\triangle AED \equiv \triangle CEF$.

$\therefore$ $AD = FC$; কিন্তু $AD = BD$

$\therefore$ $BD = FC$ ও $\angle DAE = \angle ECF$ (অর্থাৎ $\angle ACF$),

এবং ইঁহারা একান্তর কোণ, $\therefore$ AD $\parallel$ FC, অর্থাৎ AB $\parallel$ FC.

এখন DBCF চতুর্ভুজের দুই বিপরীত বাহু DB এবং FC পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল।

∴ DBCF একটি সামান্তরিক এবং DF ও BC বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। ∴ DE ∥ BC.

পুনরায়, E, DF-এর মধ্যবিন্দু বলিয়া DE, DF-এর অর্ধেক।

∴ DE, BC-এর অর্ধেক, অর্থাৎ DE সরলরেখা BC বাহুর অর্ধেক।

বিবিধ সমাধান

1. ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাহাদের সমষ্টির অর্ধেক। [C. U. 1936, 1941]

মনে কর, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম এবং উহার AD ও BC তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F.

প্রমাণ করিতে হইবে, EF ∥ AB ও CD এবং $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

অঙ্কন ঃ F বিন্দুর মধ্য দিয়া এবং AD বাহুর সমান্তরাল করিয়া GFH সরলরেখা অঙ্কন কর এবং মনে কর, উহা যেন CD বাহুকে H বিন্দুতে এবং AB বাহুর বর্ধিতাংশকে G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

প্রমাণ ঃ BFG এবং CFH ত্রিভুজদ্বয়ে

∠BFG = বিপ্রতীপ ∠CFH,

∠BGF = একান্তর ∠FHC

(∵ AB ∥ CD)

এবং BF = CF; ∴ △BFG ≡ △CFH.

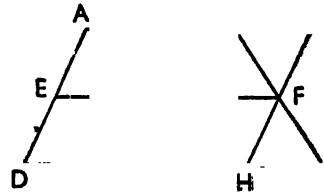
∴ BG = CH এবং FG = FH.

পুনরায়, ADHG একটি সামান্তরিক, ∴ AD = GH.

কিন্তু, $AE = \frac{1}{2}AD$ এবং $GF = \frac{1}{2}GH$ ∴ AE = FG.

কিন্তু, ∵ ADHG একটি সামান্তরিক, ∴ AE ∥ FG.

∴ AE ও FG পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল;

∴ AG ও EF পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, EF ও HD পরস্পর সমান এবং সমান্তরাল।

পুনরায়, $AG = EF = DH$; $\therefore \quad EF = \frac{1}{2}(AG + DH)$

$$= \frac{1}{2}(AB + BG + DH)$$

কিন্তু, $BG = HC$. $\quad \therefore \quad EF = \frac{1}{2}(AB + DH + HC) = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

2. ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর সমান হইলে, উহা একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে। [B. C. S. 1923]

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং উহার ভূমিসংলগ্ন $\angle ABC$-এর সমদ্বিখণ্ডক BD এবং $\angle ACB$-এর সমদ্বিখণ্ডক CE পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

অঙ্কন : B হইতে CE-এর সমান্তরাল ও সমান করিয়া BF অঙ্কন কর। CF ও DF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ না হইলে AB ও AC অসমান এবং উহার ভূমিসংলগ্ন $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ অসমান। মনে কর, $\angle ABC > \angle ACB$.

এখন, AEC ত্রিভুজে বহিঃকোণ $\angle BEC = \angle EAC + \angle ACE$

এবং ADB ত্রিভুজে বহিঃকোণ $\angle BDC$

$$= \angle DAB + \angle ABD.$$

$\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ABC$ এবং $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle ACB$.

$\therefore \quad \angle ABD > \angle ACE. \quad \therefore \quad \angle BDC > \angle BEC.$

কিন্তু BECF সামান্তরিকের $\angle BEC = \angle BFC$.

$\therefore \quad \angle BDC > \angle BFC \cdots\cdots$(i)

আবার, $\because \quad BF = EC = BD$,

$\therefore \quad \angle BDF = \angle BFD \cdots\cdots$(ii)

(i) হইতে (ii) বিয়োগ করিয়া, $\angle CDF > \angle CFD$.

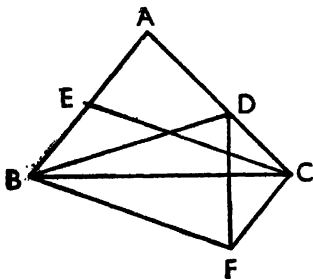
$\therefore \quad CF > CD$, অর্থাৎ $BE > CD$.

এখন, DBC এবং EBC ত্রিভুজদ্বয়ে $CE = BD$, BC সাধারণ বাহু এবং $BE > CD$.

$\therefore \quad \angle BCE > \angle CBD$.

অর্থাৎ, $\angle ACB > \angle ABC$; কিন্তু ইহা কল্পনা বিরুদ্ধ।

$\therefore$ AB ও AC অসমান নহে ; অর্থাৎ $AB = AC$.

$\therefore \quad \triangle ABC$ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

অনুশীলনী 3

1. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত যে কোন সরলরেখা ইহার অপর বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখাদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

2. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে, ত্রিভুজটি তিনটি সামান্তরিক ও চারিটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে।

3. চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [C. U. 1939 (Suppl.)]

4. চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয় এবং এই সামান্তরিকের পরিসীমা ঐ চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

5. ABCD একটি সামান্তরিক এবং X ও Y যথাক্রমে AD ও BC বাহুর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর, AY ও CX, BD বাহুকে সমান তিন অংশে বিভক্ত করে।

6. সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-বিন্দু হইতে অতিভুজের মধ্যবিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত সরলরেখা অতিভুজের অর্ধেক।

[**ইঙ্গিত :** ABC সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AC-এর মধ্যবিন্দু D এবং BD সংযুক্ত কর।

$DE \parallel AB$ অঙ্কিত কর। $\therefore$ E, BC-এর মধ্যবিন্দু অর্থাৎ, $BE = EC$. এখন, $\triangle DEB \equiv \triangle DEC$ (উভয়ে সমকোণী ত্রিভুজ বলিয়া)। $\therefore$ $BD = DC = \frac{1}{2} AC$.]

7. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপরিস্থ কোন বিন্দু হইতে সমান বাহুদ্বয়ের দূরত্বের সমষ্টি একটি ধ্রুবক এবং ভূমির যে কোন প্রান্ত হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান।

8. সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যস্থ কোন বিন্দু হইতে বাহুগুলির দূরত্বের সমষ্টি যে-কোন কৌণিক-বিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান।

9. AB সরলরেখার A ও B এবং AB এর মধ্যবিন্দু O হইতে CD সরলরেখার উপর AP, BQ এবং OX লম্ব অঙ্কন করা হইল। প্রমাণ কর,—

(i) A ও B, CD সরলরেখার একই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে, $OX = \frac{1}{2}(AP + BQ)$ এবং (ii) A ও B, CD সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইলে, $OX = \frac{1}{2}(AP \sim BQ)$.

10. সমকোণী ত্রিভুজের একটি সূক্ষ্মকোণ অপরটির দ্বিগুণ হইলে, অতিভুজ ক্ষুদ্রতর বাহুটির দ্বিগুণ হইবে। [W. B. S. B. 1956]

11. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টির চতুর্গুণ, পরিসীমার তিনগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

12. যে-কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর দুইটি সমান ও সমান্তরাল রেখার লম্ব অভিক্ষেপদ্বয় পরস্পর সমান।

মনে কর, AB ও CD দুইটি সমান ও সমান্তরাল সরলরেখা; MN ও OP যথাক্রমে XY রেখার উপর উহাদের লম্ব অভিক্ষেপদ্বয়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, MN = OP.

অঙ্কন : XY রেখার সমান্তরাল করিয়া AR ও CS রেখাদ্বয় অঙ্কিত কর।

মনে কর, AR, BN-কে R বিন্দুতে এবং CS, DP-কে S বিন্দুতে ছেদ করে।

B

M N

প্রমাণ : AR ∥ XY এবং CS ∥ XY ; ∴ AR ∥ CS.

আবার, AB ∥ CD ; ∴ $\angle BAR = \angle DCS$.

এখন, BAR ও DCS ত্রিভুজদ্বয়ে, $\angle BAR = \angle DCS$,

$\angle ARB = \angle CSD$ (প্রত্যেকে 1 সমকোণ বলিয়া) এবং AB = CD.

∴ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম। ∴ AR = CS.

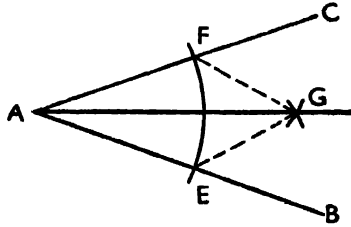
কিন্তু অঙ্কনানুসারে ARNM এবং CSPO উভয়ে আয়তক্ষেত্র বলিয়া

MN = AR এবং OP = CS. ∴ MN = OP. (∵ AR = CS).

তৃতীয় অধ্যায়

ব্যবহারিক জ্যামিতি
(Practical Geometry)

✓সম্পাদ্য 1

একটি নির্দিষ্ট কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।
(To bisect a given angle.)

∠BAC একটি নির্দিষ্ট কোণ ; ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন। A বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, চাপটি AB বাহুকে E এবং AC বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

পুনরায়, E এবং F-কে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রতিক্ষেত্রে EF-এর অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, এই চাপ দুইটি পরস্পরকে G বিন্দুতে ছেদ করিল।

AG যুক্ত কর। এই AG রেখাই ∠BAC-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ : EG এবং FG সংযুক্ত কর।

AEG এবং AFG ত্রিভুজদ্বয়ে

AE = AF (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

EG = FG (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং AG উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু। ∴ $\triangle AEG \equiv \triangle AFG$.

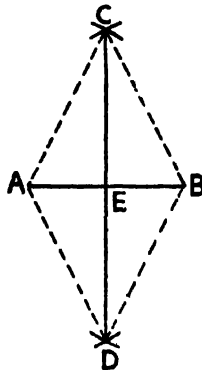
∴ ∠EAG = ∠FAG, অর্থাৎ ∠BAG = ∠CAG.

∴ AG রেখা ∠BAC-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

মন্তব্য : E এবং F-কে কেন্দ্র করিয়া EF-এর অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর ব্যাসার্ধ না লইলে অঙ্কিত বৃত্ত-চাপ দুইটি পরস্পরকে ছেদ করিবে না ; সুতরাং ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক রেখাটিও অঙ্কন করা সম্ভব হইবে না।

সম্পাদ্য 2

একটি নির্দিষ্ট সসীম সরলরেখাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে

(To bisect a given finite straight line.)

AB একটি নির্দিষ্ট সসীম সরলরেখা ; ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB সরলরেখার A এবং B বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রতিক্ষেত্রে AB-এর অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর ব্যাসার্ধ লইয়া রেখাটির উভয় পার্শ্বে দুইটি করিয়া মোট চারিটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, উহারা পরস্পরকে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করে।

CD সংযুক্ত কর ; মনে কর, ইহা AB-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। E বিন্দুতেই AB রেখাটি সমদ্বিখণ্ডিত হইল।

প্রমাণ : AC, AD, BC ও BD সংযুক্ত কর।

এখন, ACD ও BCD ত্রিভুজদ্বয়ে

AC = BC (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

AD = BD (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং CD উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু। $\therefore$ $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$.

$\therefore$ $\angle ACD = \angle BCD$; অর্থাৎ $\angle ACE = \angle BCE$.

পুনরায়, ACE এবং BCE ত্রিভুজদ্বয়ে

AC = BC (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

CE উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু

এবং অন্তর্ভূত $\angle ACE =$ অন্তর্ভূত $\angle BCE$.

$\therefore \quad \triangle ACE \equiv \triangle BCE. \quad \therefore \quad AE = BE.$

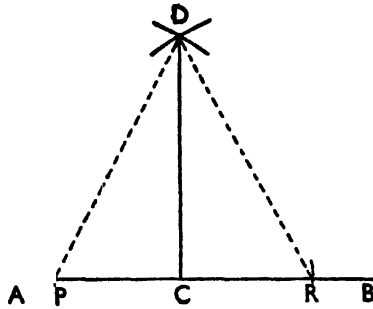
$\therefore$ AB সরলরেখা E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

মন্তব্য : (i) $\triangle ACE \equiv \triangle BCE$, $\therefore$ $\angle CEA = \angle CEB$; এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ। সুতরাং, CE রেখা AB-কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

(ii) উল্লিখিত পদ্ধতিতে যে কোন সরলরেখাকে 4, 8, 16 ইত্যাদি সমান অংশে বিভক্ত করা যায়।

সম্পাদ্য 3

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া উহার উপর একটি লম্ব অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw a straight line perpendicular to a given straight line from a given point in it.)

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার উপরিস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। C বিন্দু দিয়া AB সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। চাপ দুইটি যেন AB-কে P এবং R বিন্দুতে ছেদ করে।

পুনরায়, P এবং R-কে কেন্দ্র করিয়া এবং PR-এর অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর ব্যাসার্ধ লইয়া AB সরলরেখার একই পার্শ্বে দুইটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। এই চাপ দুইটি যেন পরস্পরকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

CD সংযুক্ত কর। CD-ই AB সরলরেখার উপর লম্ব।

প্রমাণ : DP এবং DR সংযুক্ত কর।

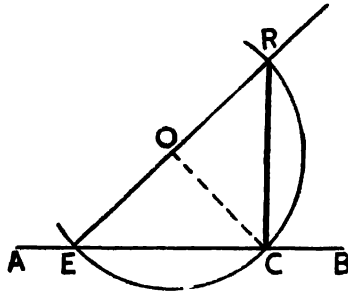
এখন, DPC এবং DRC ত্রিভুজদ্বয়ে CP = CR (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া), DP = DR (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া) এবং DC সাধারণ বাহু।

∴ $\triangle DPC \equiv \triangle DRC$ ∴ $\angle DCP = \angle DCR$ এবং ইহারা সন্নিহিত কোণ।

∴ ইহারা প্রত্যেকে এক সমকোণ।

∴ CD সরলরেখা AB-এর উপর C বিন্দুতে লম্ব।

দ্বিতীয় প্রণালী :

অঙ্কন : AB রেখার যে কোন পার্শ্বে O একটি বিন্দু লও। O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OC ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। চাপটি যেন AB-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। EO সংযুক্ত করিয়া উহাকে বর্ধিত কর। এই বর্ধিত EO যেন বৃত্তটিকে

R বিন্দুতে ছেদ করে। CR সংযুক্ত কর। CR-ই AB সরলরেখার উপর C বিন্দুতে লম্ব।

প্রমাণ : OC সংযুক্ত কর।

এখন, OR = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া), ∴ $\angle ORC = \angle OCR$.

আবার, OE = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া), ∴ $\angle OEC = \angle OCE$.

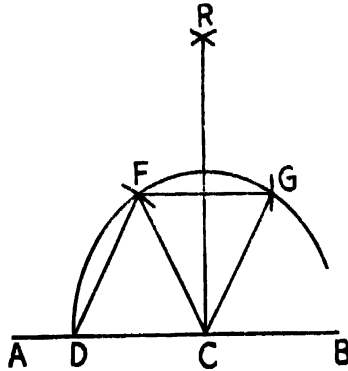
∴ $\angle ORC + \angle OEC = \angle OCR + \angle OCE = \angle ECR$

∴ $\angle ERC + \angle REC = \angle ECR$

∴ CER ত্রিভুজে, $\angle ECR = \frac{1}{2} \times 2$ সমকোণ = 1 সমকোণ।

∴ RC সরলরেখা AB-এর উপর C বিন্দুতে লম্ব।

তৃতীয় প্রণালী :

অঙ্কন : C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া DFG একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। চাপটি যেন AB-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। D-কে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি চাপ অঙ্কন কর। এই চাপ যেন DFG বৃত্ত-চাপকে F বিন্দুতে ছেদ করে। পুনরায় F-কে কেন্দ্র করিয়া ঐ একই ব্যবসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। এই চাপটি যেন DFG বৃত্ত-চাপকে G বিন্দুতে ছেদ করে। এইবার F এবং G-কে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রতিক্ষেত্রে FG-এর অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর

ব্যাসার্ধ লইয়া আরও দুইটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। ইহারা যেন পরস্পরকে R বিন্দুতে ছেদ করে। CR সংযুক্ত কর। CR-ই AB সরলরেখার উপর C বিন্দুতে লম্ব।

প্রমাণ : DF এবং FG সংযুক্ত কর।

DFC এবং FCG প্রত্যেকে সমবাহু ত্রিভুজ ; $\therefore$ $\angle DCF = \angle FCG = 60°$.

আবার, RC, $\angle$ FCG-এর সমদ্বিখণ্ডক ; $\therefore$ $\angle FCR = \frac{1}{2} \times 60° = 30°$.

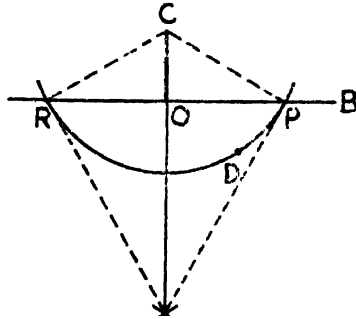
$\therefore$ সম্পূর্ণ $\angle DCR = \angle DCF + \angle FCR = 60° + 30° = 90°$.

$\therefore$ CR সরলরেখা, AB সরলরেখার উপর C বিন্দুতে লম্ব।

মন্তব্য : C যদি AB সরলরেখার কোন প্রান্তের সমীপবর্তী হয়, তাহা হইলে বৃত্ত-চাপের সহিত ছেদের নিমিত্ত AB-কে যথেচ্ছ বর্ধিত করিয়া লওয়া যাইতে পারে।

✓সম্পাদ্য 4

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর একটি লম্ব অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw a straight line perpendicular to a given straight line from a given point outside it.)

AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং C উহার বহিঃস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। C বিন্দু হইতে AB সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB সরলরেখার যে পার্শ্বে C অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে D একটি বিন্দু লও। C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং CD ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। চাপটি যেন AB সরলরেখাকে P এবং R বিন্দুতে ছেদ করে। এইবার P এবং R-কে কেন্দ্র করিয়া এবং প্রতিক্ষেত্রে PR-এর অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, চাপ দুইটি পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করে। CE সংযুক্ত কর। CE, AB-কে O বিন্দুতে ছেদ করে।

CO সরলরেখা AB-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ : CR, CP, RE এবং PE সংযুক্ত কর।

এখন, RCE এবং PCE ত্রিভুজদ্বয়ে, $RC = PC$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

$RE = PE$ (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া) এবং CE সাধারণ বাহু।

$\therefore \quad \triangle RCE \equiv \triangle PCE. \quad \therefore \angle RCE = \angle PCE$, অর্থাৎ $\angle RCO = \angle PCO.$

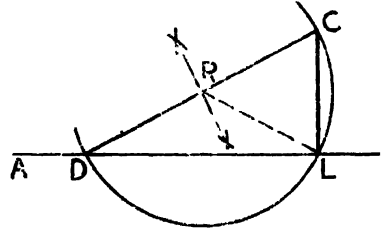
পুনরায়, ROC এবং POC ত্রিভুজদ্বয়ে $RC = PC$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া), CO সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভূত $\angle RCO =$ অন্তর্ভূত $\angle PCO$.

∴ $\triangle ROC \equiv \triangle POC$ ∴ $\angle COR = \angle COP$; কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ।

∴ ইহারা প্রত্যেকে এক সমকোণ।

∴ CO, AB সরলরেখার উপর C বিন্দু হইতে লম্ব।

দ্বিতীয় প্রণালী :

অঙ্কন : AB সরলরেখায় যে কোন একটি বিন্দু, D লও। CD সংযুক্ত কর। CD রেখাকে R বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। এইবার R-কে কেন্দ্র করিয়া CR অথবা DR ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, এই বৃত্ত-চাপটি AB-কে L বিন্দুতে ছেদ করে। CL সংযুক্ত কর। CL-ই AB সরলরেখার উপর লম্ব।

প্রমাণ : RL সংযুক্ত কর।

RDL ত্রিভুজে, RD = RL (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

∴ $\angle RDL = \angle RLD$.

আবার, RLC ত্রিভুজে, RL = RC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

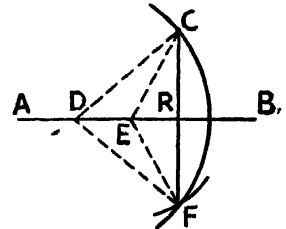
∴ $\angle RLC = \angle RCL$.

∴ $\angle RLD + \angle RLC = \angle DLC = \angle RDL + \angle RCL$.

= দুই সমকোণের অর্ধেক বা এক সমকোণ।

∴ CL, AB সরলরেখার উপর C বিন্দু হইতে লম্ব।

তৃতীয় প্রণালী :

অঙ্কন : AB সরলরেখায় যে-কোন একটি বিন্দু, D লও। D-কে কেন্দ্র করিয়া এবং CD ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। পুনরায়, AB সরলরেখায় যে-কোন একটি বিন্দু, E লও। E-কে কেন্দ্র করিয়া এবং EC ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, দ্বিতীয় চাপটি প্রথম চাপটিকে F বিন্দুতে ছেদ করে। CF সংযুক্ত কর। CF যেন AB-কে R বিন্দুতে ছেদ করে। CR-ই AB সরলরেখার উপর লম্ব।

প্রমাণ : DC, DF, EC এবং EF সংযুক্ত কর।

এখন, DCE এবং DFE ত্রিভুজদ্বয়ে, DC = DF (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

EC = EF (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ) এবং DE সাধারণ বাহু।

$\therefore$ $\triangle DCE \equiv \triangle DFE$ $\therefore$ $\angle CDE = \angle FDE$, অর্থাৎ $\angle CDR = \angle FDR$.

আবার, CDR ও FDR ত্রিভুজদ্বয়ে, CD = FD (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

DR সাধারণ বাহু এবং $\angle CDR = \angle FDR$.

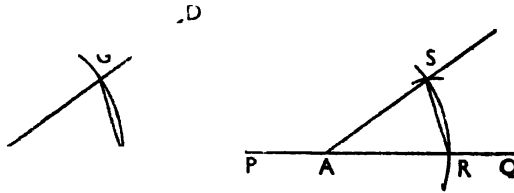
$\therefore$ $\triangle CDR \equiv \triangle FDR$ $\therefore$ $\angle DRC = \angle DRF$; কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ।

$\therefore$ ইহারা প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ CR, AB সরলরেখার উপর লম্ব।

সম্পাদ্য 5

একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।

(At a given point in a given straight line to draw an angle equal to a given angle.)

PQ একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং উহাতে A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। DCE একটি নির্দিষ্ট কোণ।

PQ সরলরেখার A বিন্দুতে $\angle DCE$-এর সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : C-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। এই চাপটি যেন CE এবং CD-কে যথাক্রমে F এবং G বিন্দুতে ছেদ করিল।

A-কে কেন্দ্র করিয়া এবং ঐ একই ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। এই চাপটি যেন PQ-কে R বিন্দুতে ছেদ করে। এইবার R-কে কেন্দ্র করিয়া এবং

FG-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, এই চাপটি পূর্বের চাপটিকে S বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AS যুক্ত কর। ∠SAR-ই অভীষ্ট কোণ।

প্রমাণ : FG এবং RS সংযুক্ত কর।

এখন, FCG এবং RAS ত্রিভুজদ্বয়ে

FC = RA (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া),

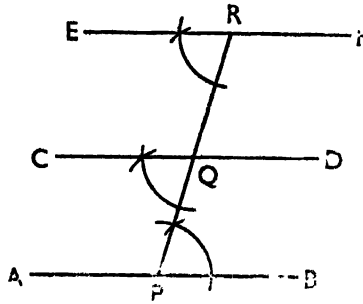
CG = AS (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং FG = RS (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

∴ △FCG ≡ △RAS. ∴ ∠SAR = ∠GCF, অর্থাৎ ∠DCE = ∠SAQ.

সম্পাদ্য 6

একাধিক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া কতিপয় সরলরেখা অঙ্কন করিতে হইবে।

(Through some given points to draw some parallels to a given straight line.)

মনে কর, Q এবং R দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। AB-এর সমান্তরাল করিয়া এবং R ও Q-এর মধ্য দিয়া দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : RQ সংযুক্ত কর এবং ইহাকে AB সরলরেখা পর্যন্ত (প্রয়োজন হইলে AB-কে বর্ধিত করিয়া) বর্ধিত কর। বর্ধিত RQ রেখাটি যেন AB (বা বর্ধিত AB)-কে P বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন, ∠QPB-এর সমান করিয়া PQR সরলরেখার Q বিন্দুতে ∠PQC এবং R বিন্দুতে ∠QRE অঙ্কন কর। CQ-কে D এবং ER-কে F পর্যন্ত বর্ধিত কর।

CD এবং EF সরলরেখাদ্বয়ের প্রত্যেকে AB-এর সমান্তরাল।

প্রমাণ : AB এবং CD সরলরেখা দুইটিকে PQR যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন, অঙ্কন অনুসারে ∠QPB = ∠PQC ; কিন্তু ইহারা একান্তর . . .

∴ CQ ∥ PB, অর্থাৎ CD ∥ AB.

পুনরায়, AB এবং EF সরলরেখা দুইটিকে PQR যথাক্রমে P এবং R বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

এখন, অঙ্কন অনুসারে ∠RPB = ∠PRE ; কিন্তু ইহারা একান্তর কোণ।

∴ ER ∥ PB ; অর্থাৎ EF ∥ AB.

∴ CD এবং EF সরলরেখাদ্বয় প্রত্যেকে AB সরলরেখার সমান্তরাল।

সম্পাদ্য 7

একটি নির্দিষ্ট সসীম সরলরেখাকে কতিপয় সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে।

(To divide a given finite straight line into some equal parts.)

AB একটি নির্দিষ্ট সসীম সরলরেখা ; ইহাকে কতিপয় সমান ভাগে (মনে কর পাঁচ ভাগে) বিভক্ত করিতে হইবে।

অঙ্কন : A বিন্দুতে যে কোন একটি ∠BAC অঙ্কন কর। AC হইতে AD, DE EF, FG এবং GH—এই পাঁচটি সমান অংশ কাটিয়া লও। HB সংযুক্ত কর।

এখন, D, E, F এবং G বিন্দুগুলি দিয়া BH-এর সমান্তরাল করিয়া চারিটি সরলরেখ অঙ্কন কর। মনে কর, উহারা যেন AB-কে যথাক্রমে K, L, M এবং N বিন্দুতে ছেদ করে। AB সরলরেখা K, L, M ও N বিন্দুগুলিতে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ : AHB ত্রিভুজের AH বাহু D, E, F ও G বিন্দুগুলিতে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত হইয়াছে এবং এই বিন্দুগুলি হইতে DK, EL, FM ও GN সরলরেখাগুলির প্রত্যেককে ভূমি HB-এর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কন করা হইয়াছে।

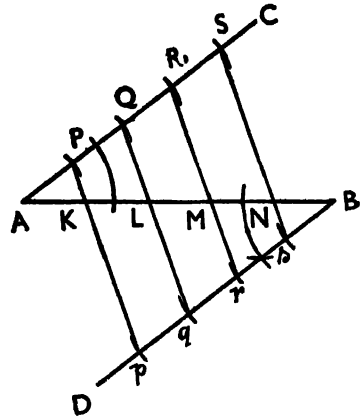
∴ K, L, M এবং N বিন্দুগুলি AB-কে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত করিয়াছে।

মন্তব্য : চিত্রে AK = $\frac{1}{5}$ AB, AL = $\frac{2}{5}$ AB, AM = $\frac{3}{5}$ AB, ইত্যাদি। সুতরাং কোন সরলরেখার কোন নির্দিষ্ট ভগ্নাংশ বাহির করিবার জন্যও উল্লিখিত অঙ্কন ব্যবহৃত হইতে পারে।

অঙ্কন : A বিন্দুতে যে কোন একটি ∠BAC অঙ্কন কর AC হইতে AP, PQ, QR এবং RS—এই চারিটি সমান অংশ কাটিয়া লও।

B বিন্দু দিয়া AC-এর সমান্তরাল করিয়া BD সরলরেখা অঙ্কন কর এবং BD হইতে AP-এর সমান করিয়া B*s*, *sr*, *rq* এবং *qp*—এই চারিটি সমান অংশ কাটিয়া লও।

P*p*, Q*q*, R*r* এবং S*s* যোগ কর। মনে কর, এই সরলরেখাগুলি AB-কে যথাক্রমে K, L, M এবং N বিন্দুতে ছেদ করে।

AB সরলরেখা K, L, M এবং N বিন্দুতে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ : যেহেতু PQ, QR ও RS যথাক্রমে *pq*, *qr* ও *rs*-এর সমান ও সমান্তরাল; ∴ P*p*, Q*q*, R*r* এবং S*s* পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

△SAN-এর AS বাহুর উপরিস্থিত P, Q এবং R বিন্দু দিয়া PK, QL এবং RM সরলরেখাগুলির প্রত্যেককে ভূমি SN-এর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত করা হইয়াছে এবং যেহেতু AP = PQ = QR = RS ; ∴ AK = KL = LM = MN.

অনুরূপভাবে, BK*p* ত্রিভুজেও, BN = NN = ML = LK.

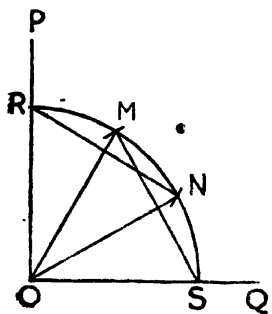
∴ AK = KL = LM = MN = NB.

∴ AB রেখা K, L, M এবং N বিন্দুতে সমান পাঁচ ভাগে বিভক্ত হইয়াছে।

অনুশীলনী 4

1. দুইটি নির্দিষ্ট কোণের সমষ্টির সমান একটি কোণ অঙ্কন কর।
2. দুইটি নির্দিষ্ট কোণের অন্তরের সমান একটি কোণ অঙ্কন কর।
3. চাঁদার সাহায্য ব্যতীত 45° একটি কোণ অঙ্কন কর।
4. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে সমত্রিখণ্ডিত কর।
5. একটি সমকোণকে সমত্রিখণ্ডিত কর।

$\angle POQ$ একটি সমকোণ। ইহাকে সমত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। উহা যেন OP এবং OQ-কে যথাক্রমে R এবং S বিন্দুতে ছেদ করে। পুনরায় R ও S-কে কেন্দ্র করিয়া এবং পূর্বের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। এই চাপ দুইটি যেন পূর্বের চাপকে M ও N বিন্দুতে ছেদ করে। OM এবং ON সংযুক্ত কর। OM এবং ON সমকোণ POQ-কে সমত্রিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ : RN এবং MS সংযুক্ত কর।

$\triangle RON$ এবং $\triangle MOS$, প্রত্যেকে সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore$ $\angle RON$ এবং $\angle MOS$, প্রত্যেকে 60°.

$\therefore$ $\angle ROS - \angle RON$ বা $\angle NOS = 90^\circ - 60^\circ$ বা 30°

এবং $\angle ROS - \angle MOS$ বা $\angle ROM = 90^\circ - 60^\circ$ বা 30°.

$\therefore$ OM এবং ON, সমকোণ POQ-কে সমত্রিখণ্ডিত করিয়াছে।

6. $\triangle ABC$-এর BC বাহুর সমান্তরাল করিয়া এমন একটি সরলরেখা অঙ্কন কর যেন উহা AB এবং AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D এবং E বিন্দুতে ছেদ করিলে—

(i) $DE = BD + CE$ এবং (ii) $DE = BD - CE$ হয়।

7. একটি সরলরেখার $\frac{4}{7}$ অংশের সমান করিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন কর।

8. নির্দিষ্ট A, B ও C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে। A বিন্দু দিয়া এমন একটি সরলরেখা অঙ্কন কর, যেন B বিন্দু হইতে ঐ রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব C বিন্দু হইতে ঐ রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দ্বিগুণ হয়।

9. চাঁদার সাহায্য ব্যতীত নির্দিষ্ট AB সরলরেখার এক প্রান্তে একটি 45° কোণ এবং অপর প্রান্তে একটি 60° কোণ অঙ্কন করিয়া উহাদের বাহুদ্বয়কে বর্ধিত করিয়া C বিন্দুতে মিলিত কর। চাঁদার সাহায্যে $\angle ACB$-এর পরিমাণ নির্ণয় কর।

10. AB সরলরেখায় এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর যাহা প্রদত্ত C এবং D বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। কখন্ ইহা অসম্ভব?

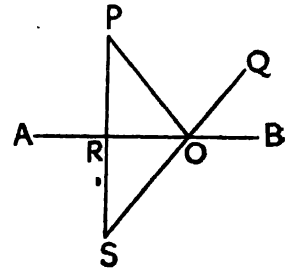
11. AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার একই পার্শ্বস্থিত তুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু P এবং Q; AB-এর উপর এমন একটি বিন্দু O নির্ণয় কর, যেন $\angle POA = \angle QOB$ হয়।

[W. B. S. B. 1955]

অঙ্কন: P হইতে AB-এর উপর PR লম্ব টানিয়া উহাকে S পর্যন্ত বর্ধিত কর, যেন, PR = RS হয়। SQ যোগ কর। ইহা AB-কে O বিন্দুতে ছেদ করিল। O-ই অভীষ্ট বিন্দু।

প্রমাণ: OP যুক্ত কর।

$\triangle POR \equiv \triangle SOR$. $\therefore$ $\angle POR = \angle SOR$

$=$ বিপ্রতীপ $\angle QOB$.

12. ABC সমকোণী ত্রিভুজের AB অতিভুজ। উহার উপর এমন একটি বিন্দু D নির্ণয় কর যেন, D হইতে AC-এর উপর অঙ্কিত লম্ব DB-এর সমান হয়।

ত্রিভুজাঙ্কন

ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ, মোট ছয়টি অঙ্গ আছে। ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে পারিলে ইহাদিগকে সরলরেখাদ্বারা সংযুক্ত করিয়া ত্রিভুজটি অঙ্কন করা যায়। ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করিতে হইলে নিম্নলিখিত বিষয়গুলি স্মরণ রাখা কর্তব্য।

(i) ত্রিভুজের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকিলে, উহার সমান একটি সরলরেখা অঙ্কন করিবে, এবং ঐ সরলরেখার প্রান্ত-বিন্দুদ্বয় অভীষ্ট ত্রিভুজের তুইটি কৌণিক বিন্দু হইবে।

(ii) ত্রিভুজের একটি কোণ দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ অঙ্কনের সময় ঐ কোণের সমান করিয়া একটি কোণ অঙ্কন করিতে হয় এবং অঙ্কিত কোণটির শীর্ষবিন্দু অভীষ্ট ত্রিভুজের একটি কৌণিক-বিন্দু হইবে।

(iii) ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ,—এই ছয়টি অঙ্গের মধ্যে কোন্ তিনটি অঙ্গ দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব, তাহা ভাবিয়া দেখা প্রয়োজন।

ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইলে এই তিনটি অঙ্গ দেওয়া থাকিতে পারে :—

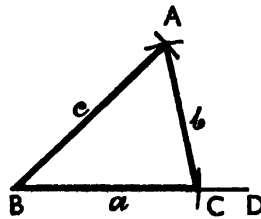
(a) তিনটি বাহু, (b) দুইটি বাহু ও অন্তর্ভুক্ত কোণ, (c) একটি বাহু ও উহার সন্নিহিত দুইটি কোণ এবং (d) দুইটি বাহু ও উহাদের যে-কোন একটির বিপরীত কোণ।

শেষোক্ত ক্ষেত্রে দুইটি বিভিন্ন ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইতে পারে।

তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে অসংখ্য ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইতে পারে। এই ত্রিভুজগুলি **সদৃশকোণী** হইলেও পরস্পর সমান নয়।

সম্পাদ্য ৪

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a triangle having given the lengths of its thre

মনে কর, a, b ও c যথাক্রমে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : BD একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া উহা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও।

B-কে কেন্দ্র করিয়া c-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি এবং C-কে কেন্দ্র করিয়া b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, এই চাপদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করিল।

AB ও AC সংযুক্ত কর। △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

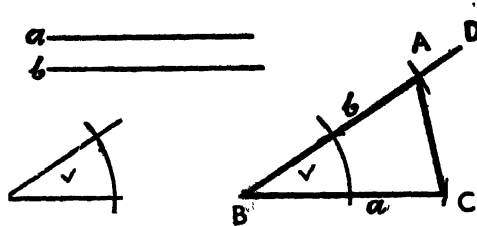
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে $BC = a$, $CA = b$ এবং $AB = c$.

∴ △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য : প্রদত্ত বাহুত্রয়ের যে কোন দুইটির সমষ্টি তৃতীয়টি অপেক্ষা বৃহত্তর না হইলে ত্রিভুজাঙ্কন অসম্ভব।

সম্পাদ্য 9

কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং অন্তর্ভূর্ত কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a triangle having given two sides and the included angle.)

মনে কর, a এবং b কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং ∠P উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

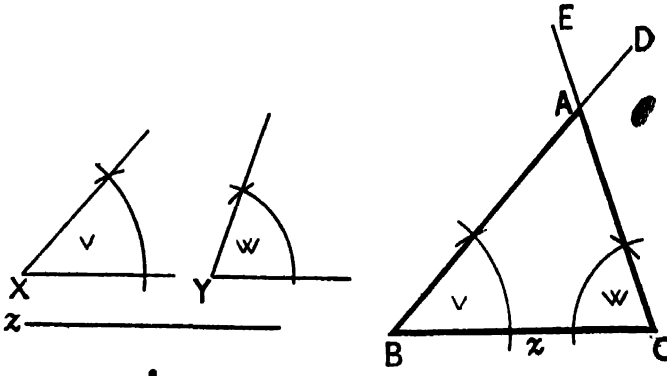
অঙ্কন : a-র সমান করিয়া BC একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। BC সরলরেখার B বিন্দুতে ∠P-এর সমান করিয়া ∠CBD অঙ্কন কর। BD হইতে b-এর সমান করিয়া BA অংশ কাটিয়া লও। AC সংযুক্ত কর। △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, $AB = b$, $BC = a$ এবং ∠ABC = ∠P.

∴ △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

✓ সম্পাদ্য 10

কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং উহাদের সন্নিহিত বাহু দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To consrtuct a triangle having given its two angles and the side adjacent to them.)

মনে কর, কোন ত্রিভুজের ∠X ও ∠Y দুইটি কোণ এবং z উহাদের সন্নিহিত বাহু দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : z-এর সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট BC একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। BC সরলরেখার B বিন্দুতে ∠X-এর সমান করিয়া ∠CBD এবং C বিন্দুতে ∠Y-এর সমান করিয়া ∠BCE অঙ্কন কর। মনে কর, BD এবং CE পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

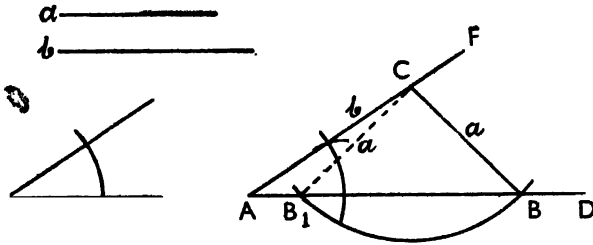
প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, ∠CBD = ∠X, ∠BCE = ∠Y এবং BC = z.

∴ △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য : প্রদত্ত দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের কম না হইলে ত্রিভুজাঙ্কন অসম্ভব।

সম্পাদ্য 11

কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a triangle having given its two sides and the angle opposite to one of them.)

মনে কর, a ও b ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং a বাহুর বিপরীত কোণ, ∠P দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AD একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। AD সরলরেখার A বিন্দুতে ∠P-এর সমান করিয়া ∠DAF অঙ্কন কর। AF হইতে b-এর সমান করিয়া AC অংশ কাটিয়া লও। এখন C-কে কেন্দ্র করিয়া a-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, চাপটি AD-কে B এবং B_1 বিন্দুতে ছেদ করে। CB এবং CB_1 সংযুক্ত কর। △ABC এবং △AB_1C ত্রিভুজদ্বয়ের যে কোন একটি অভীষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, $AC=b$, BC (বা B_1C) $=a$

এবং ∠BAC (বা ∠B_1AC) = ∠P.

∴ △ABC বা △AB_1C অভীষ্ট ত্রিভুজ।

মন্তব্য : (i) a যদি b অপেক্ষা ছোট হয়, কিন্তু C হইতে AB-এর উপর পাতিত লম্ব অপেক্ষা বড হয়, তাহা হইলে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে। উহাদের একটি সূক্ষ্মকোণী এবং অপরটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ। ইহাকে **দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র** (Ambiguous Case) বলে।

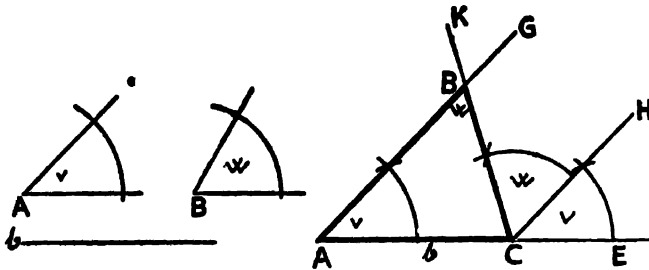
(ii) **কিন্তু a যদি b-এর সমান অথবা b অপেক্ষা বড় হয়, তাহা হইলে একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে।**

(iii) আবার a যদি C হইতে AB-এর উপর পাতিত লম্ব অপেক্ষা ছোট হয়, তাহা হইলে চাপটি AD রেখাকে মোটেই ছেদ করিবে না ; সুতরাং এক্ষেত্রে কোন ত্রিভুজই অঙ্কন করা যাইবে না।

(iv) আবার a যদি C হইতে AD-এর উপর পাতিত লম্বের সমান হয়, তাহা হইলে একটিমাত্র ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে এবং উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।

✓ সম্পাদ্য 12

কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং উহাদের একটির বিপরীত বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a triangle having given its two angles and a side opposite to one of them.)

মনে কর, ∠A ও ∠B ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং ∠B-এর বিপরীত বাহু b দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AE একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া উহা হইতে b-এর সমান করিয়া AC অংশ কাটিয়া লও। AE সরলরেখার A বিন্দুতে ∠A-র সমান করিয়া ∠EAG এবং C বিন্দুতে AG-এর সমান্তরাল করিয়া CH সরলরেখাটি অঙ্কন কর।

এখন, CH সরলরেখার C বিন্দুতে ∠B-এর সমান করিয়া ∠HCK অঙ্কন কর। মনে কর, AG এবং CK পরস্পর B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, AC = b এবং ∠BAC = ∠A.

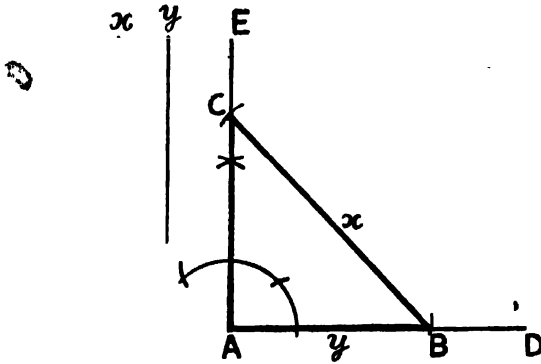
আবার, ∵ AG ∥ CH এবং BC উহাদের ছেদক,

∴ ∠ABC = একান্তর ∠BCH = ∠B.

∴ △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য 13

কোন সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অপর একটি বাহু দেওয়া আছে; সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a right-angled triangle having given its hypotenuse and one side.)

মনে কর, সমকোণী ত্রিভুজটির অতিভুজ x এবং একটি বাহু y দেওয়া আছে। সমকোণী ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AD একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া উহা হইতে y-এর সমান করিয়া AB অংশ কাটিয়া লও। AB সরলরেখার A বিন্দুতে AE একটি লম্ব অঙ্কন কর। এখন, B-কে কেন্দ্র করিয়া এবং x-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। চাপটি যেন AE-কে C বিন্দুতে ছেদ করিল। BC সংযুক্ত কর। $\triangle$ABC অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, $AB = y$, $BC = x$ এবং $\angle BAC =$ এক সমকোণ.

$\therefore$ $\triangle$ABC-ই অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

অঙ্কন : অতিভুজ x-এর সমান করিয়া BC সরলরেখা অঙ্কন কর এবং উহাকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর। O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OB-কে ব্যাসার্ধ লইয়া BAC

একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর। এখন B-কে কেন্দ্র করিয়া এবং y-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, চাপটি অঙ্কিত অর্ধবৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করিল।

x- ————————

y- ————

BA ও AC সংযুক্ত কর। $\triangle ABC$ অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ : OA সংযুক্ত কর।

$OA = OB$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

$\therefore \quad \angle OAB = \angle OBA.$

আবার, $OA = OC$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ),

$\therefore \quad \angle OAC = \angle OCA$

$$\therefore \quad \angle OAB + \angle OAC = \angle BAC = \angle OBA + \angle OCA$$

$$= \tfrac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$$

এবং অঙ্কনানুসারে $BC = x$ এবং $AB = y$. $\therefore$ $\triangle ABC$-ই অভীষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

অনুশীলনী 5

1. নিম্নলিখিত অঙ্গ-বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলি অঙ্কন কর :

(i) $a = 8$ সে মি., $b = 12$ সে.মি. এবং $\angle C = 60^\circ$

(ii) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 75^\circ$ এবং $c = 10$ সে.মি.

(iii) $\angle A = 45^\circ$, $b = 9$ সে.মি. এবং $c = 6$ সে.মি.

(iv) $\angle A = 90^\circ$, $b = c = 7{\cdot}5$ সে.মি.

(v) $a = 12$ সে.মি., $b = 8$ সে.মি. এবং $c = 6$ সে.মি.

2. একটি ত্রিভুজের ভূমি 6 সে. মি. এবং অপর দুইটি বাহু যথাক্রমে 3 সে.মি. ও 5 সে.মি.। যথাসম্ভব নির্ভুলভাবে ত্রিভুজটির উচ্চতা মাপিয়া বাহির কর।

[C. U. 1930]

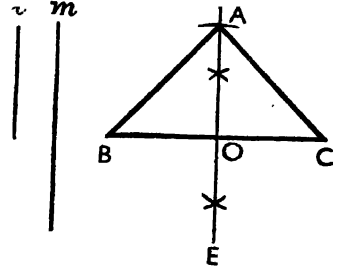
3. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 9 সে.মি. ও 12 সে.মি. এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ অপর দুইটি কোণের সমষ্টির সমান। ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

4. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও মধ্যমা দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে কর, m ও l যথাক্রমে একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও মধ্যমা। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন ঃ BC$=m$ অঙ্কন কর। BC-এর মধ্যবিন্দু O দিয়া DO একটি লম্ব অঙ্কন কর। OD হইতে OA$=l$, কাটিয়া লও এবং AB ও AC সংযুক্ত কর। △ABC অভীষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ ঃ OB = OC, AO সাধারণ বাহু এবং ∠AOB = ∠AOC.

∴ △ABO ≡ △ACO. ∴ AB = AC, পুনরায় অঙ্কনানুসারে AO মধ্যমা$=l$ এবং BC ভূমি$=m$.

∴ △ABC-ই অভীষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

5. কোন ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় এবং বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমির উপর লম্ব দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [C. U. 1937]

6. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অন্য দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [C. U. 1922]

7. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি এবং উহার সমান বাহুদ্বয়ের একটি ও উচ্চতার সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

8. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ দুইটির একটি অপরটির দ্বিগুণ। ত্রিভুজটির অতিভুজ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

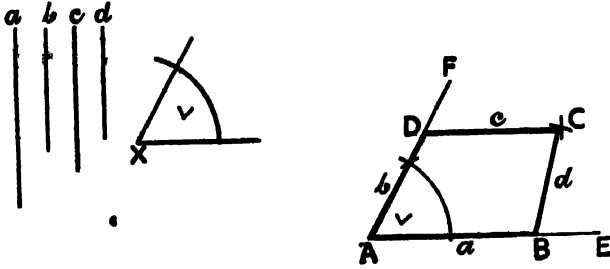
9. একটি ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের একটি এবং উচ্চতা দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [C. U. 1951

10. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণ এবং শীর্ষ হইতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

চতুর্ভুজ অঙ্কন

সম্পাদ্য 14

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহু এবং একটি কোণ দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a quadrilateral having given four sides and one angle.)

মনে কর, a, b, c ও d চতুর্ভুজের চারটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং a ও b বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ, ∠X দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AE একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া উহা হইতে a-র সমান করিয়া AB অংশ কাটিয়া লও এবং A বিন্দুতে ∠X-এর সমান করিয়া ∠EAF অঙ্কন কর। AF হইতে b-এর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও।

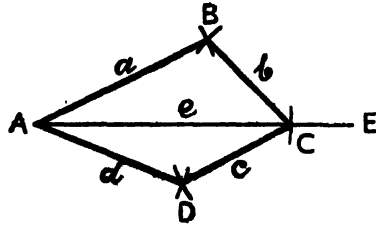
এখন, D-কে কেন্দ্র করিয়া c-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া এবং B-কে কেন্দ্র করিয়া d-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, চাপ দুইটি পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে। BC ও DC সংযুক্ত কর। ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, $AB = a$, $BC = d$, $CD = c$, $DA = b$ এবং $\angle BAD = \angle X$.

∴ ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য 15

কোন চতুর্ভুজের চারিটি বাহু ও একটি কর্ণ দেওয়া আছে ; চতুর্ভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a quadrilateral having given four sides and a diagonal.)

মনে কর, a, b, c ও d চতুর্ভুজের চারিটি বাহু এবং e চতুর্ভুজটির একটি কর্ণ। চতুর্ভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AE একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। উহা হইতে e-এর সমান করিয়া AC অংশ কাটিয়া লও। A-কে কেন্দ্র করিয়া ও a-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া এবং C-কে কেন্দ্র করিয়া ও b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া AC-এর এক পার্শ্বে দুইটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, চাপ দুইটি পরস্পরকে B বিন্দুতে ছেদ করে। আবার, C-কে কেন্দ্র করিয়া ও c-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া এবং A-কে কেন্দ্র করিয়া ও d-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া AC-এর অপর পার্শ্বে দুইটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, চাপ দুইটি পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে।

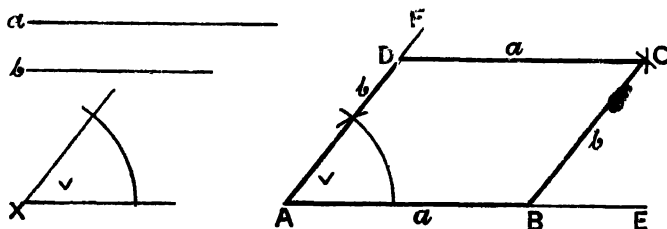
AB, BC, CD ও DA সংযুক্ত কর। ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$ এবং AC কর্ণ $=e$.

$\therefore$ ABCD অভীষ্ট চতুর্ভুজ।

সম্পাদ্য 16

কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ দেওয়া আছে ; সামান্তরিকটি অঙ্কন করিতে হইবে।

[To construct a parallelogram having given two adjacent sides and the angle included by them.)

মনে কর, a ও b সামান্তরিকের দুইটি বাহু এবং $\angle$X উহাদের অন্তর্ভূর্ত কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন ঃ AE একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। উহা হইতে a-র সমান করিয়া AB অংশ কাটিয়া লও। AE রেখার A বিন্দুতে $\angle$X-এর সমান করিয়া $\angle$EAF অঙ্কন কর। AF হইতে b-এর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও।

এখন B-কে কেন্দ্র করিয়া ও b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি এবং D-কে কেন্দ্র করিয়া ও a-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া আর একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। মনে কর, চাপ দুইটি পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে। BC ও CD সংযুক্ত কর। ABCD অভীষ্ট সামান্তরিক উৎপন্ন হইল।

প্রমাণ ঃ অঙ্কনানুসারে, ABCD চতুর্ভুজের AB বাহু = বিপরীত CD বাহু $= a$ এবং BC বাহু = বিপরীত DA বাহু $= b$. $\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

আবার, অঙ্কনানুসারে, ABCD সামান্তরিকের $\angle$BAD $=$ $\angle$X.

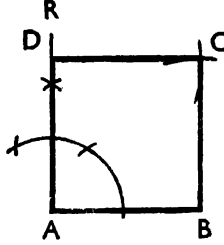
$\therefore$ ABCD অভীষ্ট সামান্তরিক।

মন্তব্য ঃ কোন আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুদ্বয় দেওয়া থাকিলে আয়তক্ষেত্রটি অনুরূপভাবে অঙ্কন করা যায়।

এক্ষেত্রে অঙ্কনপ্রণালী একই হইবে,—কেবলমাত্র প্রদত্ত কোণটি এক সমকোণ ধরিয়া লইতে হইবে।

সম্পাদ্য 17

একটি নির্দিষ্ট বাহুর উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a square on a given side.)

AB একটি নির্দিষ্ট বাহু ; উহার উপর একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AB সরলরেখার A বিন্দুতে AR লম্ব অঙ্কন কর। AR হইতে AB-এর সমান করিয়া AD অংশ কাটিয়া লও। এখন, D ও B বিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র করিয়া এবং উভয়ক্ষেত্রে AB-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, চাপ দুইটি পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

BC ও CD সংযুক্ত কর। ABCD অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র হইল।

প্রমাণ : অঙ্কনানুসারে, ABCD চতুর্ভুজের প্রতিটি বাহু AB-এর সমান। সুতরাং AB = BC = CD = DA.

∴ ABCD একটি সামান্তরিক এবং ইহার ∠DAB = এক সমকোণ।

∴ ABCD একটি বর্গক্ষেত্র এবং ইহাই অভীষ্ট বর্গক্ষেত্র।

মন্তব্য : (i) চতুর্ভুজের যে-কোন তিনটি বাহুর সমষ্টি চতুর্থ বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে চতুর্ভুজটি অঙ্কন করা অসম্ভব।

(ii) চতুর্ভুজ অঙ্কনে পাঁচটি নিরপেক্ষ উপাত্তের প্রয়োজন।

(*a*) সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান বলিয়া, দুইটি বাহু দেওয়া থাকিলে আর দুইটি বাহুও দেওয়া থাকে।

(*b*) বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলি পরস্পর সমান বলিয়া, একটি বাহু দেওয়া থাকিলে আর তিনটি বাহুও দেওয়া থাকে ; অধিকন্তু একটি কোণ সমকোণ—ইহাও দেওয়া থাকে।

6

1. কোন চতুর্ভুজের তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ দেওয়া আছে; চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর।

2. কোন চতুর্ভুজের তিনটি বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণদ্বয় দেওয়া আছে; চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর।

3. কোন চতুর্ভুজের তিনটি কোণ ও দুইটি সন্নিহিত বাহু দেওয়া আছে চতুর্ভুজটি অঙ্কন কর।

4. কোন সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু এবং একটি কর্ণ দেওয়া আছে সামান্তরিকটি অঙ্কন কর।

5. কোন সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও একটি বাহু দেওয়া আছে; সামান্তরিকটি অঙ্কন কর।

6. কোন সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও তাহাদের অন্তর্ভূত একটি কোণ দেওয়া আছে; সামান্তরিকটি অঙ্কন কর।

7. 10 সে. মি. কর্ণবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।

8. একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা দেওয়া আছে; বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কন কর।

9. কোন রম্বসের কর্ণদ্বয় দেওয়া আছে; রম্বসটি অঙ্কন কর।

10. কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহু ও একটি কর্ণ দেওয়া আছে; আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কন কর।

11. কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণের এবং একটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে; বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কন কর।

12. একটি বর্গক্ষেত্রকে এরূপ কয়েকটি অংশে বিভক্ত কর, যাহা হইতে দুইটি সমান বর্গক্ষেত্র গঠন করা যায়। [C. U. 1932]

চতুর্থ অধ্যায়

ত্রিভুজাঙ্কন

(Construction of Triangles)

সংশ্লেষণ ও বিশ্লেষণ ঃ

যুক্তি পরম্পরায় সিদ্ধান্তে উপনীত হইবার প্রণালীকে **সংশ্লেষণ** (Synthesis) বলে।

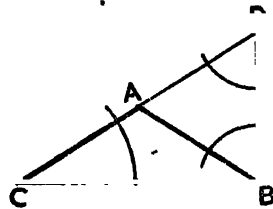
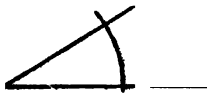
জটিল জ্যামিতিক সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা অঙ্কন করিতে হইলে, প্রথমে যাহা অঙ্কন করিতে হইবে তাহা স্বীকার করিয়া পরে ইহার প্রত্যেক অংশ অনুশীলন দ্বারা উক্ত প্রতিজ্ঞা অঙ্কনের ইঙ্গিত নির্ণয় করিতে হয়; অর্থাৎ, যুক্তি দ্বারা স্থির করিতে হয়, ঐ সত্য মানিয়া লওয়ার কল্পনায় যাহা দেওয়া আছে, তাহা কি প্রকারে পাওয়া যায়। সম্প্রক্ষণে, এই ইঙ্গিতের বিপরীতক্রমে প্রত্যেক অংশ অঙ্কন করিলেই সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞাটি অঙ্কিত হইবে।

এই প্রকারে সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা অঙ্কনের ইঙ্গিত নির্ণয়ের প্রণালীকে **বিশ্লেষণ** (Analysis) বলে।

জটিল সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা বিশ্লেষণ প্রণালী অবলম্বনে অঙ্কন করিতে হয়। নিম্নের উদাহরণটি লক্ষ্য কর :—

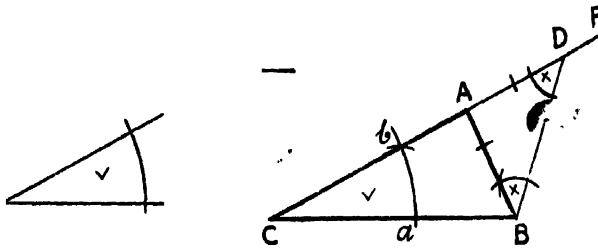
সম্পাদ্য 18

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw the triangle having given its base, one of the base angles and the sum of the other two sides.)

মনে কর, a ত্রিভুজের ভূমি, $\angle X$ ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ এবং b অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

বিশ্লেষণ : মনে কর, $\triangle ABC$ অভীষ্ট ত্রিভুজ। ইহার BC বাহু $= a$, $\angle ACB = \angle X$ এবং $AB + AC = b$.

এখন, ABC ত্রিভুজের CA-কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত কর যেন, $AD = AB$ হয় BD সংযুক্ত কর।

$\because AD = AB$; $\therefore \angle ADB = \angle ABD$ এবং $CD = CA + AD = CA + AB = b$

অঙ্কন : a-র সমান করিয়া BC একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। BC রেখার C বিন্দুতে $\angle X$-এর সমান করিয়া $\angle BCF$ অঙ্কন কর। CF হইতে b-এর সমান করিয়া CD অংশ কাটিয়া লও। BD সংযুক্ত কর। BD-এর B বিন্দুতে $\angle CDB$-এর সমান করিয়া $\angle DBA$ অঙ্কন কর। AB এবং CD পরস্পর A বিন্দুতে মিলিত হয়। $\triangle ABC$ অভীষ্ট ত্রিভুজ উৎপন্ন হইল।

ABD ত্রিভুজে $\angle ABD = \angle ADB$; $\therefore AB = AD$.

প্রমাণ : এখন, ABC ত্রিভুজের $BC = a$, $\angle BCA = \angle X$ এবং $AB + AC = AC + AD = b$.

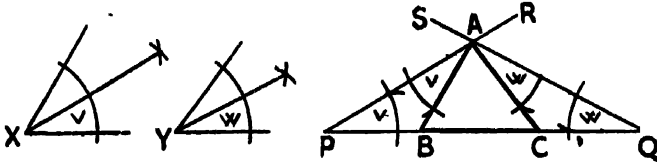
নানাবিধ ত্রিভুজাঙ্কন

সম্পাদ্য 19

ত্রিভুজের পরিসীমা ও ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয় দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw the triangle having given its perimeter and the two base angles.)

s–

X Y P B C Q S A R

মনে কর, s ত্রিভুজের পরিসীমা এবং $\angle X$ ও $\angle Y$ উহার ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : s-এর সমান করিয়া PQ একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। PQ রেখার P বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle X$-এর সমান করিয়া $\angle QPR$ এবং Q বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle Y$-এর সমান করিয়া $\angle PQS$ অঙ্কন কর। PR ও QS পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, PA রেখার A বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle X$-এর সমান করিয়া $\angle PAB$ এবং QA রেখার A বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle Y$-এর সমান করিয়া $\angle QAC$ অঙ্কন কর। AB ও AC রেখাদ্বয় PQ রেখার সহিত যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে মিলিত হয়। $\triangle ABC$ অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : APB ত্রিভুজে $\angle APB = \angle PAB$; $\therefore$ $PB = AB$.

আবার, APB ত্রিভুজের বহিঃকোণ $\angle ABC = \angle APB + \angle PAB$

$$= \frac{1}{2}\angle X + \frac{1}{2}\angle X = \angle X.$$

পুনরায়, AQC ত্রিভুজে $\angle AQC = \angle QAC$; $\therefore$ $CQ = CA$.

আবার, AQC ত্রিভুজের বহিঃকোণ $\angle ACB = \angle AQC + \angle QAC$

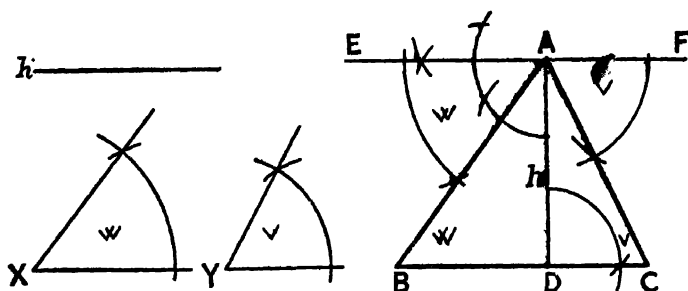
$$= \frac{1}{2}\angle Y + \frac{1}{2}\angle Y = \angle Y.$$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজে $\angle ABC = \angle X$, $\angle ACB = \angle Y$

এবং পরিসীমা $AB + BC + CA = PB + BC + CQ = PQ = s$.

সম্পাদ্য 20

ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন দুইটি কোণ এবং উহার উচ্চতা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw a triangle having given the two base angles and the height.)

মনে কর, ∠X ও ∠Y ত্রিভুজটির ভূমিসংলগ্ন দুইটি কোণ এবং h উহার উচ্চতা। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : h-এর সমান করিয়া AD রেখা অঙ্কন কর। AD রেখার A বিন্দুতে EAF লম্ব এবং D বিন্দুতে CDB লম্ব অঙ্কন কর। এখন, EA রেখার A বিন্দুতে ∠X-এর সমান করিয়া ∠EAB এবং FA রেখার A বিন্দুতে ∠Y-এর সমান করিয়া ∠FAC অঙ্কন কর। AB ও AC রেখাদ্বয় BC-এর সহিত যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে মিলিত হয়। △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : BC ও EF সরলরেখাদ্বয়ের AD লম্ব এবং ∠EAD = ∠ADC = 90°, ইহারা একান্তর কোণ। ∴ BC ∥ EF.

এখন, BC ∥ EF এবং AB উহাদের ছেদক ;

∴ ∠EAB = একান্তর ∠ABC = ∠X.

আবার, BC ∥ EF এবং AC উহাদের ছেদক ;

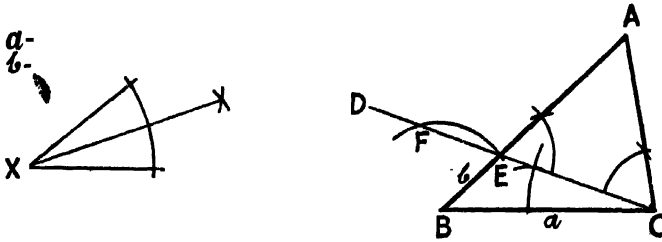
∴ ∠FAC = একান্তর ∠ACB = ∠Y.

∴ ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হইতে ভূমি BC-এর উপর লম্ব AD = h

এবং ∠ABC = ∠X ও ∠ACB = ∠Y.

সম্পাদ্য 21

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং অপর বাহু দুইটির অন্তর দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw a triangle having given the base, the difference of the base angles and the difference of the other two sides.)

মনে কর, a ত্রিভুজের ভূমি, $\angle X$ ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং b অপর দুই বাহুর অন্তর। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : a-র সমান করিয়া BC একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। BC রেখার C বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle X$-এর সমান করিয়া $\angle BCD$ অঙ্কন কর। B-কে কেন্দ্র করিয়া এবং b-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর ; চাপটি CD-কে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। F ছেদবিন্দু অপেক্ষা E ছেদবিন্দুটি C-এর অধিকতর নিকটবর্তী। BE সংযুক্ত করিয়া উহাকে A পর্যন্ত বর্ধিত কর।

CE রেখার C বিন্দুতে $\angle AEC$-এর সমান করিয়া $\angle ECA$ অঙ্কন কর। AC এবং AB পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে। $\triangle ABC$ অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : AEC ত্রিভুজে $\angle AEC = \angle ACE$; $\therefore$ $AE = AC$.

ABC ত্রিভুজে $AB - AC = AB - AE = EB = b$ এবং ত্রিভুজটির ভূমি $BC = a$.

আবার, EBC ত্রিভুজের $\angle EBC + \angle ECB =$ বহিঃ $\angle AEC = \angle ACE$.

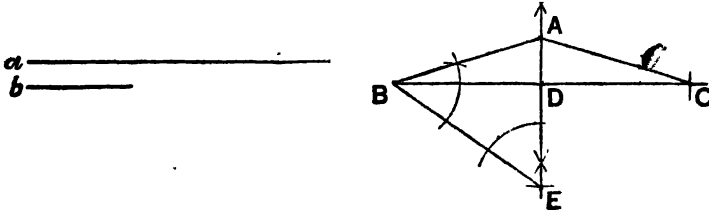
$\therefore \quad \angle EBC + 2\angle ECB = \angle ACE + \angle ECB = \angle ACB.$

অর্থাৎ, $\angle ACB = \angle ABC + 2\angle ECB$

$\therefore \quad \angle ACB - \angle ABC = 2\angle ECB = 2 \times \frac{1}{2}\angle X = \angle X.$

সম্পাদ্য 22

সমবাহু ত্রিভুজের ভূমি এবং সমান বাহুদ্বয়ের একটি ও উহার উচ্চতার অন্তর দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw an isosceles triangle having given the base and the difference of one of the equal sides and its altitude)

মনে কর, a ত্রিভুজের ভূমি এবং b সমান বাহুদ্বয়ের একটি ও ত্রিভুজটির উচ্চতার অন্তর। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : a-র সমান করিয়া BC একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। BC-কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া BC-এর উপর DE লম্ব এমনভাবে অঙ্কন কর যেন, $DE = b$ হয়। BE সংযুক্ত কর। BE রেখার B বিন্দুতে $\angle DEB$-এর সমান করিয়া $\angle EBA$ অঙ্কন কর। ED-কে এমনভাবে বর্ধিত কর, যেন উহা BA-কে A বিন্দুতে ছেদ করে। AC সংযুক্ত কর। $\triangle ABC$ অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : ABE ত্রিভুজে $\angle ABE = \angle AEB$; $\therefore$ $AB = AE$.

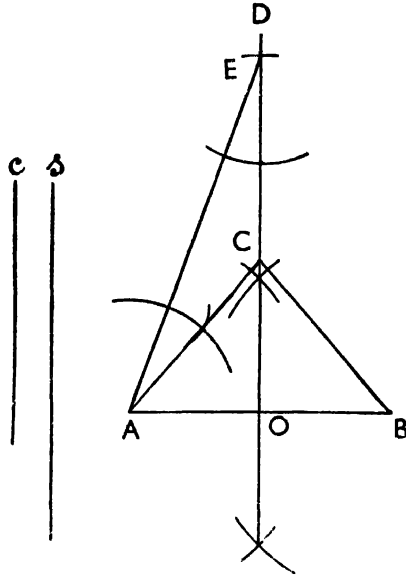
$\therefore$ $AB - AD = AE - AD = DE = b$.

পুনরায়, A বিন্দু, BC-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক AD-এর উপর অবস্থিত ;

$\therefore$ $AB = AC$ এবং অঙ্কনানুসারে $BC = a$.

সম্পাদ্য 23

সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি এবং সমান বাহুদ্বয়ের একটি ও উহার উচ্চতার সমষ্টি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw an isosceles triangle having given the base and the sum of one of the equal sides and its altitude.)

মনে কর, c ত্রিভুজের ভূমি এবং s সমান বাহুদ্বয়ের একটি ও ত্রিভুজটির উচ্চতার সমষ্টি। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : c-এর সমান করিয়া AB একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। AB-কে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া উহার উপর OD লম্ব অঙ্কন কর। O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং s এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। চাপটি OD-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। AE সংযুক্ত কর। AE রেখার A বিন্দুতে $\angle$AEO-এর সমান করিয়া $\angle$EAC অঙ্কন কর। উহা যেন OD-কে C বিন্দুতে ছেদ করে। BC সংযুক্ত কর। $\triangle$ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : ACE ত্রিভুজে $\angle AEC = \angle EAC$; $\therefore$ $AC = EC$.

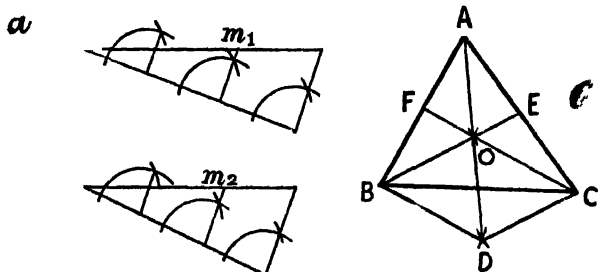
$\therefore$ $AC + CO = EC + CO = OE = s$.

পুনরায়, C বিন্দু, AB-এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক OD-এর উপর অবস্থিত ;

$\therefore$ $AC = BC$ এবং $\triangle$ABC-এর AB ভূমি $= c$.

সম্পাদ্য 24

ত্রিভুজের একটি বাহু এবং অপর দুই বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দুইটি দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw a triangle having given one side and the two medians bisecting the other two sides.)

মনে কর, a ত্রিভুজের একটি বাহু এবং m_1 ও m_2 যথাক্রমে অপর দুই বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমাদ্বয়। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : a-র সমান করিয়া BC একটি সরলরেখা অঙ্কন কর। m_1 ও m_2-কে সমত্রিখণ্ডিত কর। এখন C-কে কেন্দ্র করিয়া $\frac{2}{3} m_1$ এবং B-কে কেন্দ্র করিয়া $\frac{2}{3} m_2$ ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। চাপ দুইটি পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। BO এবং CO সংযুক্ত কর।

এখন B-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OC-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ এবং C-কে কেন্দ্র করিয়া OB-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অপর একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। চাপ দুইটি পরস্পর D বিন্দুতে ছেদ করে। DO সংযুক্ত করিয়া উহাকে A পর্যন্ত এমন ভাবে বর্ধিত কর যেন, OD = OA হয়। AB ও AC সংযুক্ত কর। △ABC অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : BO-কে বর্ধিত করিয়া AC-এর সহিত E বিন্দুতে এবং CO-কে বর্ধিত করিয়া AB-এর সহিত F বিন্দুতে মিলিত কর।

অঙ্কনানুসারে, OBDC একটি সামান্তরিক। ∴ BD ∥ CO, অর্থাৎ, BD ∥ CF এবং CD ∥ BO, অর্থাৎ, CD ∥ BE.

এখন, ACD ত্রিভুজে AD বাহুর মধ্যবিন্দু O এবং ত্রিভুজটির ভূমি CD ∥ OE.

∴ E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু।

আবার, ABD ত্রিভুজে AD বাহুর মধ্যবিন্দু O এবং ত্রিভুজটির ভূমি BD ‖ OF

∴ F, AB বাহুর মধ্যবিন্দু।

∴ ABC ত্রিভুজে BE ও CF যথাক্রমে AC ও AB বাহুদ্বয়ের উপর দুইটি মধ্যম এবং তাহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

∴ $BE=\frac{3}{2}BO=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}m_2=m_2$ এবং $CF=\frac{3}{2}CO=\frac{3}{2}\frac{2}{3}m_1=m_1$;

অধিকন্তু ABC ত্রিভুজের BC বাহু $=a$

সম্পাদ্য 25

ত্রিভুজের ভূমি, শিরঃকোণ এবং অপর দুইটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw a triangle having given the base, the vertical angle and the difference of the other two sides.)

মনে কর, x ত্রিভুজের ভূমি, ∠X উহার শিরঃকোণ এবং y অপর দুই বাহুর অন্তর। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে

অঙ্কন : CD একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া উহা হইতে y-এর সমান করিয়া CE অংশ কাটিয়া লও। ED রেখার E বিন্দুতে $\angle DEB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle X)$ একটি কোণ অঙ্কন কর। C-কেন্দ্র করিয়া x-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। চাপটি EB-কে B বিন্দুতে ছেদ করে। EB রেখার B বিন্দুতে ∠DEB এর সমান করিয়া ∠EBA অঙ্কন কর। BA ও CD পরস্পর A বিন্দুতে মিলিত হয় △ABC

প্রমাণ : ABE ত্রিভুজে $\angle ABE = \angle AEB$; $\therefore$ $AB = AE$.

$\therefore$ ABC ত্রিভুজে $AC - AB = AC - AE = EC = y$.

আবার, $\angle BAC$ অর্থাৎ, $\angle BAE = 180^\circ - (\angle ABE + \angle AEB)$

$= 180^\circ - 2\angle ABE = \angle X$ এবং $BC = x$.

$[\because \angle AEB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle X)]$

সম্পাদ্য 26

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি-সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

(To draw a triangle having given the base, the difference of the base angles and the sum of the other two sides.)

মনে কর, a ত্রিভুজের ভূমি, $\angle X$ ভূমিসংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর এবং s অপর দুই বাহুর সমষ্টি। ত্রিভুজটি অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : BD একটি সরলরেখা অঙ্কন কর এবং উহা হইতে a-র সমান করিয়া BC অংশ কাটিয়া লও। CD রেখার C বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle X$-এর সমান করিয়া $\angle DCE$ অঙ্কন কর। CE রেখার C বিন্দুতে CF লম্ব অঙ্কন কর। B-কে কেন্দ্র করিয়া এবং s-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। চাপটি CF-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। BF সংযুক্ত কর। FC রেখার C বিন্দুতে $\angle BFC$ এর সমান করিয়া $\angle FCA$ অঙ্কন কর। CA ও FB পরস্পর A বিন্দুতে মিলিত হয়। $\triangle ABC$ অভীষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ: ABC ত্রিভুজের $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

আবার, AFC ত্রিভুজের বহিঃ $\angle A=\angle AFC+\angle ACF=2\angle AFC$

$\therefore \quad \angle AFC=\frac{1}{2}\angle A$.

আবার, BCF ত্রিভুজের $\angle B+\angle F=$ বহিঃ $\angle FCD$

$\therefore \quad \angle B+\frac{1}{2}\angle A=\angle FCE+\angle ECD$

$=90°+\frac{1}{2}\angle X$.

$\therefore \quad 2\angle B+\angle A=180°+\angle X=\angle A+\angle B+\angle C+\angle X$

$\therefore \quad \angle B-\angle C=\angle X$.

অধিকন্তু, অঙ্কনানুযায়ী $AB+AC=AB+AF=BF=s$

এবং BC ভূমি $=a$.

অনুশীলনী 16

1. ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু তিনটি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

2. ত্রিভুজের দুই বাহু এবং তৃতীয় বাহুর উপর দণ্ডায়মান মধ্যমা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

3. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণ ও উহার উচ্চতা দেওয়া আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

4. ত্রিভুজের ভূমি, উচ্চতা ও ভূমির সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

5. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। [C. U. 1922]

6. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ এবং অপর বাহুদ্বয়ের অন্তরের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

7. ত্রিভুজের দুই কোণ এবং উচ্চতা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

8. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা ও উচ্চতা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

9. সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহু ও উচ্চতার অন্তরের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

10. সমকোণী ত্রিভুজের ভূমি এবং সমকোণ-বিন্দু হইতে অতিভুজের উপর লম্ব দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর। কখন্ এই প্রকার অঙ্কন অসম্ভব ?

11. ত্রিভুজের ভূমি এবং ভূমির প্রান্তদ্বয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

12. ত্রিভুজের একটি কোণ, কোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের অন্তর এবং ঐ কোণের বিপরীত বাহু দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

13. ত্রিভুজের দুইটি বাহু এবং উহাদের বিপরীত কোণদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

14. ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

[C. U. 1940 ; W B S. B. 1953]

15. ত্রিভুজের শীর্ষকোণ, দুইটি বাহুর সমষ্টি এবং ভূমির দ্বিখণ্ডক মধ্যমা দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

16. ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা এবং ভূমি ভিন্ন অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

পঞ্চম অধ্যায়

ঋজুরেখক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

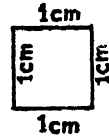
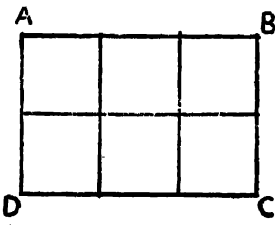
(Area of Rectilineal figures)

একক ও মান : যে-কোন রাশির পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইলে তজ্জাতীয় কোন রাশির সাহায্য লইতে হয়। শেষোক্ত রাশিকে **একক রাশি**, বা সংক্ষেপে, **একক** (Unit) বলে। 1 সে. মি.-কে একক ধরিলে কোন রেখার দৈর্ঘ্য বলা যায় 15 সে. মি. ; 1 মি. মি.-কে একক ধরিলে ঐ রেখার দৈর্ঘ্য বলা যায় 150 মি. মি।

রাশির তজ্জাতীয় এককের কতগুণ, যে সংখ্যাদ্বারা ইহা বুঝিতে পারা যায়, তাহাকে সেই রাশির **মান** (Measure) বা **সংখ্যামান** বলে। মান সর্বদা শুদ্ধ সংখ্যা (Abstract number) দ্বারা প্রকাশিত হয়।

বিভিন্ন একক গ্রহণ করিলে একই রাশির বিভিন্ন মান হইবে ; যেমন, উল্লিখিত উদাহরণে সেন্টিমিটার এককে মান হইল 15 ; কিন্তু মিলিমিটার এককে মান হইল 150.

ক্ষেত্রফল : প্রত্যেক সামতলিক ক্ষেত্র কিছু পরিমাণ স্থান অধিকার করিয়া থাকে। সামতলিক ক্ষেত্রসমূহের সীমারেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ তলের পরিমাণকে ঐ ক্ষেত্রের **ক্ষেত্রফল** বা **কালি** (Area) বলে।

ক্ষেত্রফলের পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইলেও এককের সাহায্য গ্রহণ করিতে হয়। রৈখিক পরিমাণে সাধারণতঃ যে যে একক লওয়া হয়, যথা, মিটার, সেন্টিমিটার, মিলিমিটার ইত্যাদি, ক্ষেত্রফলেও সেই সেই এককের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রকে একক হিসাবে গ্রহণ করা হয়। যেমন, 1 বর্গমিটার, 1 বর্গ সেন্টিমিটার, 1 বর্গ মিলিমিটার ইত্যাদি। 1 মিটার রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে 1 বর্গমিটার বলে; তদ্রূপ 1 সেন্টিমিটার রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে 1 বর্গ সেন্টিমিটার এবং 1 মিলিমিটার রেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে 1 বর্গ মিলি-মিটার বলে।

মনে কর, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র। ইহার দৈর্ঘ্য AB=3 সে. মি. এবং প্রস্থ AD=2 সে মি.; ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

AB রেখাকে তিনটি এবং AD রেখাকে দুইটি সমান অংশে বিভক্ত কর। এই বিভাগবিন্দুগুলির মধ্য দিয়া চিত্রাঙ্কিত উপায়ে লম্বালম্বি এবং আড়া-আড়িভাবে সরলরেখা অঙ্কন করিলেই ABCD আয়তক্ষেত্রটি সমান আয়তনবিশিষ্ট ছয়টি ক্ষেত্রে বিভক্ত হইবে। প্রতিটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 1 সে.মি. এবং প্রস্থ 1 সে. মি.; সুতরাং প্রতিটি ক্ষুদ্র ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1 বর্গ সে মি.।

সুতরাং ABCD আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = 6 বর্গ সে. মি. = 3 সে. মি. × 2 সে. মি. = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ।

অতএব, কোন আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য যদি a একক এবং বিস্তার b একক হয়, তাহা হইলে উহার ক্ষেত্রফল ab বর্গ একক হইবে।

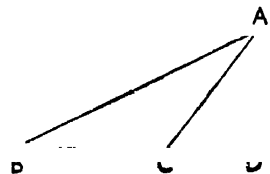
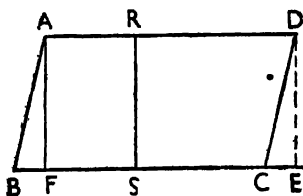
বর্গক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ সমান। সুতরাং কোন বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য যদি a একক হয়, তাহা হইলে ঐ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল a একক × a একক = a^2 বর্গ একক হইবে।

AB সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রকে AB^2 দ্বারা সূচিত করা হয়। আয়তক্ষেত্রকে অনেক সময় বিপরীত কোণদ্বয়ের অক্ষর দুইটি দ্বারাও অভিহিত করা হয়। যেমন, ABCD আয়তক্ষেত্রকে বলা হয়, আয়ত AC.

ত্রিভুজের উন্নতি : কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে ভূমি, বা ভূমির বর্ধিতাংশের উপর অঙ্কিত লম্বকে ঐ ত্রিভুজের **উন্নতি** (Altitude) বা **উচ্চতা** (Height) বলা হয়।

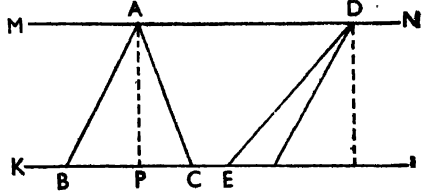
ABC একটি ত্রিভুজ; A উহার শীর্ষবিন্দু এবং BC উহার ভূমি। AD সরলরেখা, BC ভূমির উপর শীর্ষবিন্দু A হইতে অঙ্কিত লম্ব। সুতরাং AD হইতেছে ABC ত্রিভুজের উন্নতি বা উচ্চতা।

আবার, ABC একটি ত্রিভুজ; A উহার শীর্ষবিন্দু এবং BC উহার ভূমি। ত্রিভুজের BC ভূমিকে বর্ধিত করিয়া ভূমির বর্ধিতাংশের উপর শীর্ষবিন্দু A হইতে অঙ্কিত লম্ব হইবে AD; সুতরাং AD হইতেছে ABC ত্রিভুজের উন্নতি বা উচ্চতা।

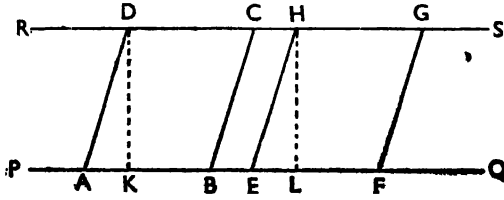
ত্রিভুজের যে-কোন বাহুকে ভূমি ধরিলে প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু এবং তিনটি উচ্চতা পাওয়া যায়।

সামান্তরিকের উন্নতি : সামান্তরিকের যে-কোন বাহুকে ভূমি ধরা হইলে, উহার বিপরীত দিকস্থ বাহুর যে-কোন বিন্দু হইতে উক্ত ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বকে ঐ সামান্তরিকের **উন্নতি** (Altitude) বা **উচ্চতা** (Height) বলা হয়।

ABCD একটি সামান্তরিক এবং BC উহার ভূমি। A, R ও D বিন্দু হইতে যথাক্রমে AF, RS ও DE সামান্তরিকটির ভূমি BC-এর উপর অঙ্কিত লম্ব। সুতরাং AF, RS ও DE প্রত্যেকে ABCD সামান্তরিকের উন্নতি বা উচ্চতা।

কতিপয় প্রয়োজনীয় জ্ঞাতব্য বিষয় :

(i) দুই বা তদধিক ত্রিভুজ একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হইলে, উহাদের উন্নতি পরস্পর সমান।

মনে কর, △ABC এবং △DEF উভয়েই KL এবং MN সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত। AP ও DR যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A এবং DEF ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু D হইতে KL রেখার উপর লম্ব। সুতরাং AP ও DR যথাক্রমে ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের উন্নতি।

∵ AP এবং DR রেখা দুইটি উভয়েই KL রেখার উপর লম্ব, সুতরাং APRD একটি আয়তক্ষেত্র।

∴ AP = DR, অর্থাৎ ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ের উন্নতি সমান।

(ii) দুই বা তদধিক সামান্তরিক একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হইলে, উহাদের উন্নতি পরস্পর সমান।

মনে কর, ABCD এবং EFGH সামান্তরিক দুইটি PQ ও RS সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত। DK ও HL যথাক্রমে ABCD সামান্তরিকের D বিন্দু ও EFGH সামান্তরিকের H বিন্দু হইতে RS রেখার উপর লম্ব। সুতরাং DK ও HL যথাক্রমে ABCD ও EFGH সামান্তরিক দুইটির উন্নতি।

∵ DK এবং HL উভয়েই RS রেখার উপর লম্ব, সুতরাং DKLH একটি আয়তক্ষেত্র।

∴ DK = HL, অর্থাৎ ABCD ও EFGH সামান্তরিক দুইটির উন্নতি সমান।

বর্গাঙ্কিত কাগজের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

(i) ত্রিভুজ :

15 সে. মি. ভূমি এবং 12 সে. মি. উচ্চতাবিশিষ্ট ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহু দ্বারা 1 সে. মি. সূচিত করিয়া এমন একটি ΔABC অঙ্কন কর, যাহার ভূমি 15 সে. মি. এবং উচ্চতা, AD = 12 সে. মি. সূচিত করে।

এখন উহার অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের সংখ্যাগুলি গণনা কর। গণনা করিবার সময় ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের অর্ধাংশ বা উহা অপেক্ষা বৃহত্তর অংশ ত্রিভুজটির ভিতরে থাকিলে উহাকে একটি বর্গক্ষেত্র বলিয়া মনে কর এবং অর্ধাংশের কম হইলে উহাকে বাদ দাও।

এই প্রকারে গণনা করিয়া দেখা যায় যে, উহার অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা 90.

∴ ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = 90 বর্গ সে. মি.।

(ii) **সামান্তরিক**

কোন সামান্তরিকের এক বাহু 15 সে. মি. এবং বিপরীত বাহু হইতে ইহার দূরত্ব (অর্থাৎ, উচ্চতা) 12 সে. মি.। উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহু দ্বারা 1 সে. মি. সূচিত করিয়া এরূপ একটি সামান্তরিক ABCD অঙ্কন কর যাহার উচ্চতা, DE = 12 সে মি. সূচিত করে।

এখন উহার অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলির সংখ্যা গণনা কর। গণনা করিবার সময় ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের অর্ধাংশ বা উহার অধিক অংশ সামান্তরিকের ভিতরে থাকিলে উহাকে একটি বর্গক্ষেত্র বলিয়া মনে কর এবং অর্ধাংশের কম হইলে, উহাকে বাদ দাও।

এই নিয়মে গণনা করিয়া দেখা যায় যে, সামান্তরিকের অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের সংখ্যা 180.

∴ ABCD সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল = 180 বর্গ সে. মি.।

অনুশীলনী 7

1. ছক কাগজে নিম্নলিখিত আয়তক্ষেত্রসমূহ অঙ্কন করিয়া উহাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

(a) দৈর্ঘ্য 6 সে. মি., প্রস্থ 4 সে. মি.।

(b) দৈর্ঘ্য 7·5 সে. মি., প্রস্থ 4·2 সে. মি.।

(c) দৈর্ঘ্য 2·2 মিটার, প্রস্থ 1·5 মিটার।

2. একটি সামান্তরিকের এক বাহু 9·6 সে. মি. এবং উহার বিপরীত বাহুর দূরত্ব 7·5 সে. মি.; সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল কত ?

3. দুইটি সামান্তরিকের উচ্চতা 3·5 সে. মি. এবং তাহারা 4·8 সে. মি. দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান। প্রত্যক্ষ কর, উহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

4. কোন আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 200 বর্গ সে. মি. এবং ইহার দৈর্ঘ্য 16 সে. মি.; আয়তক্ষেত্রটির বিস্তার কত ? ছক কাগজে আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কন কর এবং ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা করিয়া তোমার উক্তির সত্যতা প্রমাণ কর।

5. কোন স্থূলকোণী ত্রিভুজের ভূমি 20 সে. মি. এবং উচ্চতা 18·5 সে. মি. হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

6. কোন আয়তক্ষেত্রের বিস্তার অপরিবর্তিত রাখিয়া উহার দৈর্ঘ্য তিনগুণ করা হইল। আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কতগুণ বর্ধিত হইল ?

7. কোন রম্বসের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 30 মিটার এবং বিপরীত বাহু হইতে উহার দূরত্ব 22 মিটার। রম্বসটির ক্ষেত্রফল কত ?

8. প্রত্যক্ষ কর, সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

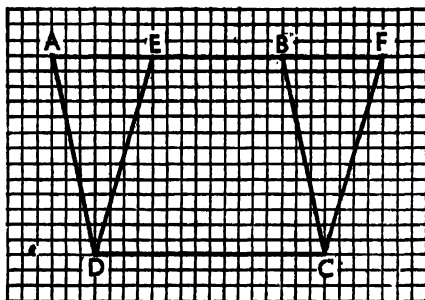
9. 4·8 সে. মি. দৈর্ঘ্য ও 2·7 সে. মি. প্রস্থ-বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য কত ?

10. একটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 15 সে. মি.। উহার ক্ষেত্রফল কত ?

উপপাদ্য 22

একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত, (অথবা একই উন্নতিবিশিষ্ট) সামান্তরিকসমূহের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[Parallelograms standing on the same base and between the same parallels, (or, of the same altitude) are equal in area.]

বর্গাঙ্কিত কাগজের সাহায্যে :

মনে কর, ABCD এবং CDEF সামান্তরিক দুইটি CD ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল DC ও AF-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে, ABCD এবং CDEF সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

এখন, ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা করিয়া দেখ, উহাদের সংখ্যা 208. গণনা করিবার সময় ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের অর্ধাংশ বা উহা অপেক্ষা বৃহত্তর অংশ সামান্তরিকটির ভিতরে থাকিলে গণনা কর এবং অর্ধাংশের কম হইলে উহাকে গণনা হইতে বাদ দাও।

অনুরূপভাবে, CDEF সামান্তরিকের অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গগুলির সংখ্যাও গণনা কর। উহাদের সংখ্যাও 208.

সুতরাং, ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটিকে একক হিসাবে ধরিলে,

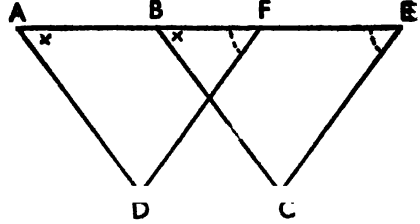
ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = 208 বর্গ একক

এবং CDEF সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = 208 বর্গ একক।

$\therefore$ ABCD সামান্তরিক = CDEF সামান্তরিক।

উপপত্তিক প্রমাণ :

মনে কর, ABCD এবং DCEF সামান্তরিক দুইটি একই ভূমি CD সরলরেখার উপর দণ্ডায়মান এবং উহারা একই সমান্তরাল-যুগল CD ও AE-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে, ABCD এবং DCEF সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

প্রমাণ : AD ∥ BC এবং AE উহাদের ছেদক,

∴ ∠DAE = অনুরূপ ∠CBE.

আবার, DF ∥ CE এবং AE উহাদের ছেদক, ∴ ∠DFA = অনুরূপ ∠CEB

এখন, ADF এবং BCE ত্রিভুজদ্বয়ে, ∠DAE = ∠CBE, ∠DFA = ∠CEB এবং AD = BC. (∵ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলি পরস্পর সমান)

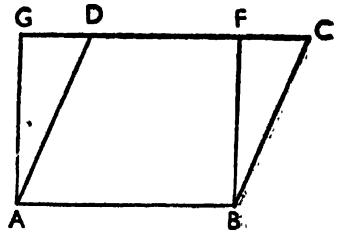
∴ △ADF ≡ △BCE.

∴ সমগ্র চতুর্ভুজ ADCE − △BCE = সমগ্র চতুর্ভুজ ADCE − △ADF.

∴ ABCD সামান্তরিক = DCEF সামান্তরিক।

দ্রষ্টব্য :

মনে কর, ABCD সামান্তরিক এবং ABFG আয়তক্ষেত্র একই ভূমি AB-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল AB ও GC-এর মধ্যে অবস্থিত।

ইহারা একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া ইহাদের উচ্চতাও সমান।

যেহেতু, আয়তক্ষেত্রও বিশেষ একপ্রকার সামান্তরিক, সুতরাং ABCD সামান্তরিক এবং ABFG আয়তক্ষেত্র পরস্পর সমান।

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = ভূমি × উচ্চতা।

BF, ABCD সামান্তরিকের উচ্চতা।

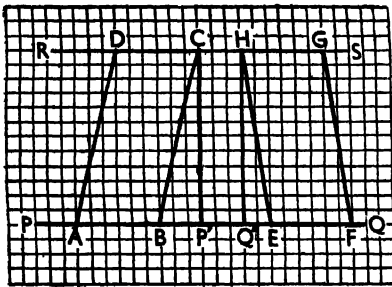
∴ ABCD সামান্তরিক = ভূমি × উচ্চতা = AB × BF.

অতএব, **সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা।**

অনুসিদ্ধান্ত : সমান সমান ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত (বা, একই উন্নতিবিশিষ্ট) সামান্তরিকসমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

বর্গাঙ্কিত কাগজের সাহায্যে :

মনে কর, ABCD ও EFGH সামান্তরিক দুইটি সমান সমান ভূমি AB ও EF-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল PQ ও RS-এর মধ্যে অবস্থিত। (ইহাদের উচ্চতা যথাক্রমে CP′ এবং HQ′ পরস্পর সমান।)

প্রমাণ করিতে হইবে, ABCD এবং EFGH সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

এখন, ABCD সামান্তরিকের অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা করিয়া দেখ, উহাদের সংখ্যা 72. গণনা করিবার সময় ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের অর্ধাংশ বা উহা অপেক্ষা বৃহত্তর অংশ সামান্তরিকটির ভিতরে থাকিলে উহাকে গণনা কর এবং অর্ধাংশের কম হইলে উহাকে গণনা হইতে বাদ দাও।

অনুরূপভাবে, EFGH সামান্তরিকের অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গগুলির সংখ্যাও গণনা কর। উহাদের সংখ্যাও 72.

সুতরাং, ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটিকে একক হিসাবে ধরিলে,

ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = 72 বর্গ একক

এবং FFGH সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = 72 বর্গ একক।

∴ ABCD সামান্তরিক = EFGH সামান্তরিক।

ঔপপত্তিক প্রমাণ :

মনে কর, ABCD এবং EFGH সামান্তরিক দুইটি যথাক্রমে সমান সমান ভূমি AB ও EF-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল PQ ও RS-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে, ABCD ও EFGH সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

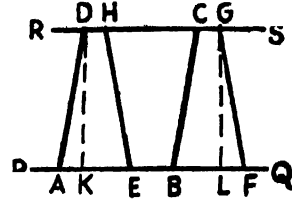
অঙ্কন : D ও G বিন্দুদ্বয় হইতে PQ রেখার উপর যথাক্রমে DK ও GL লম্ব অঙ্কন কর। ∴DK, ABCD সামান্তরিকের এবং GL, EFGH সামান্তরিকের উচ্চতা।

প্রমাণ : সর্তানুসারে, AB = EF এবং DK = GL.

ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = AB × DK ;

এবং EFGH সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল

= EF × GL.

∴ ABCD সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল = EFGH সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল।

অনুশীলনী 8

1. সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর :

(a) ভূমি 8 সে. মি., উচ্চতা 6·4 সে. মি.

(b) ভূমি 12 সে. মি., উচ্চতা 10·5 সে. মি.

(c) ভূমি 5·5 সে মি, উচ্চতা 3·2 সে. মি.

2. একই ভূমির উপর অঙ্কিত এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট সামান্তরিক ও আয়তক্ষেত্রের মধ্যে আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা ক্ষুদ্রতর।

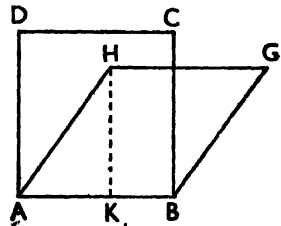
3. কোন সরলরেখার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র উহার অর্ধেকের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের চারিগুণ।

4. একই বাহুর উপর দণ্ডায়মান রম্বস্ ও বর্গক্ষেত্রের মধ্যে কোন্‌টির ক্ষেত্রফল বৃহত্তর? [C. U. 1940]

মনে কর, AB ভূমির উপর ABCD বর্গক্ষেত্র এবং ABGH রম্বস্ দণ্ডায়মান। HK রম্বসের উচ্চতা।

এখন, ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AB × BC

= AB × AH. (∵ BC = AH)

আবার, ABGH রম্বসের ক্ষেত্রফল = AB × HK.

কিন্তু, AKH সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ AH > HK.

∴ AB × AH > AB × HK ∴ ABCD বর্গক্ষেত্র > ABGH রম্বস্।

5. একটি সামান্তরিকের কোন বাহুর উপর উহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি রম্বস্ অঙ্কন কর। [C. U. 1935]

[**ইঙ্গিত :** ABCD একটি সামান্তরিক। A ও B-কে কেন্দ্র করিয়া ও প্রতিস্থলে AB ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কিত কর। উহারা DC ও বর্ধিত DC-কে যথাক্রমে F ও E বিন্দুতে ছেদ করিল। ABEF উদ্দিষ্ট রম্বস্। প্রমাণ নিজে কর।

দ্রষ্টব্য : সামান্তরিকের ক্ষুদ্রতর বাহুকে যদি ভূমি ধরা যায়, তাহা হইলে রম্বস্‌টি অঙ্কন করা অসম্ভব হইবে।]

6. একই ভূমি এবং সমান উন্নতিবিশিষ্ট সামান্তরিকগুলির মধ্যে আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা ক্ষুদ্রতর।

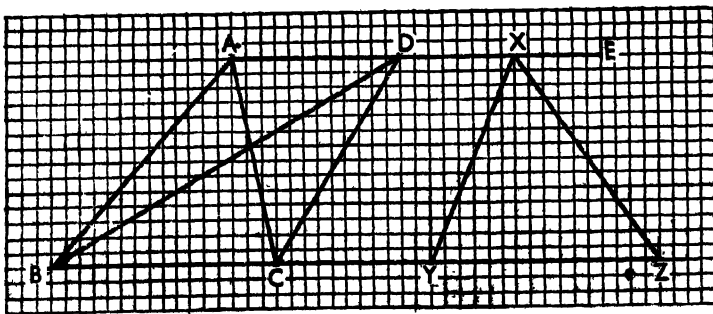
7. দুইটি সমান সামান্তরিক একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত হইলে, তাহারা একই সমান্তরালদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে।

8. কোন সামান্তরিকের কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু দিয়া অঙ্কিত সরলরেখা সেই সামান্তরিককে সমান দুই অংশে বিভক্ত করে।

9. ABCD সামান্তরিকের BC, CD, DA ও AB বাহু-চতুষ্টয়ের মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে P, Q, R ও S. প্রমাণ কর যে, APCR ও BQDS ক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

উপপাদ্য 23

একই (বা, সমান সমান) ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত (বা, একই উচ্চতাবিশিষ্ট) ত্রিভুজগুলির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[Triangles on the same base (or, on equal bases) and between the same parallels (or, of the same altitude) are equal in area.]

(i) মনে কর, ABC ও DBC ত্রিভুজ দুইটি একই ভূমি BC-এর উপর দণ্ডায়মান

এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল AE ও BZ-এর মধ্যে অবস্থিত। যেহেতু ইহারা একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত, সেইহেতু ইহাদের উচ্চতাও সমান।

(ii) আরও মনে কর, ABC ও XYZ ত্রিভুজ দুইটি যথাক্রমে সমান সমান ভূমি BC ও YZ-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল AE ও BZ-এর মধ্যে অবস্থিত। যেহেতু ইহারা একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত, সেইহেতু ইহাদের উচ্চতাও সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে, (i) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = DBC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

(ii) ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = XYZ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ : (i) ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা করিয়া দেখ, উহাদের সংখ্যা 112. গণনা করিবার সময় ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের অর্ধাংশ বা উহা অপেক্ষা বৃহত্তর অংশ সামান্তরিকের ভিতরে থাকিলে উহাকে গণনা কর এবং অর্ধাংশের কম হইলে উহাকে গণনা হইতে বাদ দাও।

অনুরূপভাবে, DBC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা করিয়া দেখ। উহাদের সংখ্যাও 112

সুতরাং, ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটিকে একক হিসাব ধরিলে,

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 112 বর্গ একক ; এবং DBC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 112 বর্গ একক। $\therefore$ $\triangle ABC = \triangle DBC$.

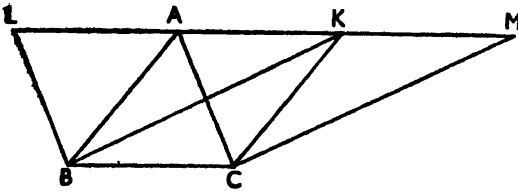
(ii) ABC ও XYZ ত্রিভুজদ্বয়ের অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা করিয়া দেখ, উহাদের সংখ্যা প্রতি ক্ষেত্রেই 112. গণনা করিবার সময় ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের অর্ধাংশ বা উহা অপেক্ষা বৃহত্তর অংশ সামান্তরিকের ভিতরে থাকিলে উহাকে গণনা কর এবং অর্ধাংশের কম হইলে উহাকে গণনা হইতে বাদ দাও।

সুতরাং, ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটিকে একক হিসাবে ধরিলে,

ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 112 বর্গ একক এবং XYZ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 112 বর্গ একক। $\therefore$ $\triangle ABC = \triangle XYZ$.

উপপত্তিক প্রমাণ :

(i) মনে কর, $\triangle ABC$ ও $\triangle KBC$ একই ভূমি BC-এর উপর দণ্ডায়মান এবং উহারা সমান্তরাল-যুগল AK ও BC-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ △ABC ও △KBC একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া উহাদের উচ্চতা সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে, △ABC = △KBC.

অঙ্কন : B বিন্দু দিয়া AC-এর সমান্তরাল করিয়া BL এবং C বিন্দু দিয়া BK-এর সমান্তরাল করিয়া CM সরলরেখা দুইটি অঙ্কন কর।

AK সরলরেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত কর। মনে কর, বর্ধিত AK রেখা BL-কে L বিন্দুতে এবং CM-কে M বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : AK রেখাটি উভয়দিকে বর্ধিত করায় LM রেখাটি উৎপন্ন হইয়াছে। যেহেতু AK ∥ BC, সুতরাং LM ∥ BC.

এখন, LBCA এবং KBCM সামান্তরিক দুইটি একই ভূমি এবং একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

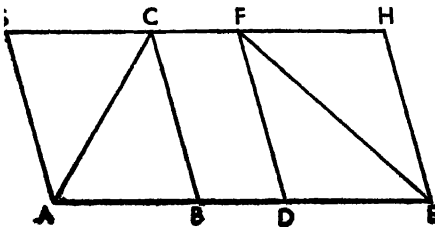
∴ LBCA সামান্তরিক = KBCM সামান্তরিক।

আবার, সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

∴ △ABC = LBCA সামান্তরিকের অর্ধেক এবং △KBC = KBCM সামান্তরিকের অর্ধেক।

∴ △ABC ও △KBC সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট সামান্তরিকের অর্ধেক।

∴ △ABC = △KBC.

(ii) মনে কর, △ABC ও △DEF যথাক্রমে সমান সমান ভূমি AB ও DE-এর উপর অবস্থিত এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল AE ও CF-এর মধ্যে অবস্থিত।

△ABC ও △DEF একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত বলিয়া উহাদের উচ্চতাও সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে, △ABC = △DEF.

অঙ্কন : A বিন্দু দিয়া BC সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া AS রেখা অঙ্কন কর। মনে কর, উহা বর্ধিত FC-কে S বিন্দুতে ছেদ করে।

পুনরায়, E বিন্দু দিয়া DF সরলরেখার সমান্তরাল করিয়া EH রেখা অঙ্কন কর। মনে কর, উহা বর্ধিত CF-কে H বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : CF রেখাটি উভয় দিকে বর্ধিত করায় SH রেখাটি উৎপন্ন হইয়াছে। যেহেতু AE ‖ CF, সুতরাং SH ‖ AE.

এখন, ABCS এবং DEHF সামান্তরিক দুইটি যথাক্রমে সমান সমান ভূমি AB ও DE-এর উপরি দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল SH ও AE-এর মধ্যে

∴ ABCS সামান্তরিক = DEHF সামান্তরিক।

আবার, সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

∴ $\triangle$ABC = ABCS সামান্তরিকের অর্ধেক

এবং $\triangle$DEF = DEHF সামান্তরিকের অর্ধেক।

∴ $\triangle$ABC ও $\triangle$DEF দুইটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট সামান্তরিকের অর্ধেক।

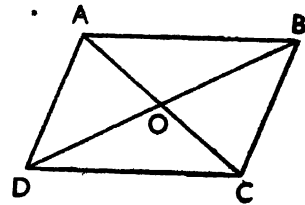
∴ $\triangle$ABC = $\triangle$DEF.

অনুশীলনী 9

1. ত্রিভুজের প্রত্যেক মধ্যমা ত্রিভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। [D. B. 1948]

2. সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিককে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট চারিটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে। [W. B. S. B. 1952]

মনে কর, ABCD সামান্তরিকের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করিয়া সামান্তরিকটিকে AOB, AOD, COB ও COD চারিটি ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, ত্রিভুজ চারিটির ক্ষেত্রফল সমান।

প্রমাণ : সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে

∴ OA = OC এবং OB = OD.

এখন, $\triangle AOB$ এবং $\triangle AOD$ যথাক্রমে সমান সমান ভূমি OB এবং OD-এর উপর দণ্ডায়মান।

যেহেতু ত্রিভুজ দুইটির শীর্ষবিন্দু A, সেইহেতু উহাদের উচ্চতাও সমান।

$\therefore \quad \triangle AOB = \triangle AOD.$

পুনরায়, $\triangle AOD$ এবং $\triangle COD$ যথাক্রমে সমান সমান ভূমি OA এবং OC-এর উপর দণ্ডায়মান।

যেহেতু ত্রিভুজ দুইটির শীর্ষবিন্দু D, সেইহেতু উহাদের উচ্চতাও সমান।

$\therefore \quad \triangle AOD = \triangle COD.$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, $\triangle COB = \triangle AOB$ এবং $\triangle COD = \triangle COB.$

$\therefore$ AOB, AOD, COB ও COD ত্রিভুজ চারিটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

3. ABCD সামান্তরিকের AC কর্ণের উপর X একটি বিন্দু। XB এবং XD সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর, BAX, DAX ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

[**ইঙ্গিত :** AC-এর উপর BL ও DM লম্বদ্বয় টান। $\triangle ABL = \triangle CDM.$

$\therefore \quad BL = DM$, ইত্যাদি।]

4. ABCD ট্রাপিজিয়ামের AD ও BC বাহু সমান্তরাল। উহার AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, AOB এবং COD ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

5. সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র এবং একটি সামান্তরিক উহাদের সাধারণ ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের পরিসীমা আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

6. সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ও একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত, ত্রিভুজদ্বয়ের ভূমি পরস্পর সমান।

7. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে পাঁচটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া ত্রিভুজটির ভূমিকে সমান পাঁচ অংশে বিভক্ত করিলে ত্রিভুজটিও পাঁচটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট পাঁচটি ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে।

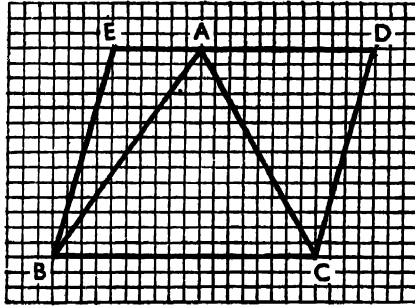
8. ABC একটি ত্রিভুজ, D ও E যথাক্রমে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর, $\triangle ADE = \frac{1}{4}\triangle ABC.$

9. ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরলরেখা ট্রাপিজিয়ামকে দুইটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ট্রাপিজিয়ামে বিভক্ত করে।

উপপাদ্য 24

একটি ত্রিভুজ এবং একটি সামান্তরিক একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত হইলে, ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

(If a triangle and a parallelogram stand on the same base and are between the same parallels, the area of the triangle is half that of the parallelogram.)

বর্গাঙ্কিত কাগজের সাহায্যে :

মনে কর, ABC ত্রিভুজ এবং BCDE সামান্তরিক একই ভূমি BC-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল ED ও BC-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল BCDE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

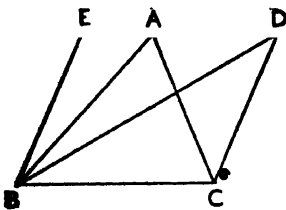
প্রমাণ : ABC ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা করিয়া দেখ, উহাদের সংখ্যা .26. গণনা করিবার সময় ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের অর্ধাংশ বা উহা অপেক্ষা বৃহত্তর অংশ ত্রিভুজের ভিতরে থাকিলে উহাকে গণনা কর এবং অর্ধাংশের কম হইলে উহাকে গণনা হইতে বাদ দাও।

অনুরূপভাবে, BCDE সামান্তরিকের অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা করিয়া দেখ। উহাদের সংখ্যা 252.

সুতরাং, ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের একটিকে একক হিসাবে ধরিলে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল =126 বর্গ একক এবং BCDE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল=252 বর্গ একক।

∴ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল=BCDE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

ঔপপত্তিক প্রমাণ :

মনে কর, ABC ত্রিভুজ এবং BCDE সামান্তরিক BC ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল BC ও DE-এর মধ্যে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল BCDE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

অঙ্কন : BCDE সামান্তরিকের BD কর্ণ সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : সামান্তরিকের কর্ণ সামান্তরিককে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

∴ BCDE সামান্তরিকের কর্ণ BD সামান্তরিকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

∴ BCD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল BCDE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

আবার, △ABC ও △DBC একই ভূমি BC-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল BC, ED-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ △ABC=△DBC.

কিন্তু DBC ত্রিভুজ=BCDE সামান্তরিকের অর্ধেক ;

∴ ABC ত্রিভুজ=BCDE সামান্তরিকের অর্ধেক।

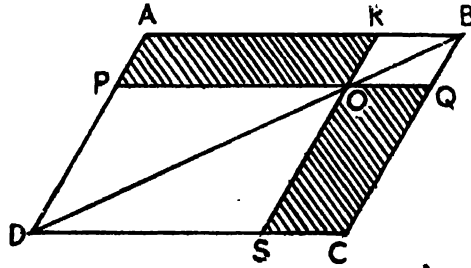
অতএব, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল BCDE সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক।

অনুসিদ্ধান্ত 1. যদি সমান উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ ও একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান থাকে, তাহা হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. যে সকল ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সমান, তাহাদের উচ্চতা সমান হইলে ভূমিও সমান হইবে।

সংজ্ঞা :

পূরক সামান্তরিক :

সামান্তরিকের যে কোন কর্ণের উপর অবস্থিত কোন একটি বিন্দু দিয়া সামান্তরিকটির দুইটি সন্নিহিত বাহুর সমান্তরাল করিয়া দুইটি সরলরেখা অঙ্কন করিলে যে চারিটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়, তাহাদের মধ্যে যে দুইটি কর্ণ, মূল সামান্তরিকের কর্ণের সহিত এক, তাহাদিগকে উক্ত কর্ণের **পার্শ্বস্থ সামান্তরিক** (Parallelograms

about the diagonal) এবং অবশিষ্ট দুইটির প্রত্যেককে প্রথম দুইটির **পূরক** (Complements) বলে।

চিত্রে POSD এবং ROQB দুইটি পার্শ্বস্থ সামান্তরিক এবং AROP এবং OQCS সামান্তরিক দুইটিকে উহাদের পূরক বলা হয়।

নানাবিধ ঋজুরেখক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :

A. **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল** (Area of a Triangle) :

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ ; ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

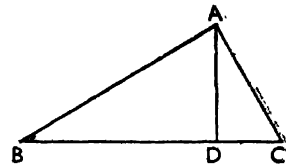
ABC ত্রিভুজের BC ভূমির উপর AD লম্ব অঙ্কন কর। সুতরাং AD, ABC ত্রিভুজটির উচ্চতা।

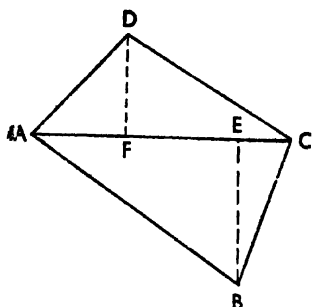
AD ও BC বাহু দুইটি দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= BC \times AD$.

আবার, একই BC ভূমি এবং একই AD উচ্চতা-

বিশিষ্ট ABC ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল উক্ত আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক, অর্থাৎ, $\frac{1}{2} \times BC \times AD$.

$\therefore \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AD.$

$\therefore$ **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা।**

B চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a Quadrilateral) :

মনে কর, ABCD একটি চতুর্ভুজ, ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

ABCD চতুর্ভুজের AC কর্ণ সংযুক্ত কর এবং B ও D বিন্দু দুইটি হইতে AC কর্ণের উপর যথাক্রমে BE ও DF লম্ব দুইটি অঙ্কন কর।

∴ AC হইতে B ও D বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব যথাক্রমে BE এবং DF

এখন, ABCD চতুর্ভুজ $= \triangle ABC + \triangle ADC$

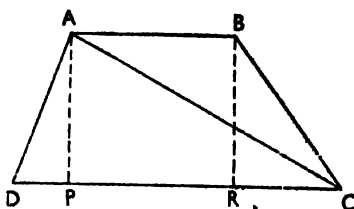
$= \frac{1}{2} \times AC \times BE + \frac{1}{2} \times AC \times DF$

$= \frac{1}{2}AC(BE + DF)$.

∴ **চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল**

$= \frac{1}{2} \times$ যে কোন কর্ণ $\times$ ঐ কর্ণ হইতে বিপরীত শীর্ষদ্বয়ের দূরত্বের সমষ্টি।

C. ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল (Area of a Trapezium) :

মনে কর, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম, ইহার AB ∥ CD ট্রাপিজিয়ামটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

ABCD ট্রাপিজিয়ামের AC কর্ণ সংযুক্ত কর এবং A ও B বিন্দু দুইটি হইতে DC রেখার উপর যথাক্রমে AP ও BR লম্ব দুইটি অঙ্কন কর।

∴ AP, $\triangle ADC$-এর উচ্চতা এবং RB, $\triangle ABC$-এর উচ্চতা।

∴ $\triangle ADC = \frac{1}{2} \times CD \times AP$ এবং $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times RB$

∴ $\triangle ADC + \triangle ABC =$ ABCD ট্রাপিজিয়াম

$= \frac{1}{2}CD \times AP + \frac{1}{2}AB \times RB$

$= \frac{1}{2} \times AP \times (CD + AB)$

(∵ $AP = RB =$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব।)

∴ **ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল**

$= \frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব $\times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি।

D. রম্বসের ক্ষেত্রফল ঃ

মনে কর, ABCD একটি রম্বস ; ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

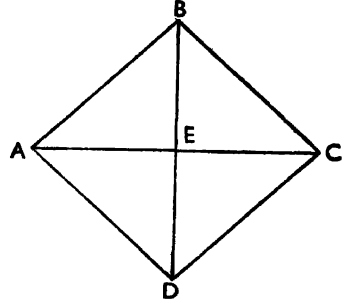
ABCD রম্বসের AC ও BD কর্ণদ্বয় ংযুক্ত কর।

মনে কর, ইহারা পরস্পর E বিন্দুতে ম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

∴ ABCD রম্বস $= \triangle ABC + \triangle ADC$

$= \frac{1}{2} \times AC \times BE + \frac{1}{2} \times AC \times DE$

$= \frac{1}{2} \times AC \times (BE + DE)$

$= \frac{1}{2} \times AC \times ED.$

∴ **রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ কর্ণদ্বয়ের গুণফল।**

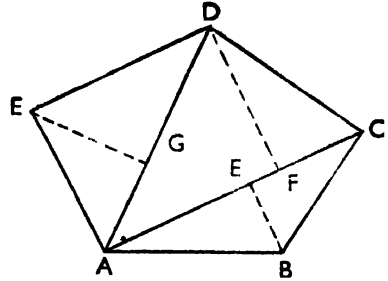
E. বহুভুজের ক্ষেত্রফল ঃ

মনে কর, ABCDE একটি বহুভুজ ; ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিতে হইবে।

AC ও AD সংযুক্ত কর। B বিন্দু ইতে AC-এর উপর BE, D বিন্দু হইতে .C-এর উপর DF এবং E বিন্দু হইতে D-এর উপর EG লম্ব তিনটি অঙ্কন কর।

∴ ABCDE বহুভুজ $= \triangle ABC + \triangle ACD + \triangle AED$

$= \frac{1}{2}AC.BE + \frac{1}{2}AC.DF + \frac{1}{2}AD.EG$

$= \frac{1}{2}(AC.BE + AC.DF + AD.EG)$

উল্লিখিত প্রণালীতে যদি ঋজুরেখ ক্ষেত্রটিকে কয়েকটি ত্রিভুজে বিভক্ত করিয়া ঐ ভুজসমূহের ক্ষেত্রফল বাহির করা হয়, তাহা হইলে ঐ ত্রিভুজসমূহের ক্ষেত্রফলের মষ্টিই ঋজুরেখ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল হইবে।

এই প্রণালীতে ঋজুরেখ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিবার পদ্ধতিকে **ত্রিভুজীকরণ ণালী** (Method of Triangulation) বলে।

অনুশীলনী 10

1 চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

2 ABCD একটি সামান্তরিকের মধ্যে অবস্থিত O একটি বিন্দু। প্রমাণ কর, AOB ও COD ত্রিভুজদ্বয়ের সমষ্টি সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক। [C U. 1930]

3. ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা ট্রাপিজিয়ামকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4. সমান উচ্চতাবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজের ভূমি অসমান হইলে বৃহত্তর ভূমিবিশিষ্ট ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল বৃহত্তর হইবে। [C. U. 1912]

5. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর যে কোন বিন্দু হইতে অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের সমষ্টি ভূমির যে কোন এক প্রান্ত হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের সমান।

6 O, ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমার উপর একটি বিন্দু। প্রমাণ কর, AOB এবং AOC ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

7. ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E. প্রমাণ কর AED ত্রিভুজ, ABC ত্রিভুজের এক-চতুর্থাংশ।

8 ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকটির সমান্তরাল। [C U 1936]

9 ABCD ট্রাপিজিয়ামের AD ও BC বাহু সমান্তরাল। AB-এর মধ্যবিন্দু E হইলে প্রমাণ কর, EDC ত্রিভুজ, ABCD ট্রাপিজিয়ামের অর্ধেক।

10 কোন সামান্তরিকের একটি কর্ণের পার্শ্ববর্তী সামান্তরিক দুইটির পূরকদ্বয় পরস্পর সমান।

11 কোন চতুর্ভুজের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য 12 5 সে মি এবং এই কর্ণের উপর বিপরীত শীর্ষবিন্দু হইতে পাতিত লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য 4 6 সে মি এবং 2 4 সে মি চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

12 একটি ত্রিভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব এবং উহাদের দৈর্ঘ্য 8 সে মি. ও 1- সে মি ; চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল কত ?

13 একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় 9 সে মি ও 30 সে মি এবং তির্যক বাহুদ্বয় 17 সে মি ও 10 সে.মি.। ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

14. একটি রম্বসের প্রত্যেক বাহু 4 মিটার এবং একটি কোণ 60° ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

15. কোন রম্বসের কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 16 সে.মি. ও 12 সে.মি. হইলে উহার ক্ষেত্রফল কত ?

16. একটি ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল 1400 বর্গ মিটার এবং উহার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব 20 মিটার। সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের অনুপাত 3 : 4 হইলে, ঐ বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

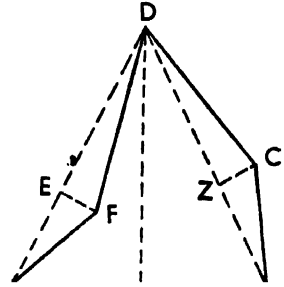
17. একটি ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল 63 বর্গমিটার। উহার তির্যক বাহু দুইটির মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখার দৈর্ঘ্য 9 মিটার হইলে উহার উচ্চতা কত ?

18. পার্শ্বের চিত্রটিতে

AB = BD = DA = 6 সে.মি ,

EF = CZ = 1 সে.মি.

এবং DG = 5·2 সে.মি.

(i) ABCD ও (ii) DFAB চতুর্ভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[**ইঙ্গিত :**

ABCD চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = ABD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল + BCD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times AB \times GD + \frac{1}{2} \times BD \times CZ$

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 5·2$ বর্গ সে.মি. $+ \frac{1}{2} \times 6 \times 1$ বর্গ সে.মি.

$= (15·6 + 3)$ বা 18·6 বর্গ সে. মি.।

DFAB চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল = ABD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল − AFD ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times 6 \times 5·2$ বর্গ সে. মি. $- \frac{1}{2} \times AD \times EF$

$= 15·6$ বর্গ সে মি. $- \frac{1}{2} \times 6 \times 1$ বর্গ সে. মি.

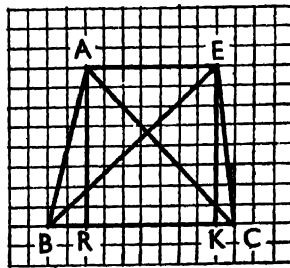
$= (15·6 - 3)$ বা 12·6 বর্গ সে.মি.]

19. দুইটি সমান্তরিকের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান এবং উহাদের অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক হইলে সামান্তরিক দুইটির ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান হইবে।

উপপাদ্য 25

একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং উহার একই পার্শ্বে অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ত্রিভুজগুলি একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

(Equal triangles on the same base and on the same side of it are between the same parallels.)

বর্গাঙ্কিত কাগজের সাহায্যে :

মনে কর, ABC ও EBC সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজদ্বয় (প্রত্যেক ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 40 বর্গ একক) একই ভূমি BC-এর উপর এবং ইহার একই পার্শ্বে অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে, ত্রিভুজ দুইটি একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

অঙ্কন : ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হইতে BC ভূমির উপর AR লম্ব এবং EBC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু E হইতে BC ভূমির উপর EK লম্ব দুইটি অঙ্কন কর। AE সংযুক্ত কর।

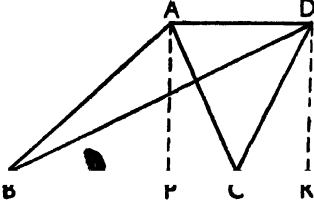
প্রমাণ : গণনা করিয়া দেখ, $\triangle$ABC-এর উচ্চতা AR এবং $\triangle$EBC-এর উচ্চতা ER, প্রত্যেকে ক্ষুদ্র ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের ৮-টি বাহুর সমষ্টির সমান ; সুতরাং উহারা পরস্পর সমান।

আবার, AR এবং EK একই সরলরেখা BC-এর উপর লম্ব ; সুতরাং উহারা সমান্তরাল।

এখন ARKE চতুর্ভুজটির দুইটি বিপরীত বাহু, AR এবং EK পরস্পর সমান ও সমান্তরাল ; অতএব উহা একটি সামান্তরিক।

$\therefore$ AE ও BC সমান্তরাল।

ঔপপত্তিক প্রমাণ :

মনে কর, ABC ও DBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BC-এর উপর দণ্ডায়মান, উহারা BC ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত এবং উহাদের ক্ষেত্রফল সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে, ত্রিভুজদ্বয় একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

অঙ্কন : AD সংযুক্ত কর এবং A ও D হইতে ভূমি BC-এর (অথবা, উহার বর্ধিতাংশের) উপর যথাক্রমে AP ও DR লম্ব দুইটি অঙ্কন কর।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ = BC ও AP বাহুদ্বয় দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক এবং $\triangle DBC$ = BC ও DR বাহুদ্বয় দ্বারা গঠিত আয়তক্ষেত্রের অর্ধেক।

$\therefore \quad \triangle ABC = \triangle DBC \quad \therefore \quad \frac{1}{2}BC \times AP = \frac{1}{2}BC \times DR \quad \therefore \quad AP = DR.$

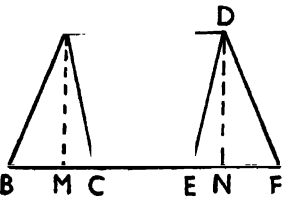
আবার, AP ও DR উভয়ে একই সরলরেখা BC-এর (বা, উহার বর্ধিতাংশের) উপর লম্ব। $\therefore$ AP $\parallel$ DR.

এখন, APRD চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু AP ও DR পরস্পর সমান ও সমান্তরাল। সুতরাং APRD একটি সামান্তরিক। $\therefore$ AD $\parallel$ PR.

কিন্তু BC ও PR একই সরলরেখায় অবস্থিত। $\therefore$ AD $\parallel$ BC.

সুতরাং, $\triangle ABC$ ও $\triangle DBC$ একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত 1. সমান সমান ভূমির উপর দণ্ডায়মান সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজসমূহের ভূমি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে, এবং ত্রিভুজসমূহ ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত থাকিলে উহারা একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত থাকিবে।

মনে কর, সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয় সমান সমান ভূমি BC ও EF-এর উপর একই পার্শ্বে দণ্ডায়মান এবং তাহাদের ভূমি BC ও EF একই BF রেখার উপর অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে, ত্রিভুজদ্বয় একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

অঙ্কন : AD সংযুক্ত কর এবং A ও D বিন্দু হইতে BF-এর উপর যথাক্রমে AM ও DN লম্ব দুইটি অঙ্কন কর।

প্রমাণ : $\triangle ABC = BC, AM$ আয়তের অর্ধেক $= \frac{1}{2}BC\ AM$

এবং $\triangle DEF = EF, DN$ আয়তের অর্ধেক $= \frac{1}{2}EF\ DN$.

$\therefore\ BC.AM = EF.DN\ (\because\ \triangle ABC = \triangle DEF)$

$\therefore\ AM = DN\ (\because\ BC = EF)$

এখন, AMND চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু AM ও DN পরস্পর সমান এবং ইহারা উভয়ে BF-এর উপর লম্ব বলিয়া পরস্পর সমান্তরাল।

$\therefore$ AMND একটি সামান্তরিক। $\therefore$ $AD \parallel MN$, অর্থাৎ BF.

$\therefore$ $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ একই সমান্তরাল-যুগলের মধ্যে অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত 2. সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভূজ একই ভূমির উপর দণ্ডায়মান হইলে তাহাদের উচ্চতাও সমান হইবে।

অনুশীলনী 10

1. প্রমাণ কর, ABCD সামান্তরিকের BD কর্ণ A ও C হইতে সমদূরবর্তী।

2. সমান সমান ত্রিভূজ একই ভূমির উপর অবস্থিত হইলে, তাহাদের উচ্চতা-গুলিও পরস্পর সমান।

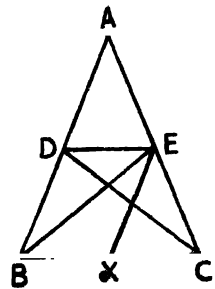
3. ABC ও DBC ত্রিভূজদ্বয় সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এবং উহারা BC রেখার দুই পার্শ্বে অবস্থিত। প্রমাণ কর, BC রেখা AD-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

4. ত্রিভূজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও অর্ধেক হইবে।

ABC একটি ত্রিভূজ। D এবং E যথাক্রমে AB ও AC-এর মধ্যবিন্দু। DE সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, (i) $DE \parallel BC$ এবং (ii) $DE = \frac{1}{2}BC$.

BE ও CD সংযুক্ত কর। মনে কর, X, BC-এর মধ্যবিন্দু; EX যোগ কর।

A D E B X C

প্রমাণ : (i) CD সরলরেখা $\triangle ABC$-এর মধ্যমা বলিয়া,

$\triangle BCD = \triangle ACD = \frac{1}{2}\triangle ABC$. অনুরূপভাবে, $\triangle BEC = \triangle BEA = \frac{1}{2}\triangle ABC$.

$\therefore$ $\triangle BEC = \triangle CDB$ এবং ইহারা একই ভূমি BC-এর উপর এবং ইহার একই পার্শ্বে অবস্থিত। সুতরাং, উহারা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার মধ্যবর্তী।

$\therefore$ DE ∥ BC.

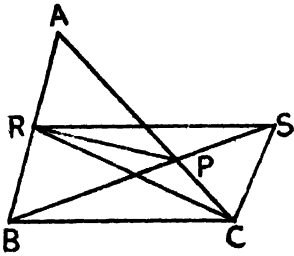
(ii) আবার, যেহেতু E এবং X, যথাক্রমে AC ও BC-এর মধ্যবিন্দু ;

$\therefore$ EX ∥ AB.

$\therefore$ BDEX একটি সামান্তরিক। $\therefore$ $DE = BX = \frac{1}{2}BC$.

5. ত্রিভুজের যে কোন বাহুর মধ্যবিন্দু দিয়া অপর এক বাহুর সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা তৃতীয় বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

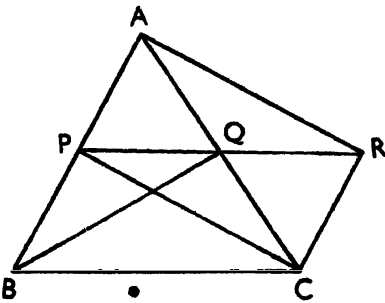
6. ABC ত্রিভুজের AD মধ্যমার উপর অবস্থিত P যে কোন একটি বিন্দু ; প্রমাণ কর যে, PAB ও PAC ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল পরস্পর সমান।

7. ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু R ; AC-এর উপর অবস্থিত P যে কোন একটি বিন্দু ; BP-কে S পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হইল যেন $\triangle RPS = \triangle RCP$ হয়। প্রমাণ কর যে, SC ∥ AB.

[ইঙ্গিত : PR, ABP ত্রিভুজের মধ্যমা বলিয়া $\triangle APR = \triangle BPR$.

$\therefore$ $\triangle BPR + \triangle RPS = \triangle APR + \triangle RCP$.

অর্থাৎ, $\triangle BRS = \triangle ARC = \triangle BRC$. $\therefore$ BR ∥ SC অর্থাৎ AB ∥ SC.]

8. ABC ত্রিভুজের AB বাহুর উপর যে কোন বিন্দু P দিয়া BC বাহুর সমান ও সমান্তরাল করিয়া PQR একটি সরলরেখা অঙ্কন করা হইল। উহা AC বাহুকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, AQR এবং PQB ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল সমান।

[ইঙ্গিত : AR, BQ, CP ও CR সংযুক্ত কর।

$\because$ BC ও PR পরস্পর সমান ও সমান্তরাল ;. $\therefore$ BP ∥ CR, অর্থাৎ AP ∥ CR.

$\therefore$ $\triangle APR = \triangle APC$; সুতরাং $\triangle PQC = \triangle AQR$.

আবার, $\triangle PQB = \triangle PQC$;

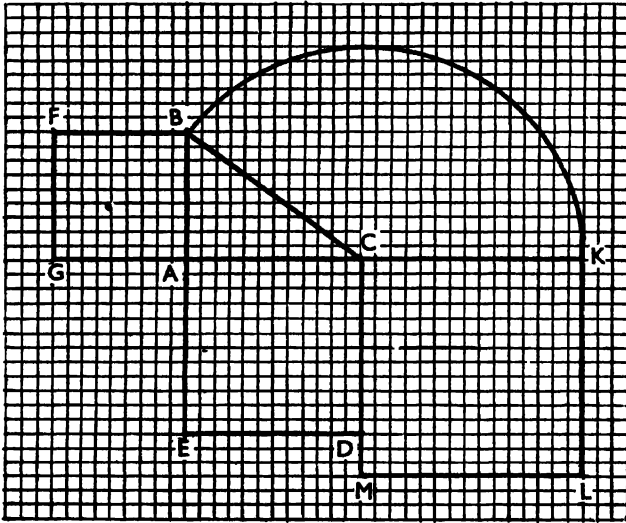
$\therefore$ $\triangle AQR = \triangle PQB$]

9. কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলির মধ্যবিন্দুসমূহ ক্রমান্বয়ে যোগ করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয় এবং উহার ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক। [D. B. 1934]

উপপাদ্য 26

সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, উহার সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

(In a right-angled triangle the square on the hypotenuse is equal to the sum of the squares on the sides containing the right angle.)

বর্গাঙ্কিত কাগজের সাহায্যে ঃ

মনে কর, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, AB ও AC ইহার সমকোণ-সংলগ্ন দুইটি বাহু এবং BC ইহার অতিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে, ত্রিভুজটির অতিভুজ BC-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, AB-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ও AC-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির সমষ্টি সমান।

অঙ্কন ঃ ত্রিভুজটির AC বাহুর উপর ACDE বর্গক্ষেত্র এবং AB বাহুর উপর ABFG বর্গক্ষেত্র দুইটি অঙ্কন কর।

AC বাহুর বর্ধিতাংশ হইতে অতিভুজ BC-এর সমান করিয়া CK অংশ কাটিয়া লও এবং CK-এর উপর CKLM বর্গক্ষেত্রটি অঙ্কন কর।

প্রমাণ : BC বাহুর সমান করিয়া CK অংশ কাটিয়া লওয়া হইয়াছে ; সুতরাং BC-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রটি CK-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রটির সমান।

এখন, AB-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ABFG-এর অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা কর। উহার সংখ্যা 81. AC-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ACDE-এর অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা কর। উহার সংখ্যা 144. আবার CK-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রে CKLM-এর অভ্যন্তরস্থ ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রগুলি গণনা কর। উহার সংখ্যা 225.

এখন, ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের প্রতিটিকে একক ধরিলে ACDE = 144 বর্গ একক, ABFG = 81 বর্গ একক এবং CKLM = 225 বর্গ একক।

আবার, 225 বর্গ একক = 144 বর্গ একক + 81 বর্গ একক।

সুতরাং CKLM বর্গক্ষেত্র = ACDE বর্গক্ষেত্র + ABFG বর্গক্ষেত্র ;

অর্থাৎ $BC^2 = AC^2 + AB^2$.

ঔপপত্তিক প্রমাণ :

মনে কর, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং উহার BAC কোণটি সমকোণ।

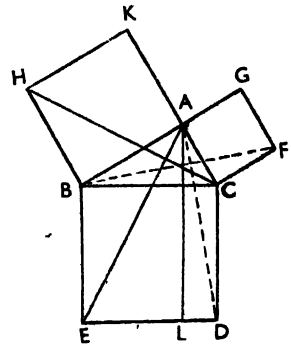
আরও মনে কর, BCDE, ABHK এবং ACFG বর্গক্ষেত্র তিনটি যথাক্রমে অতিভুজ BC এবং সমকোণ-সংলগ্ন অপর দুই বাহু AB ও AC-এর উপর অঙ্কিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, BC-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, AB-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ও AC-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান ; অর্থাৎ $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

অঙ্কন : AE ও CH সংযুক্ত কর এবং A হইতে BE-এর সমান্তরাল করিয়া AL রেখা অঙ্কন কর ; ইহা যেন ED-কে L বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : $\angle BAC$ ও $\angle BAK$ সন্নিহিত কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে এক সমকোণ বলিয়া KA ও AC একই সরলরেখায় অবস্থিত।

পুনরায়, সমকোণ HBA = সমকোণ CBE.

$\therefore$ $\angle HBA + \angle ABC = \angle CBE + \angle ABC$ অর্থাৎ, $\angle HBC = \angle ABE$.

এখন, HBC ও ABE ত্রিভুজদ্বয়ে

HB = AB, BC = BE এবং অন্তর্ভূত ∠HBC = অন্তর্ভূত ∠ABE ;

∴ △HBC ≡ △ABE.

এখন, △HBC ও ABHK বর্গক্ষেত্র একই ভূমি HB-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল HB, KC-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ △HBC, ABHK বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

পুনরায়, △ABE ও আয়তক্ষেত্র BL একই ভূমি BE-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল BE, AL-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ △ABE = আয়তক্ষেত্র BL-এর অর্ধেক।

∴ ABHK বর্গক্ষেত্র = আয়তক্ষেত্র BL.

অনুরূপভাবে, BF ও AD সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ করা যায়,

ACFG বর্গক্ষেত্র = আয়তক্ষেত্র CL.

∴ আয়তক্ষেত্র BL + আয়তক্ষেত্র CL = ABHK বর্গক্ষেত্র + ACFG বর্গক্ষেত্র ;

কিন্তু আয়তক্ষেত্র BL + আয়তক্ষেত্র CL = BCDE বর্গক্ষেত্র।

∴ BCDE বর্গক্ষেত্র = ABHK বর্গক্ষেত্র + ACFG বর্গক্ষেত্র

অর্থাৎ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

মন্তব্য : এই উপপাদ্যটি গ্রীক পণ্ডিত পীথাগোরাস (Pithagoras) আবিষ্কার করিয়াছিলেন বলিয়া ইহা **পীথাগোরাসের উপপাদ্য** বলিয়া খ্যাত।

কিন্তু ভারতবর্ষে এই উপপাদ্যটি অতি প্রাচীনকাল হইতে সুপরিচিত ছিল ;— ইহার প্রমাণ পাওয়া যায় বৈদিক শুল্বসূত্রে।

অনুসিদ্ধান্ত : ABC ত্রিভুজে ∠BAC একটি সমকোণ এবং AM, অতিভুজ BC-এর উপর লম্ব হইলে (i) $AB^2 - AC^2 = BM^2 - CM^2$;

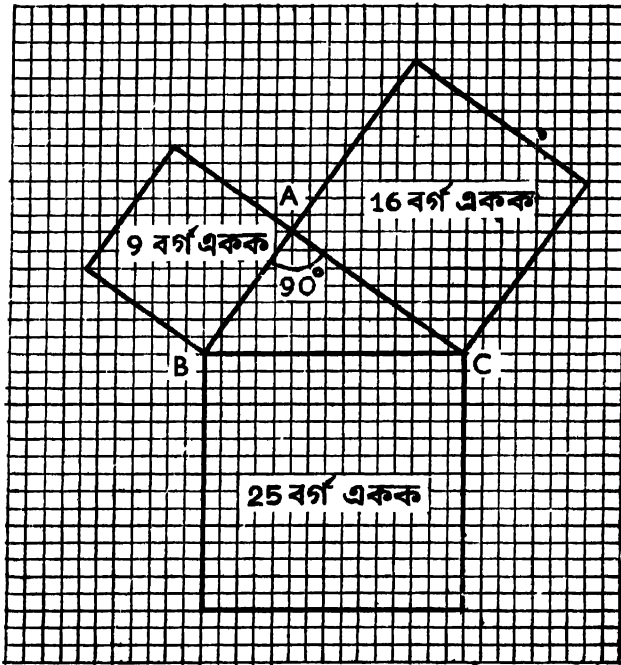
(ii) $AB^2 = BM.BC$; (iii) $AC^2 = CM.BC$; (iv) $AM^2 = BM.MC$

উপপাদ্য 27

কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র যদি অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টির সমান হয়, তবে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত কোণটি এক সমকোণ হইবে।

(If a triangle is such that the square on a side is equal to the sum of the squares on the other two sides, then the angle contained by these two sides is a right angle.)

১

বর্গাঙ্কিত কাগজের সাহায্যে :

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং ইহার তিনটি বাহুর উপর তিনটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত আছে। আরও মনে কর, BC-এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রটি AB ও AC বাহুদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র দুইটির ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে, AB ও AC-এর অন্তর্গত কোণটি এক সমকোণের সমান।

কোণমান যন্ত্রের সাহায্যে BAC কোণটি মাপ। দেখা গেল উহা 90°. সুতবাং AB ও AC-এর অন্তর্গত কোণটি এক সমকোণের সমান।

ঔপপত্তিক প্রমাণ :

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ। ইহাব AC বাহুব উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, AB ও AC বাহু দুইটিব উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের সমষ্টিব সমান।

A D

B

প্রমাণ করিতে হইবে, ∠ABC এক সমকোণের সমান।

অঙ্কন : BC বাহুর সমান করিয়া EF একটি সরলরেখা অঙ্কন কর এবং EF রেখাব E বিন্দুতে AB-এব সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট ED লম্ব অঙ্কন কর। DF সংযুক্ত কব।

প্রমাণ : DEF একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং DF উহার অতিভুজ।

$\therefore \quad DF^2 = EF^2 + ED^2$

কিন্তু, $ED = AB, \quad \therefore \quad ED^2 = AB^2$

এবং $EF = BC, \quad \therefore \quad EF^2 = BC^2$

$\therefore \quad EF^2 + ED^2 = BC^2 + AB^2$

কিন্তু, $ED^2 + EF^2 = DF^2$, এবং $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore \quad DF^2 = AC^2. \quad \therefore \quad DF = AC.$

এখন, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ে $AB = DE$, $BC = EF$ এবং $AC = DE$;

$\therefore \quad \triangle ABC = \triangle DEF \quad \therefore \quad \angle ABC = \angle DEF =$ এক সমকোণ।

অনুশীলনী 12

1. XYZ সমকোণী ত্রিভুজেব ∠X-এর বিপরীত বাহু 8 একক, ∠Y-এর বিপরীত বাহু 6 একক এবং ∠Z-এর বিপরীত বাহু 10 একক। বর্গাঙ্কিত কাগজে ত্রিভুজটি অঙ্কন কর এবং দেখাও যে ∠XZY এক সমকোণের সমান।

2 নিম্নে দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর এক বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। উহাদের তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর :

(a) 53 একক ও 28 একক (b) 65 একক ও 16 একক।

3. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা যথাক্রমে 9·6 সে. মি. এবং 9 সে. মি. ; উহার পরিসীমা কত ?

4. 20 মিটার দীর্ঘ একখানি বাঁশের একটি প্রান্ত প্রাচীরের শীর্ষে এবং অপর প্রান্ত প্রাচীরের পাদদেশ হইতে 12 মিটার দূরে অবস্থিত। প্রাচীরের উচ্চতা কত ?

5. $10\frac{2}{3}$ মিটার দীর্ঘ একটি তালগাছ ঝড়ে ভাঙ্গিয়া যাওয়ায় উহার অগ্রভাগ পাদদেশ হইতে $2\frac{2}{3}$ মিটার দূরে ভূমি স্পর্শ করিল। ভূমি হইতে কত উচ্চে গাছটি ভাঙ্গিয়াছিল ?

6. কোন জলাশয়ে একটি পদ্ম-কোরকের অগ্রভাগ জলের ·5 হাত উপরে ছিল। বায়ুতাড়িত হইয়া পদ্মকোরক ধীরে ধীরে সরিয়া গিয়া 2 হাত দূরে ঠিক জলমগ্ন হইল। জলের গভীরতা কত ?

7. $8\frac{1}{2}$ মিটার দীর্ঘ একটি মই-এর অগ্রভাগ প্রাচীর-গাত্রে 8 মিটার উপরে ঠেকানো ছিল। মই-এর অগ্রভাগ 2 মিটার নামাইয়া দিলে উহার নিম্নভাগ কতটা সরিয়া যাইবে ?

8. দুইটি বৃক্ষ 40 মিটার ও 83 মিটার উচ্চ এবং তাহাদের মধ্যে দূরত্ব 30 মিটার। বৃক্ষ দুইটির শীর্ষদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত ?

9. কোন বর্গক্ষেত্রের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

10. ABC ত্রিভুজের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু O হইতে BC, CA এবং AB-এর উপর যথাক্রমে OX, OY এবং OZ লম্ব অঙ্কন করা হইল। প্রমাণ কর, $AZ^2+BX^2+CY^2 = AY^2+BZ^2+CX^2$.

11. সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের 5 গুণ, উহার অপর দুই বাহুর সমদ্বিখণ্ডক মধ্যমাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমষ্টির 4 গুণের সমান।

[D. B. 1930]

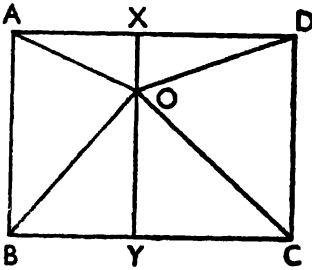
12. সমবাহু ত্রিভুজের কোন বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের 3 গুণ উহার উচ্চতার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের 4 গুণের সমান। [C. U. 1933]

13. দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তরের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।

14. ABC ত্রিভুজের $\angle B$ একটি সমকোণ এবং PQ সরলরেখা AB ও BC-কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। AQ ও CP সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর, $AC^2+PQ^2=CP^2+AQ^2$. [W. B. S. B. 1954 (Compart.)]

15. ABCD আয়তক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলি উহার অন্তঃস্থ O একটি বিন্দুর সহিত সংযুক্ত করা হইল। প্রমাণ কর, $OA^2+OC^2=OB^2+OD^2$.

[C. U. 1921 ; W. B. S. B. 1954]

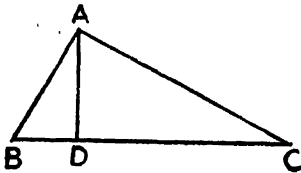
O বিন্দু দিয়া XY ∥ AB অঙ্কন কর। XY যেন AD-কে X এবং BC-কে Y বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

ABYX এবং DCYX দুইটি আয়তক্ষেত্র।

$OA^2+OC^2=AX^2+OX^2+OY^2+CY^2$

$=BY^2+OY^2+OX^2+DX^2$

$=OB^2+OD^2$.

16. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A হইতে BC ভূমির উপর AD একটি লম্ব। যদি $AD^2=BD.DC$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

[W. B. S. B. 1956]

ABC ত্রিভুজে AD, BC-এর উপর লম্ব।

∴ ABD সমকোণী ত্রিভুজে $AB^2=BD^2+AD^2$ এবং ACD সমকোণী ত্রিভুজে $AC^2=CD^2+AD^2$.

∴ $AB^2+AC^2=BD^2+CD^2+2AD^2$

$=BD^2+CD^2+2BD.CD$ (∵ $AD^2=BD.DC$)

$=(BD+CD)^2=BC^2$.

∴ $\triangle ABC$ একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং উহার $\angle A$ একটি সমকোণ।

তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য হইতে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় :

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c একক এবং উহার পরিসীমা $2s$ একক হইলে প্রমাণ কর, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক।

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং উহার BC, CA ও AB বাহু তিনটি যথাক্রমে a, b ও c একক।

আরও মনে কর, A বিন্দু হইতে BC-এর উপর অঙ্কিত AE লম্বের দৈর্ঘ্য h একক এবং BE $= x$ একক ; সুতরাং CE $= (a-x)$ একক।

এখন, AEB সমকোণী ত্রিভুজে

, $AB^2 = BE^2 + AE^2$;

$\therefore \quad c^2 = h^2 + x^2$; অর্থাৎ $h^2 = c^2 - x^2 \quad \cdots$(i)

আবার, AEC সমকোণী ত্রিভুজে $AC^2 = AE^2 + CE^2$;

$\therefore \quad b^2 = h^2 + (a-x)^2$; অর্থাৎ $h^2 = b^2 - (a-x)^2 \quad \cdots$(ii)

এখন, (i) ও (ii) হইতে, $c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$;

$\therefore \quad 2ax = a^2 - b^2 + c^2$; অর্থাৎ $x = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a} \cdots$(iii)

এইবার, (i) হইতে $h^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\dfrac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)^2$

$$= \frac{4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{\{(a+c)^2 - b^2\}\{b^2 - (a-c)^2\}}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4a^2}$$

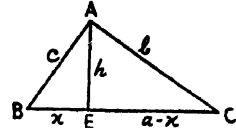
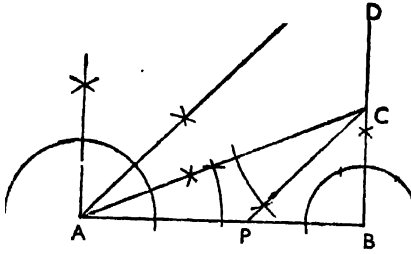
$$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2} \quad (\because \ a+b+c = 2s)$$

$$\therefore \quad h = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

$\therefore \quad \triangle ABC = \frac{1}{2}$ BC.AE $= \frac{1}{2}\, a.h = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক।

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের কতিপয় প্রয়োগ ঃ

1. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন এক অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র অপর অংশের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ হয়।

মনে কর, AB একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। উহাকে P বিন্দুতে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন, $AP^2 = 2PB^2$ হয়।

অঙ্কন : AB রেখায় B বিন্দুতে BD লম্ব অঙ্কন কর এবং A বিন্দুতে $\angle 22\frac{1}{2}^\circ$-এর সমান করিয়া $\angle BAC$ কোণ অঙ্কন কর মনে কর, AC ও BD পরস্পর C বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। এখন AC-এর C বিন্দুতে $\angle BAC$-এর সমান করিয়া $\angle ACP$ অঙ্কন কর। মনে কর, AB ও CP পরস্পর P বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। AB রেখা, AP ও PB অভীষ্ট দুই অংশে বিভক্ত হইয়াছে।

প্রমাণ : $\angle PBC = 90^\circ$ এবং $\angle BPC = \angle PAC + \angle PCA = 2\angle CAP$.

$\therefore \quad \angle BPC = 2 \times 22\frac{1}{2}^\circ = 45^\circ$ এবং $\angle BCP = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

$$\therefore \quad PB = BC.$$

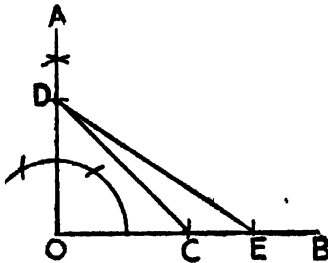
এখন, PBC ত্রিভুজে $PC^2 = PB^2 + BC^2 = 2PB^2$;

কিন্তু $AP = PC$ ($\because \quad \angle PAC = \angle PCA$) ; $\quad \therefore \quad AP^2 = PC^2$

$$\therefore \quad AP^2 = PC^2 = 2PB^2.$$

2. একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ, তিনগুণ.........ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে কর, a নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু।

অঙ্কন : OA এবং OB দুইটি পরস্পর লম্বরেখা অঙ্কন কর। ঐ রেখা দুইটি হইতে a-র সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট OC, OD কাটিয়া লও। CD সংযুক্ত কর।

$$\therefore \quad CD^2 = OC^2 + OD^2 = a^2 + a^2$$

বা $2a^2$;

অর্থাৎ, CD^2 = নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের দ্বিগুণ।

আবার, OA হইতে $OE = CD$ কাটিয়া লও। DE সংযুক্ত কর।

$\therefore \quad DE^2 = OE^2 + OD^2 = 2a^2 + a^2$ বা $3a^2$;

অর্থাৎ, DE^2 = নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ।

মন্তব্য : যদি $OC = OD$ = দৈর্ঘ্যের একক ধরা হয়,

তাহা হইলে $CD^2 = OC^2 + OD^2 = 1 + 1 = 2$; $\qquad CD = \sqrt{2}$.

অনুরূপভাবে, $DE^2 = OD^2 + OE^2 = 1 + 2 = 3$; $\qquad DE = \sqrt{3}$ ইত্যাদি।

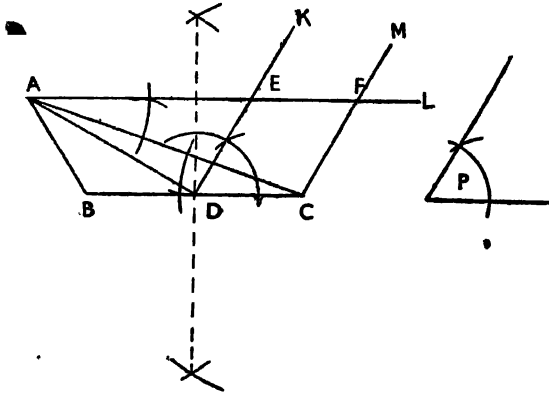
উপরোক্ত প্রণালীতে $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ইত্যাদির মান নির্ণয় করা যায়

ষষ্ঠ অধ্যায়

ক্ষেত্রফল সম্বন্ধীয় সম্পাদ্য
(Problems on Areas)

সম্পাদ্য 27

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ-বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a parallelogram equal to a given triangle and having one of its angles to a given angle.)

মনে কর, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং ∠P একটি নির্দিষ্ট কোণ।

এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কন করিতে হইবে যাহার একটি কোণ নির্দিষ্ট ∠P-এর সমান এবং যাহার ক্ষেত্রফল নির্দিষ্ট △ABC-এর সমান।

অঙ্কন : BC বাহুকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং D বিন্দুতে ∠P-এর সমান করিয়া ∠CDK অঙ্কন কর।

A বিন্দু দিয়া BC-এর সমান্তরাল করিয়া AL রেখা অঙ্কন কর। মনে কর AL, DK-কে E বিন্দুতে ছেদ করিল। EL হইতে CD-এর সমান করিয়া EF অংশ কাটিয়া লও এবং F বিন্দু দিয়া CFM রেখাটি অঙ্কন কর। CDEF অভীষ্ট সামান্তরিক অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ : CDEF চতুর্ভুজের CD ও EF বিপরীত বাহুদ্বয়, অঙ্কনানুসারে পরস্পর সমান ও সমান্তরাল ; সুতরাং CDEF একটি সামান্তরিক।

AD সংযুক্ত কর।

$\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ সমান সমান ভূমি BD ও DC-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল BC ও AL-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \quad \triangle ABD = \triangle ADC$; অর্থাৎ $\triangle ADC = \frac{1}{2} \triangle ABC$.

পুনরায়, অঙ্কনানুসারে $\triangle ADC$ ও CDEF সামান্তরিক একই ভূমি CD-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল BC ও AL-এর মধ্যে অবস্থিত।

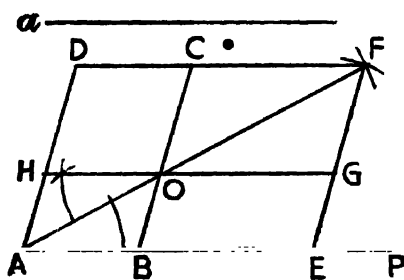
$\therefore \quad \triangle ADC = \frac{1}{2}$ CDEF সামান্তরিক ; $\therefore$ CDEF সামান্তরিক $= \triangle ABC$.

অধিকন্তু অঙ্কনানুসারে, $\therefore$ CDEF সামান্তরিকের $\angle CDE =$ নির্দিষ্ট $\angle P$.

$\therefore$ CDEF অভীষ্ট সামান্তরিক।

অনুসিদ্ধান্ত 1. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর।

অনুসিদ্ধান্ত 2. কোন নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান বাহুবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে কর, ABCD একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিক এবং a একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এরূপ একটি সামান্তরিক অঙ্কন করিতে হইবে যাহা ABCD-এর সমান এবং যাহার একটি বাহু a-এর সমান।

অঙ্কন: AB-কে P পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া উহা হইতে a-র সমান করিয়া AE অংশ কাটিয়া লও। AEFD সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ কর। মনে কর, DF ও BC পরস্পর C বিন্দুতে ছেদ করে। AF সংযুক্ত কর। মনে কর, AF, BC-কে O বিন্দুতে ছেদ করে। O বিন্দু দিয়া HG || AE অঙ্কন কর। মনে কর, HG, AD-কে H এবং EF-কে G বিন্দুতে ছেদ করে। AEGH অভীষ্ট সামান্তরিক অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ: AF, AEFD সামান্তরিকের একটি কর্ণ; $\therefore \quad \triangle AEF = \triangle ADF$.

অনুরূপভাবে, $\triangle ABO = \triangle AHO$ এবং $\triangle OGF = \triangle OCF$.

$\therefore \quad \triangle AEF - \triangle ABO - \triangle OGF = \triangle ADF - \triangle AHO - \triangle OCF$.

$\therefore$ BEGO সামান্তরিক $=$ CDHO সামান্তরিক।

$\therefore$ AEGH সামান্তরিক $=$ ABCD সামান্তরিক

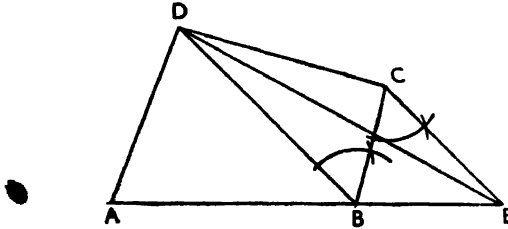
(উভয় পক্ষে ABOH সামান্তরিক যোগ করিয়া)।

অধিকন্তু, AEGH সামান্তরিকের AE বাহু $= a$ (অঙ্কনানুসারে)।

$\therefore$ AEGH অভীষ্ট সামান্তরিক।

সম্পাদ্য 28

একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a triangle equal in area to a given quadrilateral.)

মনে কর, ABCD একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ; ইহার সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : ABCD চতুর্ভুজের BD কর্ণ সংযুক্ত কর। C বিন্দু দিয়া BD-এর সমান্তরাল করিয়া CE রেখা অঙ্কন কর। AB-কে এমনভাবে বর্ধিত কর যেন উহা CE কে E বিন্দুতে ছেদ করে। DE সংযুক্ত কর। △ADE অভীষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত হইল

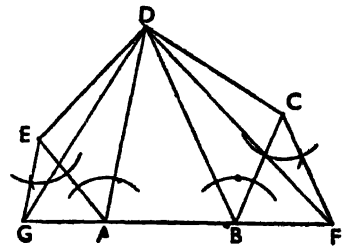
প্রমাণ : △BDE এবং △BDC একই ভূমি BD-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল BD ও CE-এর মধ্যে অবস্থিত।

∴ △BDE = △BDC এবং △ABD + △BDE = △ABD + △BDC.

∴ △ADE = ABCD চতুর্ভুজ।

অনুসিদ্ধান্ত : একটি নির্দিষ্ট বহুভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

মনে কর, ABCDE একটি (পাঁচটি বাহুবিশিষ্ট) বহুভুজ; ইহার সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিতে হইবে।

অঙ্কন : AD ও BD সংযুক্ত কর। C বিন্দু দিয়া CF ∥ BD এবং E বিন্দু দিয়া EG ∥ AD রেখা দুইটি অঙ্কন কর। AB-কে উভয় দিকে বর্ধিত কর; মনে কর, বর্ধিত AB যেন CF-কে F এবং EG-কে G বিন্দুতে ছেদ করে। DF ও DG সংযুক্ত কর। △DFG অভীষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত হইল।

প্রমাণ: $\triangle DBF$ ও $\triangle DBC$ একই ভূমি DB-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল DB ও CF-এর মধ্যে অবস্থিত। $\therefore \triangle DBF = \triangle DBC$.

অনুরূপভাবে, $\triangle ADG$ ও $\triangle ADE$ একই ভূমি AD-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহারা একই সমান্তরাল-যুগল AD ও EG-এর মধ্যে অবস্থিত।

$\therefore \triangle ADG = \triangle ADE$.

সুতরাং, $\triangle DBF + \triangle ADB + \triangle ADG = \triangle DBC + \triangle ADB + \triangle ADE$.

$\therefore \triangle DGF = ABCDE$ বহুভুজ।

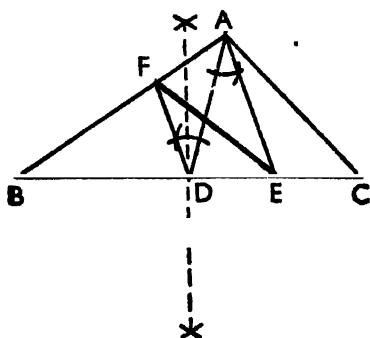
মন্তব্য 1. ABCDE পঞ্চভুজকে BCDG চতুর্ভুজে পরিণত করিয়া পরে উহাকে DGF ত্রিভুজে পরিণত করা হইয়াছে। সুতরাং উক্ত প্রণালী অবলম্বনে যে-কোন বহুভুজের বাহুসংখ্যা এক এক করিয়া কমাইয়া উহার সমান ক্ষেত্রফল-বিশিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইতে পারে।

মন্তব্য 2. কোন বহুভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন করিতে হইলে, প্রথমতঃ বহুভুজটির সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া ঐ ত্রিভুজের সমান একটি সামান্তরিক অঙ্কন করিতে হইবে

ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত বিবিধ অঙ্কন

1. কোন ত্রিভুজের যে কোন এক বাহুর উপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া ত্রিভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

[W. B. S. B. 1955]

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং ইহার BC বাহুর উপর E একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। E বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া $\triangle ABC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন: BC-কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং AE ও AD সংযুক্ত কর। D বিন্দু দিয়া AE-এর সমান্তরাল করিয়া DF সরলরেখা অঙ্কন কর। মনে কর, DF ও AB পরস্পরকে F বিন্দুতে ছেদ করে। EF সংযুক্ত কর। EF, $\triangle ABC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ : $\triangle AFD$ ও $\triangle EFD$ একই ভূমি FD-এর উপর দণ্ডায়মান এবং ইহার একই সমান্তরাল-যুগল FD ও AE-এর মধ্যে অবস্থিত। $\therefore \triangle AFD = \triangle EFD$.

উভয় পক্ষে, $\triangle BFD$ যোগ করিলে, $\triangle ABD = \triangle EFB$.

আবার, AD, ABC ত্রিভুজের একটি মধ্যমা (অঙ্কনানুসারে);

$\therefore \triangle ABD = \frac{1}{2} \triangle ABC$. $\therefore \triangle EFB = \frac{1}{2} \triangle ABC$.

$\therefore$ BC বাহুর অন্তর্গত E বিন্দু দিয়া অঙ্কিত EF সরলরেখা $\triangle ABC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

2. কোন ত্রিভুজের যে-কোন এক বাহুর উপর অবস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া সরলরেখা অঙ্কন করিয়া ত্রিভুজটিকে সমত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে। [C. U. 1943]

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং ইহার BC বাহুর উপর D একটি নির্দিষ্ট বিন্দু। D বিন্দু দিয়া সরলরেখা অঙ্কন করিয়া ত্রিভুজটিকে সমত্রিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : BC-কে E ও F বিন্দুতে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর। AD সংযুক্ত কর। E ও F বিন্দু দিয়া AD-এর সমান্তরাল করিয়া EH এবং FK সরলরেখা দুইটি অঙ্কন কর। মনে কর, EH, AB-কে H এবং FK, AC-কে K বিন্দুতে ছেদ করে। HD ও KD সংযুক্ত কর।

HD ও KD, $\triangle ABC$-কে সমত্রিখণ্ডিত করে।

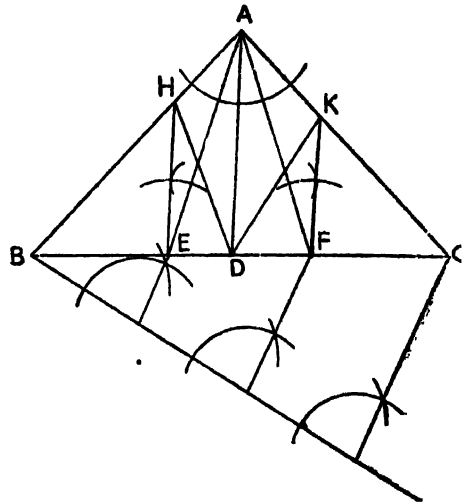
প্রমাণ : AE ও AF সংযুক্ত কর।

$\triangle HED = \triangle AHE$

($\because$ ইহারা একই ভূমি HE-এর উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল-যুগল HE ও AD-এর মধ্যে অবস্থিত।)

$\therefore \triangle HBD = \triangle ABE$ (উভয় পক্ষে $\triangle HBE$ যোগ করিয়া)।

আবার, $\triangle KFD = \triangle AKF$ ($\because$ ইহারা একই ভূমি KF-এর উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল-যুগল KF ও AD-এর মধ্যে অবস্থিত।)

$\therefore \triangle KCD = \triangle ACF$ (উভয় পক্ষে $\triangle KCF$ যোগ করিয়া)।

এখন, $\triangle ABE = \triangle AEF = \triangle ACF$ (∵ ইহারা সমান সমান ভূমির উপর দণ্ডায়মান এবং একই উচ্চতাবিশিষ্ট।)

∴ $\triangle ABE = \triangle AEF = A\triangle CF = \frac{1}{3} \triangle ABC$.

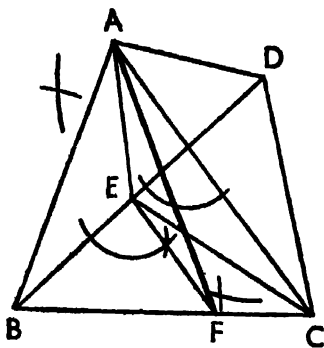
∴ $\triangle HBD = \triangle KCD = \frac{1}{3}\triangle ABC$.

∴ AHDK চতুর্ভুজ $= \frac{1}{3}\triangle ABC$.

∴ BC বাহুর অন্তর্গত D বিন্দু দিয়া অঙ্কিত DH এবং DK $\triangle ABC$-কে সমত্রিখণ্ডিত করিয়াছে।

3. কোন চতুর্ভুজের যে কোন একটি কৌণিক বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে। [W. B. S. B. 1954]

মনে কর, ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং A ইহার একটি কৌণিক বিন্দু। A বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AC ও BD সংযুক্ত কর। BD-কে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত কর এবং EF ∥ AC অঙ্কন কর। উহা যেন BC-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। AF সংযুক্ত কর। AF, ABCD চতুর্ভুজের সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ : AE ও CE সংযুক্ত কর।

$\triangle ACF = \triangle ACE$ (∵ ইহারা একই ভূমি AC-এর উপর দণ্ডায়মান এবং একই সমান্তরাল-যুগল AC ও EF-এর মধ্যে অবস্থিত।)

$\triangle ABF =$ ABCE ক্ষেত্র ($\triangle ABC$ হইতে $\triangle ACF$ ও $\triangle ACE$ বিয়োগ করিয়া।)

∴ ABCE ক্ষেত্র $= \triangle ABE + \triangle CBE$

$= \frac{1}{2}\triangle ABD + \frac{1}{2}\triangle CBD = \frac{1}{2}$ABCD চতুর্ভুজ।

∴ $\triangle ABF = \frac{1}{2}$ABCD চতুর্ভুজ ; অর্থাৎ AF, ABCD চতুর্ভুজকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অনুশীলনী 13

1. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান একটি 30° কোণবিশিষ্ট সামান্তরিক অঙ্কন কর।

2. একটি নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকের সমান ও একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণবিশিষ্ট একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর। [C. U. 1944]

3. 6 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি 5 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর।

4. একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এমন একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর, যাহার একটি বাহু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান। [C. U. 1946]

5. ABCD চতুর্ভুজের সমান একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর, যাহার শীর্ষবিন্দু P, DC রেখায় অবস্থিত থাকিবে এবং ভূমি AB রেখার সমান হইবে।

6. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

7. একটি নির্দিষ্ট আয়তক্ষেত্রের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট এমন একটি সামান্তরিক অঙ্কন কর যাহার দুইটি সন্নিহিত বাহু দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান হইবে।

8. কোন সামান্তরিকের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর যাহার একটি বাহুর দৈর্ঘ্য নির্দিষ্ট আছে।

9. কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এবং নির্দিষ্ট উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

10. দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

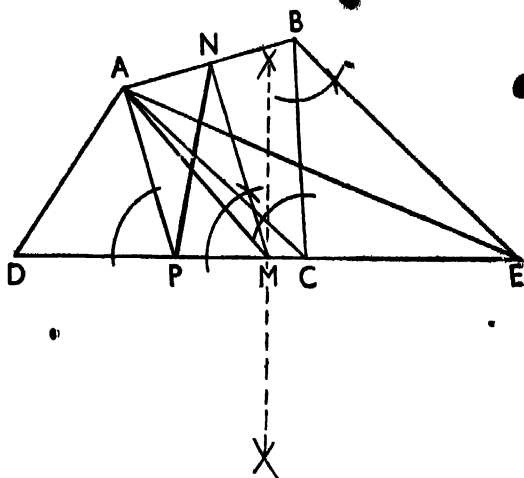
11. একটি নির্দিষ্ট সুষম ষড়ভুজের সমান করিয়া একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর।

12. কোন নির্দিষ্ট পঞ্চভুজের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর।

13. দুইটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অন্তরের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ অঙ্কন কর।

14. কোন চতুর্ভুজের কোন বাহুস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া চতুর্ভুজটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। [C. U. 1949]

অঙ্কন ঃ ABCD চতুর্ভুজের সমান $\triangle AED$ অঙ্কন কর।

মনে কর, P, চতুর্ভুজটির DC বাহুর উপর অবস্থিত নির্দিষ্ট বিন্দু। PA সংযুক্ত কর। DE-এর মধ্যবিন্দু M দিয়া PA-এর সমান্তরাল MN অঙ্কন কর। উহা যেন

AB-কে N বিন্দুতে ছেদ করে। PN সংযুক্ত কর। PN দ্বারা ABCD চতুর্ভুজ সমদ্বিখণ্ডিত হইল।

প্রমাণ ঃ $\triangle ANP = \triangle AMP$.

$\therefore$ $\triangle ADM =$ DPNA চতুর্ভুজ (উভয় পক্ষে $\triangle ADP$ যোগ করিয়া)।

$\because$ $DM = ME$; $\therefore$ $\triangle ADM = \frac{1}{2}\triangle ADE = \frac{1}{2}$ABCD চতুর্ভুজ।

$\therefore$ DPNA চতুর্ভুজ $= \frac{1}{2}$ABCD চতুর্ভুজ।

15. যে-কোন কৌণিক-বিন্দু দিয়া সরলরেখা অঙ্কন করিয়া একটি সামান্তরিককে সমান তিন অংশে বিভক্ত কর।

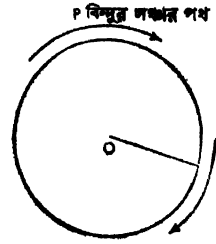
16. সামান্তরিকের কোন বাহু-মধ্যস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া সরলরেখা অঙ্কন করিয়া সামান্তরিকটিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর।

সপ্তম অধ্যায়

A. *সঞ্চারপথ*
(Locus)

কোন নির্দিষ্ট নিয়মানুসারে একটি বিন্দু যে পথ চলে, তাহাকে ঐ চলমান বিন্দুর **সঞ্চারপথ** (Locus) বলে।

(i) কোন বিন্দু যদি দিক পরিবর্তন না করিয়া ক্রমাগত একই দিকে চলিতে থাকে, তবে তাহার সঞ্চারপথ একটি সরলরেখা হইবে।

(ii) কোন একটি বিন্দু যদি এমন নিয়ম অনুসারে চলে যে উহার দূরত্ব একটি স্থির বিন্দু হইতে সর্বদা সমান, তাহা হইলে উহার সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে। ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে স্থির বিন্দু O এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ হইবে O বিন্দু হইতে চলমান বিন্দু P-এর দূরত্ব।

(iii) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু যদি CD সরলরেখা হইতে সর্বদা 1 সে. মি. দূরে থাকিয়া ভ্রমণ করে, তাহা হইলে CD সরলরেখার এক বা উভয় পার্শ্বে 1 সে. মি. দূরে CD সরলরেখার সমান্তরাল AB ও EF সরলরেখা দুইটি ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ হইবে।

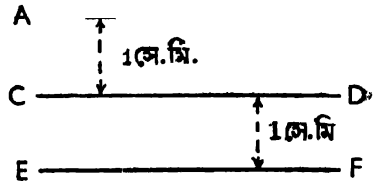
একটি রেখাকে কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ প্রমাণ করিতে হইলে দেখাইতে হইবে যে,

(1) পথের অন্তঃস্থিত প্রত্যেক বিন্দু একটি নির্দিষ্ট নিয়মের অধীন থাকিবে ;

(2) পথের বহিঃস্থিত কোন বিন্দুই কোন নির্দিষ্ট নিয়মের অধীন থাকিবে না।

একটি কোণকে যদি সমদ্বিখণ্ডিত করা হয় এবং উক্ত সমদ্বিখণ্ডকের উপর কোন বিন্দু লইলে উহা ঐ কোণের বাহুদ্বয় হইতে সর্বদা সমান দূরে অবস্থিত থাকিবে। সুতরাং ঐ সমদ্বিখণ্ডকই বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটির সঞ্চারপথ। সমদ্বিখণ্ডকের বহিঃস্থিত কোন বিন্দুই বাহুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী নহে।

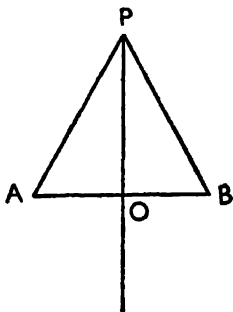
সঞ্চারপথের অনুরূপ ব্যাখ্যা :

(*a*) কতিপয় বিন্দুর অবস্থান যদি নির্দিষ্ট সর্তের অধীন হয়, তাহা হইলে উক্ত বিন্দুগুলির সঞ্চারপথ হইবে উহাদের সংযোজক সরলরেখা।

(*b*) কতিপয় বিন্দুর অবস্থান যদি একটি স্থির বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হয়, তাহা হইলে উহাদের সঞ্চারপথ হইবে বৃত্তের পরিধি।

(*c*) কোন চলমান বিন্দুর সঞ্চারপথ সরলরেখা ও বক্ররেখা, উভয় প্রকারই হইতে পারে।

উপপাদ্য 28

দুইটি স্থির বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ, উক্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডক হইবে।

(The locus of points which are equidistant from two fixed points is the perpendicular bisector of the straight line joining the two fixed points.)

মনে কর, A এবং B দুইটি স্থির বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে, A এবং B হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ AB রেখার লম্ব দ্বিখণ্ডক হইবে ; অর্থাৎ

(i) A এবং B বিন্দু হইতে কোন বিন্দু সমদূরবর্তী হইলে, উহা AB রেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থান করিবে ; এবং

(ii) কোন বিন্দু AB রেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত থাকিলে, উহা A এবং B বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

(i) মনে কর, যে-কোন একটি বিন্দু P, A ও B বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী ; সুতরাং AP = BP.

প্রমাণ করিতে হইবে, P বিন্দু, AB রেখার সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

অঙ্কন : মনে কর, O বিন্দু, AB রেখার মধ্যবিন্দু। OP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : APO এবং BPO ত্রিভুজদ্বয়ে,

AP = BP, OA = OB এবং PO সাধারণ বাহু ; $\therefore$ $\Delta APO \equiv \Delta BPO$.

$\therefore$ $\angle AOP = \angle BOP$; এবং উহারা সন্নিহিত কোণ। $\therefore$ OP, AB রেখার উপর লম্ব ;. অর্থাৎ P বিন্দু, AB রেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

(ii) মনে কর, AB রেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডক OP-এর উপর P যে-কোন একটি বিন্দু। প্রমাণ করিতে হইবে, P বিন্দুটি A ও B বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

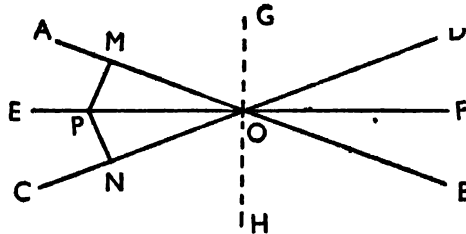
প্রমাণ : APO এবং BPO ত্রিভুজদ্বয়ে, AO = BO, OP সাধারণ বাহু এবং $\angle POA = \angle POB = 90°$; $\therefore$ $\Delta APO \equiv \Delta BPO$.

সুতরাং AP = BP ; অর্থাৎ P বিন্দুটি, A ও B বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

$\therefore$ (i) ও (ii) হইতে প্রমাণিত হয়, AB রেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকই P বিন্দুর সঞ্চারপথ।

উপপাদ্য 29

দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ ঐ দুইটি সরলরেখার অন্তর্ভূত কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডক দুই সরলরেখা হইবে।

(The locus of points which are equidistant from two intersecting straight lines consists of the pair of straight lines which bisect the two angles between two given lines.)

মনে কর, AB ও CD সরলরেখাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে, AB ও CD রেখাদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ AB ও CD-এর অন্তর্ভূত কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডক দুই সরলরেখা হইবে ; অর্থাৎ

(i) কোন বিন্দু AB ও CD রেখাদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হইলে, উহা AB ও CD-এর অন্তর্ভূত কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের যে-কোনটির উপর অবস্থান করিবে ; এবং

(ii) যদি কোন বিন্দু AB ও CD রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ দুইটির সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ে একটির উপর অবস্থিত হয়, তবে উহা AB ও CD রেখাদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

(i) মনে কর, P বিন্দুটি যেন AB ও CD সরলরেখাদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী, অর্থা P হইতে AB রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব PM এবং CD রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব PN পরস্পর সমান।

প্রমাণ করিতে হইবে, ∠POM = ∠PON.

প্রমাণ : POM এবং PON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

PM = PN এবং অতিভুজ PO সাধারণ বাহু,

∴ △POM ≡ △PON. ∴ ∠POM = ∠PON.

(ii) মনে কর, P বিন্দুটি যেন AB ও CD রেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত একটি কোণে সমদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত কোন বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে, P বিন্দু, AB ও CD রেখাদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

অঙ্কন : P বিন্দু হইতে AB-এর উপর PM এবং CD-এর উপর PN লম্ব দুইটি অঙ্কন কর।

প্রমাণ : POM এবং PON ত্রিভুজদ্বয়ে, ∠POM = ∠PON, ∠PMO = ∠PNO = 90° এবং OP সাধারণ বাহু ; ∴ △POM ≡ △PON.

সুতরাং PM = PN, অর্থাৎ P বিন্দু AB ও CD সরলরেখাদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী।

∴ (i) ও (ii) হইতে প্রমাণিত হয়, AB ও CD সরলরেখাদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ, AB ও CD রেখার অন্তর্ভূত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুই সরলরেখা হইবে।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়, GH সরলরেখা, AB ও CD সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ।

অনুসিদ্ধান্ত : সমদ্বিখণ্ডক সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণ সমকোণ।

[C. U. 1913]

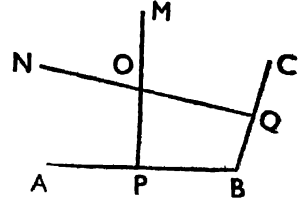
একাধিক সঞ্চারপথের ছেদবিন্দু :

কোন চলমান বিন্দু যদি একাধিক নিয়মের অধীন হয়, তখন উহার এক-একটি নিয়মানুসারে বিন্দুটির যে সকল সঞ্চারপথ, তাহাদের ছেদবিন্দু দ্বারা বিন্দুটির অবস্থান নির্ণীত হয়।

উদাহরণ 1. একই সরলরেখায় অবস্থিত নয়, এমন তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দু নির্ণয় কর।

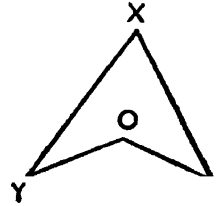
মনে কর, A, B ও C তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

A ও B হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটি AB রেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডক PM রেখার উপর অবস্থান করিবে।

আবার, B ও C হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটি BC রেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডক QN রেখার উপর অবস্থান করিবে।

∴ A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটি PM ও QN রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু হইবে; অর্থাৎ, O বিন্দু A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী।

উদাহরণ 2. $\triangle XYZ$-এর মধ্যে এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর, যাহা বাহু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

মনে কর, XYZ একটি ত্রিভুজ।

XY ও YZ হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ $\angle XYZ$-এর সমদ্বিখণ্ডক YO রেখা এবং YZ ও ZX হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুর সঞ্চারপথ $\angle XZY$-এর সমদ্বিখণ্ডক ZO রেখা।

∴ YO এবং ZO-এর সাধারণ বিন্দুতে O, দুইটি শর্তই পূরণ করিবে; সুতরাং O বিন্দুটি, XY, YZ ও ZX হইতে সমদূরবর্তী।

অনুশীলনী 14

1. কোন সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে উহার উপর অঙ্কিত একাধিক সরলরেখার মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. 1938]

2. কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর অঙ্কিত একাধিক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর [W. B. S. B. 1952]

3. নির্দিষ্ট অতিভুজবিশিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-সংলগ্ন শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

4. দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

5. কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটির অবস্থান নির্দেশ কর।

6. একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় কর, যাহা সরলরেখাটির বহিঃস্থ দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হইবে। ইহা কখন্ অসম্ভব হইবে ?

7. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং যাহার কেন্দ্রবিন্দু একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থান করিবে।

8. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও পরিধিস্থ দুইটি বিন্দু নির্দিষ্ট আছে; বৃত্তটি অঙ্কন কর।

9. দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখা হইতে সমদূরবর্তী এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর অবস্থিত একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর। কখন্ এইরূপ বিন্দু নির্ণয় অসম্ভব হইবে ?

10. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে যাহার দূরত্ব একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সমান—এইরূপ কতগুলি বিন্দু নির্ণয় করা সম্ভব এবং কখন্ এইরূপ কোন বিন্দু পাওয়া যাইবে না ?

B. *সমবিন্দু রেখা ও একরেখীয় বিন্দু*

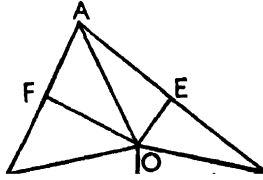
(Concurrent lines and Collinear points)

তিন বা তদধিক সরলরেখা এক বিন্দুতে ছেদ করিলে তাহাদিগকে **সমবিন্দু রেখা** (Concurrent lines) এবং উহাদের ছেদবিন্দুকে **সম্পাত বিন্দু** (Point of concurrence) বলে।

তিন বা তদধিক বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থান করিলে তাহাদিগকে **একরেখীয় বিন্দু** (Collinear points) বলে।

উপপাদ্য 30

ত্রিভুজের বাহু তিনটির মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্বগুলি সমবিন্দু।

(The perpendiculars drawn to the sides of a triangle from their middle points are concurrent.)

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং D, E ও F যথাক্রমে উহার BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু। E ও F হইতে যথাক্রমে AC ও AB বাহুর উপর OE এবং OF লম্ব অঙ্কন করা হইয়াছে। উহারা যেন পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। OD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে, OD, BC বাহুর উপর লম্ব।

অঙ্কন : OA, AB এবং OC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : O বিন্দুটি AC রেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত, ∴ OA = OC.

আবার, O বিন্দুটি AB রেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত,

∴ OA = OB. ∴ OB = OC.

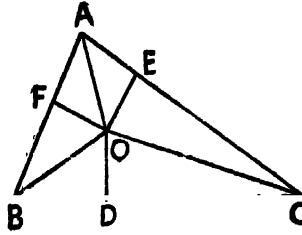
∴ O বিন্দুটি BC রেখার লম্ব-দ্বিখণ্ডকের উপরও অবস্থিত।

∴ OD, BC বাহুর উপর লম্ব।

মন্তব্য : O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OA ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত ত্রিভুজটির তিনটি শীর্ষবিন্দু দিয়া গমন করিবে। এই বৃত্তকে ত্রিভুজের **পরিবৃত্ত** (Circumscribed circle or Circum-circle) বলে এবং O বিন্দুকে ত্রিভুজের **পরিকেন্দ্র** (Circum-centre) বলে।

উপপাদ্য 31

ত্রিভুজের কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডক তিনটি সমবিন্দু।

(The bisectors of the angles of a triangle are concurrent.)

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং ইহার ∠ABC ও ∠ACB-এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে BO এবং CO পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। AO সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে, AO ত্রিভুজটির ∠BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

অঙ্কন: O বিন্দু হইতে BC, CA ও AB বাহু তিনটির উপর যথাক্রমে OD, OE ও OF লম্ব অঙ্কন কর।

প্রমাণ: ∴ BO, ∠ABC-এর সমদ্বিখণ্ডক; ∴ BO রেখায় অবস্থিত যে-কোন বিন্দু BC ও AB হইতে সমদূরবর্তী। ∴ OD = OF.

আবার, CO, ∠BCA-র সমদ্বিখণ্ডক;

∴ CO রেখায় অবস্থিত যে-কোন বিন্দু BC ও AC হইতে সমদূরবর্তী।

∴ OD = OE ∴ OE = OF.

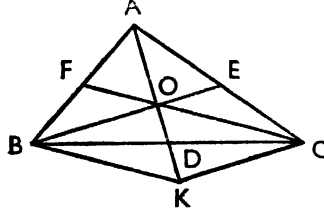
∴ O বিন্দু, AB ও AC হইতে সমদূরবর্তী অর্থাৎ ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত। সুতরাং AO, ∠BAC-এর সমদ্বিখণ্ডক।

অতএব, △ABC-এর কোণসমূহের সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

মন্তব্য: O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OD ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত ত্রিভুজটির তিনটি বাহুকেই স্পর্শ করিবে। এই বৃত্তকে ত্রিভুজের **অন্তর্বৃত্ত** (Inscribed circle or In-circle) বলে এবং O বিন্দুকে **অন্তঃকেন্দ্র** (In-centre) বলে।

উপপাদ্য 32

ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

(The medians of a triangle are concurrent.)

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ এবং ইহার দুইটি মধ্যমা BE ও CF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। AO সংযুক্ত কর এবং ইহাকে বর্ধিত করিয়া BC-এর সহিত D বিন্দুতে মিলিত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে AD রেখা ABC ত্রিভুজের একটি মধ্যমা।

অঙ্কন: C বিন্দু দিয়া BE রেখার সমান্তরাল করিয়া CK রেখা অঙ্কন কর এবং AD-কে বর্ধিত করিয়া CK রেখার সহিত K বিন্দুতে মিলিত কর। BK সংযুক্ত কর।

প্রমাণ: ACK ত্রিভুজে E, AC বাহুর মধ্যবিন্দু এবং CK ∥ EO.

∴ O, AK রেখার মধ্যবিন্দু।

পুনরায়, ABK ত্রিভুজে O এবং F যথাক্রমে AK ও AB বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু;

∴ OF ∥ BK, অর্থাৎ OC ∥ BK. ∴ BKCO একটি সামান্তরিক এবং ইহার OK ও BC কর্ণদ্বয় পরস্পরকে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

∴ D, BC রেখার মধ্যবিন্দু, অর্থাৎ AD, ABC ত্রিভুজটির একটি মধ্যমা।

মন্তব্য: ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যে বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে, তাহাকে ত্রিভুজের **ভরকেন্দ্র** (Centroid) বলে। এস্থলে O ত্রিভুজটির ভরকেন্দ্র।

অনুসিদ্ধান্ত: ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় পরস্পর পরস্পরকে একটি সমত্রিখণ্ডক বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করিতে হইবে, $AO = 2OD$; $BO = 2OE$ এবং $CO = 2OF$.

∵ $AO = OK$ এবং $OD = DK$; ∴ $AO = OK = 2OD$.

∴ $AO + OD = 2OD + OD$. ∴ $AD = 3OD$.

∴ $OD = \frac{1}{3} AD$.

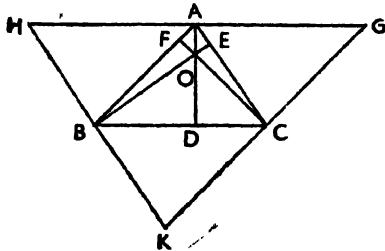
অনুরূপভাবে, $OE = \frac{1}{3} BE$ এবং $OF = \frac{1}{3} CF$.

অনুশীলনী 15

1. ত্রিভুজের কোন্ কোন্ বিশেষ রেখাগুলি সমবিন্দু?

2. ত্রিভুজের দুইটি কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় এবং তৃতীয় কোণটির অন্তর্দ্বিখণ্ডক সমবিন্দু।

3. ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু।

[**ইঙ্গিত :** ABC ত্রিভুজের BC, CA এবং AB বাহুর উপর যথাক্রমে AD, BE ও CF লম্বত্রয়। প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহারা সমবিন্দু।

A, B ও C বিন্দু দিয়া BC, CA ও AB-এর সমান্তরাল করিয়া HAG, HBK এবং GCK অঙ্কিত কর। উহাদের সংযুক্ত করিয়া $\triangle$GHK উৎপন্ন হইল। এখন, দেখাও যে AD, BE ও CF রেখা GHK ত্রিভুজের HG, HK এবং KG বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক। সুতরাং উহারা সমবিন্দু, ইত্যাদি। এই লম্বত্রয়ের ছেদবিন্দুকে ত্রিভুজের **লম্ববিন্দু** (Ortho-centre) বলে।]

4. ABCD সামান্তরিকের AB ও CD বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N; প্রমাণ কর, DM ও BN, AC কর্ণকে সমত্রিখণ্ডিত করে।

5. কোন চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা যদি উক্ত বাহুদ্বয়ের প্রত্যেকের উপর লম্ব হয়, প্রমাণ কর, চতুর্ভুজের অপর বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

6. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি উহার পরিসীমার তিন-চতুর্থাংশ অপেক্ষা বৃহত্তর। [B. C. S. 1946]

7. ত্রিভুজের দুইটি মধ্যমা পরস্পর সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু হইবে। [W. B. S. B. 1954]

8. ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমান হইলে ত্রিভুজটি সমবাহু হইবে।

9. O, ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\triangle OBC = \triangle OCA = \triangle OAB = \frac{1}{3}\triangle ABC.$$

10. ABC ত্রিভুজের BE ও CF দুইটি মধ্যমা এবং O ইহার ভরকেন্দ্র; প্রমাণ কর যে, $\triangle$BOC = চতুর্ভুজ AEOF.

জ্যামিতি

(দশম শ্রেণী)

প্রথম অধ্যায়

বৃত্ত

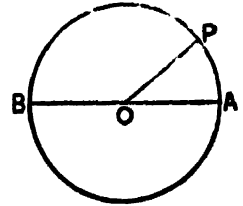
(Circle)

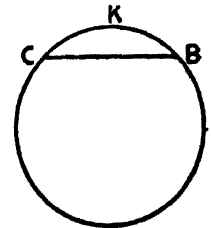
সংজ্ঞা :

বৃত্ত : কোন সামতলিক ক্ষেত্রের একটি স্থিরবিন্দু হইতে নিয়ত সমান দূরে অবস্থিত বিন্দুসমূহ দ্বারা উৎপন্ন বক্ররেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে বৃত্ত (Circle) বলে। স্থিরবিন্দুটিকে বৃত্তের **কেন্দ্র** (Centre) এবং বক্ররেখাটিকে উহার **পরিধি** (Circumference) বলে।

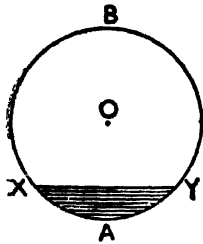
ব্যাস ও ব্যাসার্ধ : বৃত্তস্থ যে সরলরেখা কেন্দ্রকে ছেদ করিয়া উভয় দিকে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত, তাহাকে বৃত্তের **ব্যাস** (Diameter) বলে। সুতরাং বৃত্তের সকল ব্যাসই পরস্পর সমান।

বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্যন্ত বিস্তৃত সরলরেখাকে বৃত্তের **ব্যাসার্ধ** (Radius) বলে। সুতরাং বৃত্তের ব্যাসার্ধগুলিও পরস্পর সমান এবং ব্যাসার্ধ, ব্যাসের অর্ধেক।

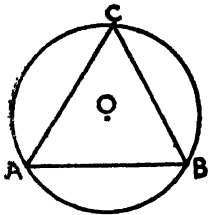
চিত্রে, ABP ক্ষেত্রটি একটি বৃত্ত, O বিন্দু উহার কেন্দ্র, ABP রেখাটি উহার পরিধি, AOB বৃত্তের ব্যাস এবং OP ব্যাসার্ধ।

অর্ধবৃত্ত : বৃত্তের ব্যাস ও পরিধি দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশকে **অর্ধবৃত্ত** (Semi-circle) বলে। উপরের চিত্রে APB ক্ষেত্রটি অর্ধবৃত্ত।

চাপ ও জ্যা : বৃত্তের পরিধির যে-কোন অংশকে বৃত্তের **চাপ** (Arc) বলে এবং কোনও চাপের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখাকে **বৃত্তের জ্যা** (Chord) বলে।

চিত্রে, BKC বৃত্তের চাপ এবং BC রেখা বৃত্তের জ্যা।

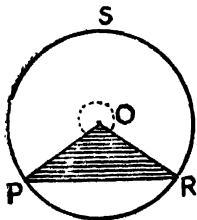
মন্তব্য : বৃত্তের ব্যাসই উহার বৃহত্তম জ্যা।

অধিচাপ, উপচাপ ও অনুবন্ধী : বৃত্তের জ্যা উহার পরিধিকে দুইটি অসমান অংশে বিভক্ত করিলে বৃহত্তর চাপটিকে **অধিচাপ** (Major arc) এবং ক্ষুদ্রতর চাপটিকে **উপচাপ** (Minor arc) বলে। উক্ত চাপ দুইটিকে পরস্পর **অনুবন্ধা** (Conjugate) বলে।

চিত্রে, XBY চাপটি বৃত্তের অধিচাপ এবং XAY চাপ বৃত্তের উপচাপ।

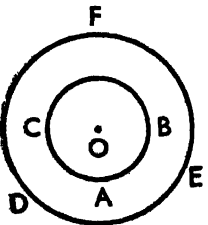
বৃত্তাংশ : প্রত্যেক জ্যা বৃত্তকে দুইটি ক্ষেত্রে বিভক্ত করে ; ইহাদের প্রত্যেকটিকে **বৃত্তাংশ** (Segment of a circle) বলে।

উপরের চিত্রে, XAY এবং XBY ক্ষেত্রগুলির প্রত্যেকে বৃত্তাংশ।

কোন বৃত্তাংশের জ্যা-এর প্রান্ত বিন্দুদ্বয় উহার চাপের উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুর সহিত যে সম্মুখ কোণ উৎপন্ন করে, তাহাকে **বৃত্তাংশস্থ কোণ** (Angle in a segment) বলা হয়।

চিত্রে, ∠ACB, ACB বৃত্তাংশস্থ একটি কোণ।

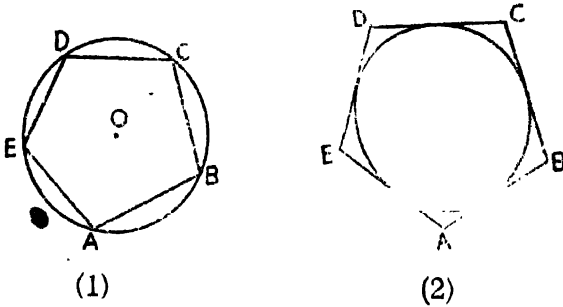
যে যে বৃত্তাংশের কোণ পরস্পর সমান, তাহাদিগকে **সদৃশ বৃত্তাংশ** (Similar segments) বলে।

বৃত্তকলা : বৃত্তের দুইটি ব্যাসার্ধ এবং উহাদের মধ্যবর্তী চাপ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রকে **বৃত্তকলা** (Sector of a circle) বলে।

চিত্রে, OPR এবং OPSR দুইটি বৃত্তকলা।

এককেন্দ্রীয় বৃত্ত একই কেন্দ্রবিশিষ্ট একাধিক বৃত্তকে **এককেন্দ্রীয় বৃত্ত** (Concentric circle) বলে।

চিত্রে ABC ও DEF দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্ত। উহাদের প্রত্যেকের কেন্দ্র O.

পরিলিখিত বৃত্ত ও অন্তর্বৃত্ত : যে ঋজুরেখক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলি কোন বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত হয়, সেই ক্ষেত্রটিকে **বৃত্তস্থ ক্ষেত্র** (Cyclic figure) এবং বৃত্তটিকে **পরিলিখিত বৃত্ত** (Circumscribed circle) বলা হয়।

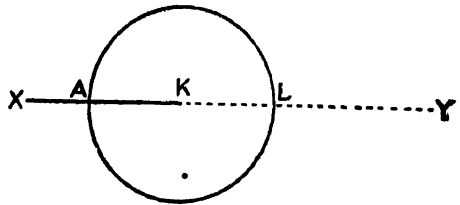
(1) নং চিত্রে, ABCDE একটি বৃত্তস্থ পঞ্চভুজ (Cyclic pentagon) এবং এক্ষেত্রে বৃত্তটিকে বলা হয় পারলিখিত বৃত্ত।

(1) (2)

যদি কোন ঋজুরেখ ক্ষেত্রের ভিতর সকল বাহুকে স্পর্শ করাইয়া বৃত্ত অঙ্কন করা হয়, তাহা হইলে বৃত্তটিকে উক্ত ক্ষেত্রের অন্তর্বৃত্ত (In-circle) বলা হয়।

(2) নং চিত্রে, বৃত্তটি ABCDE ক্ষেত্রটির অন্তবর্তী একটি অন্তর্বৃত্ত।

বৃত্তের ধর্ম ঃ প্রতিসাম্য ঃ

(i) বৃত্ত একটি সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র ; সুতরাং যদি কোন সরলরেখা উহার পরিধিকে একটি বিন্দুতে ছেদ করে, তবে ঐ সরলরেখাকে বর্ধিত করিলে উহা বৃত্তকে অবশ্যই দ্বিতীয় একটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।

চিত্রে XK সরলরেখা বৃত্তটিকে A বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। XK-কে বর্ধিত করিলে দেখা যায় XKY রেখা বৃত্তটিকে দ্বিতীয় বিন্দু B-তে ছেদ করে।

2. সমান সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তগুলি সর্বতোভাবে সমান। কারণ, একটির কেন্দ্র অপর একটির কেন্দ্রের উপর স্থাপন করিলে উহাদের পরিধিও পরস্পর মিলিত হইবে।

3. বৃত্তের কেন্দ্র হইতে কোন বিন্দুর দূরত্ব ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান, তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা বৃহত্তর হইলে ঐ বিন্দুটি যথাক্রমে বৃত্তের পরিধিস্থ, অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ হইবে।

বিপরীতক্রমে, কোন বিন্দু পরিধিস্থ, অন্তঃস্থ বা বহিঃস্থ হইলে বৃত্তের কেন্দ্র হইতে উক্ত বিন্দুর দূরত্ব ব্যাসার্ধের সমান, তদপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা বৃহত্তর হইবে।

4. এককেন্দ্রীয় বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ পরস্পর অসমান হইলে উহারা পরস্পর ছেদ করিতে পারে না; কিন্তু উহারা পরস্পর সমান হইলে বৃত্তগুলি পরস্পর মিলিত হইবে।

প্রতিসাম্য :

যদি একটি ক্ষেত্রকে কোন সরলরেখা বরাবর ভাঁজ করিলে রেখাটির দুই পার্শ্বের অংশ পরস্পর মিলিয়া যায়, তবে ক্ষেত্রটিকে ঐ সরলরেখার উভয় পার্শ্বে **প্রতিসম** (Symmetrical) বলা হয় এবং রেখাটিকে ক্ষেত্রটির **প্রতিসাম্য অক্ষ** (Axis of symmetry) বলে।

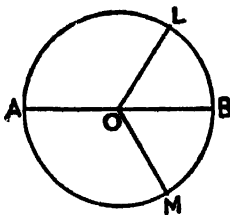
ক্ষেত্রটিকে ভাঁজ করিলে যে যে বিন্দুদ্বয় পরস্পর মিলিয়া যায়, তাহাদিগকে **অনুরূপ বিন্দু** (Corresponding points) এবং প্রতিসাম্য অক্ষের এক পার্শ্বস্থ ক্ষেত্রকে অপর পার্শ্বস্থ ক্ষেত্রের **প্রতিবিম্ব** (Image) বলে।

দুইটি প্রতিসম ক্ষেত্রের x ও y দুইটি অনুরূপ বিন্দু হইলে xy রেখা প্রতিসাম্য অক্ষ দ্বারা সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে এবং x ও y বিন্দুদ্বয়কে **প্রতিসমরূপে বিপরীত** (Symmetrically opposite) বলে। সুতরাং প্রতিসাম্য অক্ষের যে-কোন বিন্দু হইতে x ও তাহার অনুরূপ y বিন্দু সমদূরবর্তী।

উদাহরণ 1. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উহার শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডকের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম। সমদ্বিখণ্ডকটি উহাদের প্রতিসাম্য অক্ষ।

উদাহরণ 2. বর্গক্ষেত্র বা রম্বস উহার কর্ণের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

বৃত্তের প্রতিসাম্য ধর্ম :

(1) বৃত্ত উহার ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

ALBM বৃত্তে AB যে-কোন একটি ব্যাস এবং O বৃত্তটির কেন্দ্র।

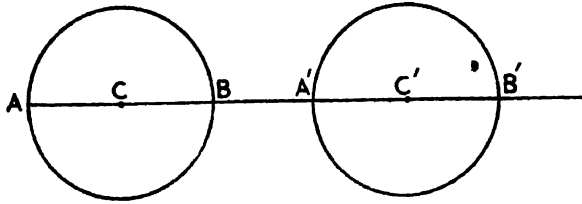
প্রমাণ করিতে হইবে, ALBM বৃত্ত AB ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

প্রমাণ : AB-এর বিপরীত দিকে দুইটি ব্যাসার্ধ OL এবং OM এমনভাবে অঙ্কন কর, যেন $\angle BOL = \angle BOM$ হয়।

যেহেতু OL = OM, সুতরাং L বিন্দু ও M বিন্দু পরস্পর মিলিয়া যাইবে। অতএব, BLA চাপের প্রত্যেক বিন্দু BMA চাপের প্রত্যেক বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে। সুতরাং ALBM বৃত্তটি AB ব্যাসের উভয় পার্শ্বে প্রতিসম।

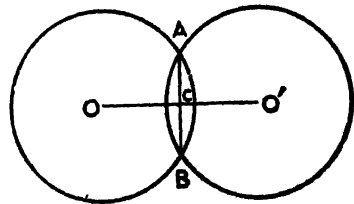
মন্তব্য : চিত্রে AB সম্পর্কে L ও M প্রতিসমরূপে বিপরীত বিন্দু। সুতরাং কোন বৃত্ত যদি কোন বিন্দু দিয়া যায়, তবে উহা যে-কোন ব্যাস সম্পর্কে প্রতিসমরূপে বিপরীত বিন্দু দিয়াও যাইবে।

(2) দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখা উহাদিগকে প্রতিসমরূপে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

C ও C′ দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র। CC′ সংযুক্ত কর। মনে কর, CC′-কে উভয় পার্শ্বে বর্ধিত করিলে উহা C-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে A ও B এবং C′-কেন্দ্রীয় বৃত্তকে A′ ও B′ বিন্দুতে

ছেদ করে। এক্ষেত্রে, AB এবং A′B′ বৃত্তদ্বয়ের ব্যাস। ব্যাস বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষ। AB প্রথম বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষ এবং A′B′ দ্বিতীয় বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষ। সুতরাং CC′ উভয় বৃত্তেরই প্রতিসাম্য অক্ষ।

(3) দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা, উহাদের কেন্দ্র-সংযোজক সরলরেখা দ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

O এবং O′ দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র এবং এই বৃত্তদ্বয় পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। OO′ এবং AB সংযুক্ত কর।

OO′, AB বৃত্তের প্রতিসাম্য অক্ষ। A বিন্দু, O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া এই বৃত্তের অধোভাগে ইহার প্রতিবিম্ব থাকিবে। সুতরাং A বিন্দুর প্রতিবিম্ব B বিন্দু।

∴ OO′, AB রেখার উপর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক

অনুশীলনী 16

1. রম্বস উহার কর্ণ সম্পর্কে প্রতিসম।
2. সমবাহু ত্রিভুজ উহার মধ্যমা সম্পর্কে প্রতিসম।
3. নিম্নলিখিত ইংরাজী অক্ষরগুলির কিরূপ প্রতিসাম্য আছে, নির্ণয় কর

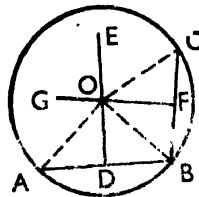
(a) OH MAN, THOU ART HE!

(b) VIVEKANANDA.

(c) ABHEDANANDA.

উপপাদ্য 33

একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে, এরূপ তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একটি এবং কেবলমাত্র একটি বৃত্তই অঙ্কন করা যাইতে পারে।

(There is one circle, and only one, which passes through three given points not in a straight line.)

মনে কর, A, B ও C তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং উহারা এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে।

প্রমাণ করিতে হইবে, A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি, এবং কেবলমাত্র একটি, বৃত্তই অঙ্কন করা যাইতে পারে।

অঙ্কন: AB ও BC সংযুক্ত কর।

AB ও BC রেখাদ্বয়কে যথাক্রমে D ও F বিন্দুতে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া DE ও FG রেখাদ্বয় অঙ্কিত করা হইল। যেহেতু, AB ও BC একই সরলরেখায় অবস্থিত নহে, সুতরাং DE ও FG অবশ্যই কোন বিন্দু O-তে মিলিত হইবে। OA, OB ও OC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : O বিন্দু, AB-এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকে অবস্থিত। OA = OB.

আবার, O বিন্দু, BC-এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকে অবস্থিত OB = OC.

∴ OA = OB = OC

সুতরাং, O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OA ব্যাসার্ধ লইয়া যে বৃত্ত অঙ্কিত হইবে, তাহা A, B ও C বিন্দু দিয়া অতিক্রম করিবে।

পুনরায়, যেহেতু DE এবং FG সরলরেখাদ্বয় অপর কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না, অতএব, A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী অপর কোন বিন্দু থাকিতে পারে না।

∴ A, B ও C বিন্দু দিয়া অতিক্রম করে, এরূপ অপর কোন বৃত্ত অঙ্কন করা যায় না।

মন্তব্য : A, B ও C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত হইলে AB ও BC সরলরেখা দুইটির লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়, একই সরলরেখার উপর লম্ব বলিয়া পরস্পর সমান্তরাল হইত এবং A, B ও C হইতে সমদূরবর্তী কোন বিন্দু পাওয়া যাইত না। সুতরাং সেক্ষেত্রে কোন বৃত্তাঙ্কন সম্ভব হইত না। অতএব, একই রেখায় অবস্থিত তিনটি বিন্দু দিয়া কোন বৃত্ত অঙ্কন করা যায় না।

অনুসিদ্ধান্ত 1. কোন বৃত্তের একাধিক কেন্দ্র থাকিতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত 2. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না। [W. B. S. B. 1952]

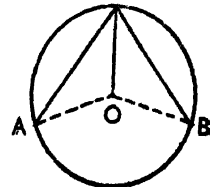
অনুসিদ্ধান্ত 3. বৃত্তের পরিধিস্থ তিনটি বিন্দু নির্দিষ্ট থাকিলে বৃত্তটি নির্দিষ্ট হইবে।

অনুশীলনী 17

1. সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র উহার বাহু তিনটি হইতে সমদূরবর্তী।

2. সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র উহার অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

3. বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দু হইতে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করিলে তাহারা ঐ বিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখার সহিত সমান কোণে নত হইবে।

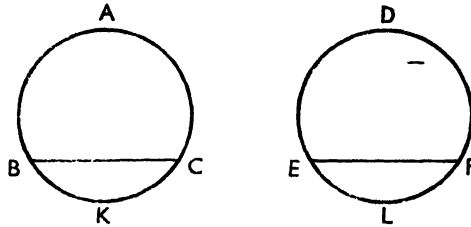
[**ইঙ্গিত :** মনে কর, P পরিধিস্থ কোন বিন্দু। PA ও PB দুইটি সমান জ্যা। OP যুক্ত কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, ∠OPA = ∠OPB. OA এবং OB যুক্ত কর। ΔOPA ≡ ΔOPB. ∴ ∠OPA = ∠OPB.]

4. এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর যাহার কেন্দ্র অবস্থিত হইবে। এইরূপ অঙ্কন কি সকল ক্ষেত্রেই সম্ভব ?

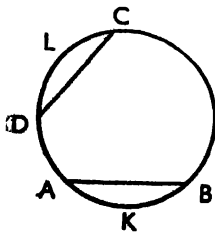
5. প্রমাণ কর, সামান্তরিকের মধ্যে কেবলমাত্র আয়তক্ষেত্রের পরিবৃত্ত অঙ্কন সম্ভব।

কয়েকটি স্বতঃসিদ্ধ :

স্বতঃসিদ্ধ (vi) : (*a*) সমান সমান বৃত্তে (অথবা একই বৃত্তে), সমান সমান জ্যা সমান সমান চাপ বিচ্ছিন্ন করে ; উপচাপ উপচাপের, অধিচাপ অধিচাপের সহিত সমান হয়।

(*b*) সমান সমান বৃত্তে (অথবা একই বৃত্তে), সমান সমান চাপের উপর অবস্থিত জ্যা-গুলি পরস্পর সমান।

সমান সমান বৃত্তে :

(*a*) ABC ও DEF বৃত্তদ্বয় পরস্পর সমান। ইহাদের জ্যা BC = জ্যা EF.
উপচাপ BKC = উপচাপ ELF
এবং অধিচাপ BAC = অধিচাপ EDF.

(*b*) ABC ও DEF বৃত্তদ্বয় পরস্পর সমান। ইহাদের চাপ BKC = চাপ ELF.
∴ BC জ্যা = EF জ্যা।

একই বৃত্তে :

(*a*) ABCD বৃত্তে AB জ্যা = CD জ্যা।
∴ উপচাপ AKB = উপচাপ CLD
এবং অধিচাপ ALB = অধিচাপ CKD.

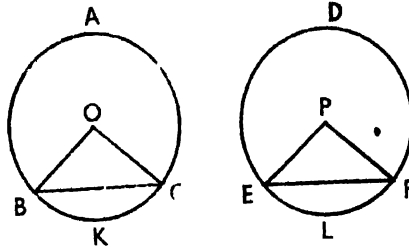
(*b*) ABCD বৃত্তে চাপ AKB = চাপ CLD.
∴ জ্যা AB = জ্যা CD.

স্বতঃসিদ্ধ (vii) : (*a*) সমান সমান বৃত্তে (অথবা একই বৃত্তে), যে সকল চাপ কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা পরস্পর সমান।

(*b*) সমান সমান বৃত্তে (অথবা একই বৃত্তে), যে সকল কেন্দ্রস্থ কোণ সমান সমান চাপের উপর অবস্থিত, তাহারা পরস্পব সমান।

সমান সমান বৃত্তে :

(*a*) ABC ও DEF দুইটি সমান বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয় যথাক্রমে O ও P এবং চাপদ্বয় যথাক্রমে BKC ও ELF. ইহাদের কেন্দ্রস্থ ∠BOC= ∠EPF.

∴ চাপ BKC = চাপ ELF.

(*b*) ABC ও DEF দুইটি সমান বৃত্তেব কেন্দ্রদ্বয় যথাক্রমে O ও P এবং ∠BOC ও ∠EPF দুইটি কেন্দ্রস্থ কোণ। ইহাদের চাপ BKC = চাপ ELF.

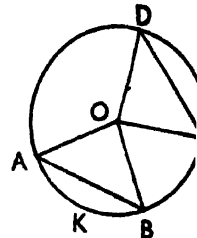
∴ ∠BOC= ∠EPF.

একই বৃত্তে :

(*a*) ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AKB ও CLD দুইটি চাপ। ইহাদের দ্বা উৎপন্ন কেন্দ্রস্থ ∠AOB = কেন্দ্রস্থ ∠COD.

∴ চাপ AKB = চাপ CLD.

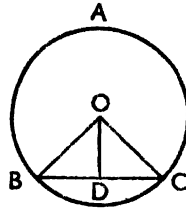
(*b*) ABCD বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ∠AOB ও ∠COD দুইটি কেন্দ্রস্থ কোণ। এই কোণ দুইটি যথাক্রমে AKB ও CLD দুইটি সমান চাপ দ্বারা উৎপন্ন হইয়াছে।

∴ ∠AOB = ∠COD.

উপপাদ্য 34

(i) বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত কোন সরলরেখা ব্যাস ভিন্ন অপর কোন জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে ঐ সরলরেখা জ্যা-এর উপর লম্ব হইবে।

(ii) বিপরীতক্রমে, বৃত্তের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত একটি সরলরেখা ব্যাস ভিন্ন কোন জ্যা-এর উপর লম্ব হইলে ঐ সরলরেখা জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

(A straight line, drawn from the centre of a circle to bisect a chord which is not a diameter, is at right angles to the chord.

Conversely, a perpendicular drawn from the centre of a circle on a chord which is not a diameter, bisects the chord.)

মনে কর, O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র এবং BC ইহার ব্যাস ভিন্ন অপর একটি জ্যা।

(i) মনে কর, OD, BC-কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, OD, BC জ্যা-এর উপর লম্ব।

অঙ্কন : OB এবং OC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : OBD এবং OCD ত্রিভুজদ্বয়ে, OB = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া), BD = CD ($\because$ D, BC রেখার মধ্যবিন্দু) এবং OD সাধারণ বাহু।

$\therefore$ $\triangle OBD \cong \triangle OCD$. $\therefore$ $\angle ODB = \angle ODC$; কিন্তু ইহারা সন্নিহিত কোণ। $\therefore$ কোণদ্বয়ের প্রত্যেকে এক সমকোণ।

$\therefore$ OD, BC জ্যা-এর উপর লম্ব।

(ii) বিপরীতক্রমে, মনে কর, OD, BC জ্যা-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে, BD = CD.

অঙ্কন : OB এবং OC সংযুক্ত কর।

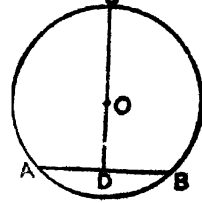
প্রমাণ : OBD এবং OCD সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ OB = অতিভুজ OC (∵ ইহারা একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ)

এবং OD সাধারণ বাহু। ∴ $\triangle OBD \equiv \triangle OCD$. ∴ BD = CD.

অনুসিদ্ধান্ত 1. যে সরলরেখা বৃত্তের জ্যা-কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে, তাহা বৃত্তের কেন্দ্রভেদী।

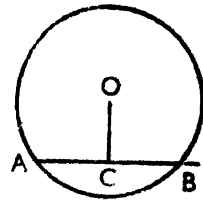
মনে কর, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O, AB ইহার জ্যা এবং CD, AB-কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ করিতে হইবে, CD, বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দু দিয়া যায়।

প্রমাণ : CD, AB-কে লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত করে। সুতরাং CD-এর উপর যে-কোন বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী। O, বৃত্তের কেন্দ্র এবং উহা A ও B হইতে সমদূরবর্তী। ∴ O বিন্দুটিও CD রেখায় অবস্থিত; অর্থাৎ CD, বৃত্তের কেন্দ্র O বিন্দু দিয়া যায়।

অনুসিদ্ধান্ত 2. একটি সরলরেখা কোন বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

AB সরলরেখা বৃত্তটিকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিল। বৃত্তের কেন্দ্র O হইতে AB-এর উপর OC লম্ব অঙ্কন কর। ∴ AC = BC.

এখন যদি AB রেখা বৃত্তটিকে কোন তৃতীয় বিন্দু D-তে ছেদ করে, তবে AC = CD. ∴ BC = CD.

এখন CD রেখারই একটি অংশ BC কখনও CD-এর সমান হইতে পারে না।

সুতরাং, AB রেখা বৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

অনুশীলনী 18

1. 10 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করিয়া উহার কেন্দ্র হইতে 5 সে. মি. দূরে একটি জ্যা অঙ্কন কর এবং জ্যা-টির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

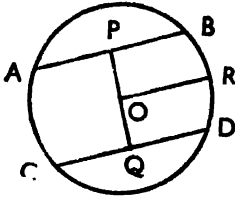
2. প্রমাণ কর বৃত্তের ব্যাসই উহার বৃহত্তম জ্যা।

3. বৃত্তের কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব টানিলে লম্বটি কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

4. বৃত্তের দুইটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরলরেখা একটি জ্যা-এর উপর লম্ব হইলে, অপর জ্যা-এর উপরও লম্ব হইবে।

5. কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু-সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

[**ইঙ্গিত:** AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা। P এবং Q উহাদের মধ্যবিন্দুদ্বয়।

প্রমাণ করিতে হইবে, PQ রেখা O বিন্দু দিয়া যাইবে।

OP, OQ সংযুক্ত কর। O বিন্দু দিয়া PB-এর সমান্তরাল করিয়া OR টান।

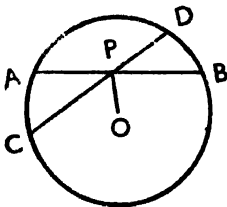
এক্ষণে, $\because$ $OP \perp AB$ এবং $OR \parallel PB$;

$\therefore$ $\angle OPB + \angle POR = 2$ সমকোণ। সুতরাং $\angle POR = 1$ সমকোণ।

আবার, $\because$ $OR \parallel PB$; $\therefore$ $OR \parallel QD$. অনুরূপভাবে, $\angle QOR = 1$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle POR + \angle QOR = 2$ সমকোণ। অর্থাৎ, OP এবং OQ সরলরেখাদ্বয় একই রেখায় অবস্থিত। $\therefore$ PQ সরলরেখা O বিন্দু দিয়া গিয়াছে।]

6. বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন, পরস্পরচ্ছেদী দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে পারে না।

[**ইঙ্গিত:** যদি সম্ভব হয়, মনে কর, AB ও CD দুইটি জ্যা P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে। OP সংযুক্ত কর।

$\because$ P, AB-এর মধ্যবিন্দু, $\therefore$ OP, AB-এর উপর লম্ব। $\therefore$ $\angle OPB = 1$ সমকোণ।

অনুরূপভাবে, $\angle OPD = 1$ সমাকাণ।

$\therefore$ $\angle OPB = \angle OPD$, কিন্তু ইহা অসম্ভব।

ইহা সম্ভব হইতে পারে, যদি P এবং O পরস্পর মিলিত হয়, অর্থাৎ যদি AB ও CD বৃত্তের ব্যাস হয়।]

7. দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের সাধারণ জ্যা-এর মধ্যবিন্দু এবং বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকিবে।

8. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী বৃত্তসমূহের কেন্দ্রের সঞ্চারপথ বিন্দুর সংযোজক রেখার লম্বদ্বিখণ্ডক।

9. কোন বৃত্তের সমান্তরাল জ্যা-সমূহের সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

10. AB সরলরেখা দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের বৃহত্তরটিকে A ও B বিন্দুতে এবং ক্ষুদ্রতরটিকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, AC = BD.

11. দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; যে-কোন রেখা PAQ পরিধিদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। দেখাও যে, PQ-এর দৈর্ঘ্য বৃহত্তম হইবে তখন, যখন উহা কেন্দ্রসংযোজক রেখার সহিত সমান্তরাল হইবে।

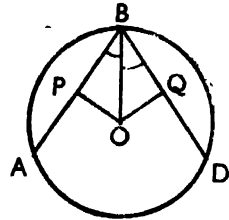
12. কোন বৃত্তের OB ব্যাসার্ধের সহিত সমান কোণ করিয়া AB ও BD দুইটি জ্যা অঙ্কন করা হইল। প্রমাণ কর, জ্যা দুইটি পরস্পর সমান ও কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

[**ইঙ্গিত :** O হইতে AB এবং BD-এর উপর যথাক্রমে OP এবং OQ লম্ব অঙ্কন করা হইল।

∴ P এবং Q, AB ও BD এর মধ্যবিন্দুদ্বয়।

∵ $\triangle OPB \equiv \triangle OBQ$,

∴ OP = OQ এবং PB = QB

অর্থাৎ AB = BD।]

13. দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে R এবং r; বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র দুইটির দূরত্ব d হইলে প্রমাণ কর,

$$R - r > d < R + r.$$

14. দুইটি বৃত্তের কেন্দ্র-সংযোজক সরলরেখা উহাদের সাধারণ জ্যা-কে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

[**ইঙ্গিত :** চিত্র নিজে আঁক। A ও B-কেন্দ্রীয় বৃত্তদ্বয় পরস্পর C ও D বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।

∴ $\triangle ACB \equiv \triangle ADB$; ∴ $\angle CAO = \angle DAO$. ∴ $\Delta ACO = \Delta ADO$.

∴ CO = DO এবং $\angle AOC = \angle AOD$, ইত্যাদি]

15. একটি বহিঃস্থ বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের পরিধি পর্যন্ত দুইটি সমান সরলরেখা টানা হইল। প্রমাণ কর যে, উহারা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

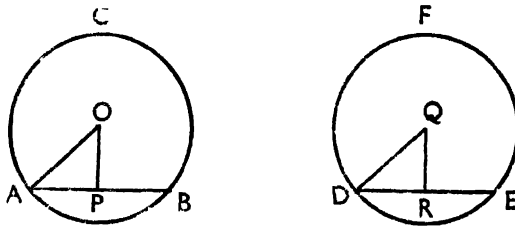
সম্পাদ্য 35

(i) সমান সমান বৃত্তে (অথবা একই বৃত্তে), সমান জ্যা-গুলি কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী।

(ii) বিপরীতক্রমে, সমান সমান বৃত্তে (অথবা একই বৃত্তে), কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী জ্যা-গুলি পরস্পর সমান।

[(i) In equal circles (or, in the same circle), equal chords are equidistant from the centres (or, centre).

(ii) *Conversely*, in equal circles (or, in the same circle), chords which are equidistant from the centres (or, centre) are equal.]

সমান সমান বৃত্তে :

(i) মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সমান সমান বৃত্ত ; যথাক্রমে O এবং Q উহাদের কেন্দ্র। AB ও DE যথাক্রমে এই দুই বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা এবং OP ও QR যথাক্রমে AB ও DE-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে, জ্যা দুইটি নিজ নিজ বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী ; অর্থাৎ $OP = QR$.

অঙ্কন : OA এবং QD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : যেহেতু OP এবং QR যথাক্রমে AB ও DE-এর উপর লম্ব, সুতরাং P এবং R যথাক্রমে AB ও DE-এর মধ্যবিন্দু। এখন, যেহেতু $AB = DE$, সুতরাং $AP = DR$.

$\therefore$ OAP এবং QDR সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ OA = অতিভুজ QD (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং $AP = DR$; $\therefore$ $\Delta OAP \equiv \Delta QDR$. $\therefore$ $OP = QR$.

(ii) বিপরীতক্রমে, মনে কর, ABC ও DEF দুইটি সমান সমান বৃত্ত এবং যথাক্রমে O এবং Q উহাদের কেন্দ্র। AB ও DE যথাক্রমে এই দুই বৃত্তের দুইটি জ্যা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী, অর্থাৎ AB জ্যা-এর উপর OP লম্ব = DE জ্যা-এর উপর QR লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে, AB জ্যা = DE জ্যা।

অঙ্কন : OA এবং QD সংযুক্ত কর।

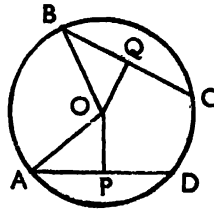
প্রমাণ : যেহেতু OP এবং QR যথাক্রমে AB ও DE-এর উপর লম্ব, সুতরাং P এবং R যথাক্রমে AB ও DE-এর মধ্যবিন্দু; অর্থাৎ $AP = \frac{1}{2}AB$ এবং $DR = \frac{1}{2}DE$.

এখন, OAP এবং QDR সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ OA = অতিভুজ QD (সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং OP = QR. $\therefore$ $\triangle OAP = \triangle QDR$. $\therefore$ AP = DR.

$\therefore$ AB জ্যা = DE জ্যা ($\because$ $AP = \frac{1}{2}$ AB এবং $DR = \frac{1}{2}$ DE).

একই বৃত্তে :

(i) মনে কর, ABCD একটি বৃত্ত এবং O উহার কেন্দ্র। AD ও BC এই বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা এবং OP ও OQ যথাক্রমে AD ও BC-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে, জ্যা দুইটি কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী ; অর্থাৎ, OP = OQ.

অঙ্কন : OA এবং OB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : যেহেতু, OP এবং OQ যথাক্রমে AD ও BC-এর উপর লম্ব, সুতরাং P এবং Q যথাক্রমে AD ও BC-এর মধ্যবিন্দু। এখন, যেহেতু, AD = BC, সুতরাং AP = BQ.

$\therefore$ OAP এবং OBQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং AP = BQ ; $\therefore$ $\triangle OAP \equiv \triangle OBQ$ $\therefore$ OP = OQ.

(ii) বিপরীতক্রমে, মনে কর, ABCD একটি বৃত্ত এবং O উহার কেন্দ্র। AD ও BC এই বৃত্তের দুইটি জ্যা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী; অর্থাৎ, AD জ্যা-এর উপর OP লম্ব = BC জ্যা-র উপর OQ লম্ব।

প্রমাণ করিতে হইবে, AD জ্যা = BC জ্যা।

অঙ্কন : OA এবং OB সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : যেহেতু, OP এবং OQ যথাক্রমে AD ও BC-এর উপর লম্ব,

সুতরাং P এবং Q যথাক্রমে AD ও BC-এর মধ্যবিন্দু;

অর্থাৎ, $AP = \frac{1}{2}AD$ এবং $BQ = \frac{1}{2}BC$.

এখন, OAP এবং OBQ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ OA = অতিভুজ OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং $OP = OQ$. $\therefore$ $\triangle OAP \equiv \triangle OBQ$. $\therefore$ $AP = BQ$.

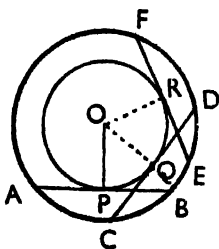
$\therefore$ AD জ্যা = BC জ্যা ($\because$ $AP = \frac{1}{2}AD$ এবং $BQ = \frac{1}{2}BC$.)

অনুসিদ্ধান্ত 1. বৃত্তের যে-কোন দুইটি জ্যা-এর মধ্যে কেন্দ্রের নিকটতরটি বৃহত্তর।

অনুসিদ্ধান্ত 2. বিপরীতক্রমে, বৃত্তের যে-কোন দুইটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তরটি কেন্দ্রের নিকটতর।

অনুশীলনী 19

1. কোন বৃত্তের সমান জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

[**ইঙ্গিত :** মনে কর, বৃত্তের কেন্দ্র O.

AB, CD, EF ইত্যাদি বৃত্তের সমান সমান জ্যা। P, Q, R প্রভৃতি যথাক্রমে ইহাদের মধ্যবিন্দু। OP, OQ, OR ইত্যাদি যোগ কর। O-কে কেন্দ্র করিয়া OP-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অংকিত বৃত্তটি, P, Q, R ইত্যাদির উদ্দিষ্ট সঞ্চারপথ।

প্রমাণ : OP, OQ, OR ইত্যাদি সরলরেখাগুলি যথাক্রমে AB, CD, EF ইত্যাদির উপর লম্ব। যেহেতু $AB = CD = FF = \cdots$

অতএব, উহারা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী, অর্থাৎ $OP = OQ = OR$ ইত্যাদি।]

2. একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সে. মি.; কেন্দ্র হইতে 6 সে.মি. দূরে একটি বিন্দুর মধ্য দিয়া এইরূপ একটি জ্যা অঙ্কন কর, যাহা সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্র হইবে।

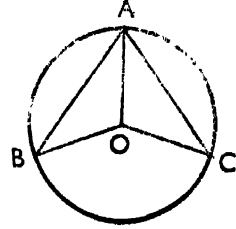
3. বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা বৃত্ত-মধ্যে পরস্পর ছেদ করিলে উহাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সহিত যথাক্রমে সমান হইবে। [C. U. 1935]

4. AB ও AC কোন বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ কর, ∠BAC-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে। [C. U. 1926]

[**ইঙ্গিত :** OA, OB, OC সংযুক্ত কর।

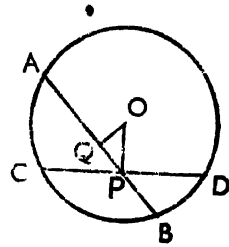
প্রমাণ করিতে হইবে যে, AO, ∠BAC কোণের সমদ্বিখণ্ডক।

$\triangle ABO \equiv \triangle ACO$.

$\therefore$ $\angle OAB = \angle OAC$ ইত্যাদি।]

5. কোন বৃত্তে ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অঙ্কিত সমান্তরাল জ্যা-গুলি পরস্পর সমান।

6. বৃত্তের দুই অসমান জ্যা-এর একটি যদি অপরটির মধ্যবিন্দুগামী হয়, প্রমাণ কর, প্রথম জ্যা দ্বিতীয় জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর।

[**ইঙ্গিত :** ACBD বৃত্তের O কেন্দ্র।

AB ও CD দুইটি জ্যা CD-এর মধ্যবিন্দু P-তে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, AB > CD.

OP সংযুক্ত কর এবং OQ ⊥ AB টান।

$\triangle QOP$ ত্রিভুজের $\angle OQP = 1$ সমকোণ এবং $\angle OPQ$ সূক্ষ্মকোণ বলিয়া, OP > OQ. $\therefore$ AB > CD (উপ. 35 অনুসি. (i) অনুসারে)]

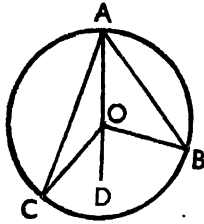
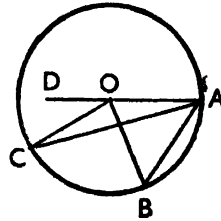
7. একটি বৃত্তে AB, AC ও AD তিনটি ক্রমানুক্রমিক জ্যা এবং AB উহার ব্যাস। প্রমাণ কর, (i) AB > AC > AD, (ii) কেন্দ্র হইতে AD জ্যা-এর দূরত্ব AC জ্যা-এর দূরত্ব অপেক্ষা অধিক।

8. বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু দিয়া (i) একটি বৃহত্তম জ্যা এবং (ii) একটি ক্ষুদ্রতম জ্যা অঙ্কন কর।

9. কোন বৃত্তে MN একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং AB যে-কোন একটি ব্যাস। প্রমাণ কর, A ও B হইতে MN-এর উপর লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি বা অন্তর ধ্রুবক। [C. U. 1936]

উপপাদ্য 36

বৃত্তের কোন একটি চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ, উহার অবশিষ্ট পরিধির যে-কোন বিন্দুর কোণের দ্বিগুণ।

(The angle which an arc of a circle subtends at the centre is double that which it subtends at any point of the remaining part of the circumference.)

চিত্র 1

চিত্র 2

মনে কর, O, ABC বৃত্তের কেন্দ্র ; BC উহার একটি চাপ। আরও মনে কর, BC চাপের উপর দণ্ডায়মান $\angle BOC$ কেন্দ্রস্থ কোণ এবং $\angle BAC$ অবশিষ্ট পরিধির A বিন্দুস্থ একটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে, $\angle BOC = 2\angle BAC$.

অঙ্কন : AO সংযুক্ত করিয়া উহাকে D পর্যন্ত বর্ধিত কর।

প্রমাণ : AOB ত্রিভুজে, OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া); $\therefore \angle OAB = \angle OBA$.

কিন্তু, ত্রিভুজটির বহিঃকোণ $\angle BOD = \angle OAB + \angle OBA = 2\angle OAB$. অনুরূপ-ভাবে, AOC ত্রিভুজে, OA = OC (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া);

$\therefore \quad \angle OAC = \angle OCA$.

কিন্তু, ত্রিভুজটির বহিঃকোণ $\angle COD = \angle OAC + \angle OCA = 2\angle OAC$.

সুতরাং, চিত্র 1-এ, $\angle BOD + \angle COD = 2\angle OAB + 2\angle OAC$.

$\therefore \quad \angle BOC = 2(\angle OAB + \angle OAC) = 2\angle BAC$

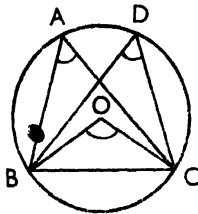
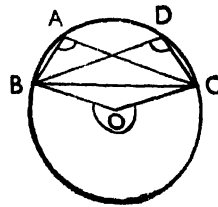
এবং চিত্র 2-এ, $\angle BOD - \angle COD = 2\angle OAB - 2\angle OAC$.

$\therefore \quad \angle BOC = 2(\angle OAB - \angle OAC) = 2\angle BAC$.

মন্তব্য : BC চাপটি বৃত্তের অর্ধ-পরিধির সমান হইলে, $\angle BOC = 2$ সমকোণ ; আবার, BC চাপটি বৃত্তের অধিচাপ হইলে, $\angle BOC$ একটি প্রবৃদ্ধ কোণ হইবে। এই দুই ক্ষেত্রেও উল্লিখিত প্রমাণ-পদ্ধতি প্রযোজ্য হইবে।

উপপাদ্য 37

একই বৃত্তাংশস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

(Angles in the same segment of a circle are equal.)

চিত্র 1

চিত্র 2

মনে কর, O, ABCD বৃত্তের কেন্দ্র ; এবং $\angle BAC$ ও $\angle BDC$, BADC বৃত্তাংশস্থ যে-কোন দুইটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে, $\angle BAC = \angle BDC$.

অঙ্কন ঃ OB, BC এবং OC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ ঃ একই চাপ BC-এর উপর দণ্ডায়মান $\angle BOC$ কেন্দ্রস্থ কোণ এবং $\angle BAC$ ও $\angle BDC$ দুইটি পরিধিস্থ কোণ।

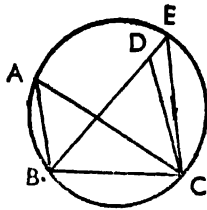
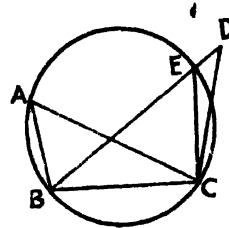
$\therefore$ $\angle BOC = 2\angle BAC$ এবং $\angle BOC = 2\angle BDC$.

$\therefore$ $\angle BAC = \angle BDC$.

মন্তব্য ঃ চিত্র 1-এ বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর এবং চিত্র 2-এ বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। বৃত্তাংশটি অর্ধবৃত্ত হইলেও উল্লিখিত প্রমাণ-পদ্ধতি প্রযোজ্য হইবে।

উপপাদ্য 38

দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা উহার একই পার্শ্বস্থ অপর দুই বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করিলে বিন্দু চারিটি সমবৃত্ত।

(If the straight line joining two points subtends equal angles at two other points on the same side of it, the four points lie in one circle.)

চিত্র 1 চিত্র 2

মনে কর, B ও C বিন্দুর সংযোজক রেখা BC, উহার একই পার্শ্বে A ও E বিন্দুতে ∠BAC এবং ∠BEC দুইটি সমান কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, A, B, C ও E সমবৃত্ত।

প্রমাণ: A, B ও C দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। এই বৃত্ত E বিন্দু দিয়া যদি না যায়, তবে ইহা BE বা বর্ধিত BE-কে যে-কোন বিন্দু D-তে ছেদ করিবে। DC সংযুক্ত করিলে, একই বৃত্তাংশস্থিত ∠BAC = ∠BDC.

∴ ∠BEC = ∠BDC; তাহা হইলে CED ত্রিভুজের বহিঃকোণটি বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইয়া পড়ে; কিন্তু ইহা অসম্ভব।

সুতরাং A, B ও C বিন্দুগামী বৃত্ত BE-কে E ভিন্ন অন্য কোন বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

∴ A, B, C ও E বিন্দু চারিটি সমবৃত্ত।

অনুসিদ্ধান্ত: একই ভূমির একই পার্শ্বে অবস্থিত ত্রিভুজগুলির শিরঃকোণসমূহ পরস্পর সমান হইলে, ঐ ত্রিভুজগুলির শীর্ষবিন্দুসমূহ সমবৃত্ত হইবে, এবং ত্রিভুজগুলির ভূমি বৃত্তটির একটি জ্যা হইবে।

অনুশীলনী 20

1. AB ও CD পরস্পর X বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি AX = CX এবং BX = DX হয়, প্রমাণ কর, A, B, C ও D সমবৃত্ত।

2. A, B ও C একই বৃত্তের উপর তিনটি বিন্দু। ∠BAC, ∠ABC ও ∠ACB এর সমদ্বিখণ্ডক তিনটি বৃত্তের সহিত পুনরায় যথাক্রমে P, Q ও R বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর, QR, AP-এর উপর লম্ব।

3. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে A, B ও C এমন তিনটি বিন্দু যেন A, B ও C যুক্ত করিলে একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়। প্রমাণ কর, ∠BAC + ∠OCB = 1 সমকোণ।

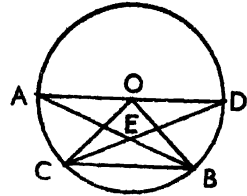
4. কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যা-দ্বয়ের ছেদবিন্দু E এবং বৃত্তটির কেন্দ্র O. প্রমাণ কর, ∠AOC + ∠BOD = 2∠AEC. [W. B. S. B. 1953]

[**ইঙ্গিত :** BC সংযুক্ত কর।

AC চাপের উপর, ∠AOC = 2∠ABC.

অনুরূপভাবে, ∠BOD = 2∠BCD.

∴ ∠AOC + ∠BOD = 2(∠ABC + ∠BCD)

= 2(∠EBC + ∠BCE) = 2∠AEC]

5. AB ও CD দুইটি সরলরেখা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। যদি AO = CO এবং BO = DO হয়, তবে প্রমাণ কর যে, A, B, C ও D একবৃত্তস্থ।

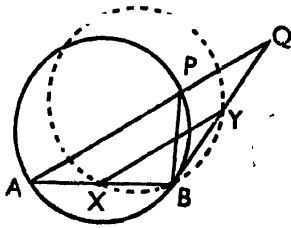
6. একই ভূমির উপর অঙ্কিত এবং সমান সমান শীর্ষকোণবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলির মধ্যে যেইটি সমদ্বিবাহু, তাহার ক্ষেত্রফলই বৃহত্তম হইবে। [C. U. 1941]

7. একই বৃত্তাংশের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকসমূহ কোন একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যাইবে। [C. U. 1914]

8. ABC একটি বৃত্তস্থ সমবাহু ত্রিভুজ। যদি A বিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে BC চাপের উপর P যে-কোন বিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর যে, AP = BP + CP.

[C. U. 1929]

9. কোন বৃত্তের জ্যা-এর উপর অবস্থিত চাপের P একটি বিন্দু। AP-কে Q পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত কর যেন, PQ=PB হয়। BQ-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. 1935]

[ইঙ্গিত : AB ও BQ-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X এবং Y. XY সংযুক্ত কর।

∵ XY ∥ AQ ;

∴ $\angle XYB = \angle PQB$

$= \frac{1}{2}(\angle PQB + \angle PBQ)$

$= \frac{1}{2}\angle APB$.

অর্থাৎ, $\angle APB = 2\angle XYB$.

আবার, যেহেতু APB চাপের উপর P যে-কোন বিন্দু লইলে $\angle APB$ নিয়তই সমান ; অতএব, $\angle XYB$ সর্বদাই সমান।

∴ XB-এর উপর অঙ্কিত XYB চাপই, Y বিন্দুর সঞ্চারপথ।]

10. দুইটি বৃত্ত পরস্পর A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। A বিন্দুর ভিতর দিয়া অঙ্কিত এবং বৃত্তদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ যে-কোন সরলরেখার সম্মুখস্থ B বিন্দুর কোণটি ধ্রুবক হইবে।

11. O-কেন্দ্রীয় কোন বৃত্তের AB ও CD জ্যা-দ্বয় বৃত্তটির বহিঃস্থ কোন E বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOC - \angle BOD = 2\angle AEC$.

[W. B. S. B. 1956]

[ইঙ্গিত : BC সংযুক্ত কর। $\angle AOC - \angle BOD = 2\angle ABC - 2\angle BCD$ $= 2(\angle ABC - \angle BCD) = 2(\angle ABC - \angle BCE) = 2\angle AEC$.]

12. ABC একটি বৃত্তস্থ ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় পরিধিকে X, Y, Z বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, XYZ ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে $90° - \frac{A}{2}$, $90° - \frac{B}{2}$ ও $90° - \frac{C}{2}$ হইবে। [C. U. 1939 (Supl.)]

13. AB ও CD কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল জ্যা এবং AD ও BC বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ কর যে, AO = BO.

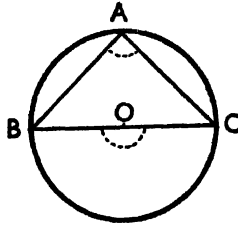
14. একটি ত্রিভুজের ভূমি ও শীর্ষকোণ দেওয়া আছে। ঐ শীর্ষবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

উপপাদ্য 39

(i) অর্ধবৃত্তস্থ কোণ একটি সমকোণ ;

(ii) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ একটি সূক্ষ্ম কোণ

এবং (iii) অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ কোণ একটি স্থূল কোণ।

[(i) The angle in a semi-circle is a **right angle** ; (ii) The angle in a segment greater than a semi-circle is less than a right angle and (iii) The angle in a segment less than a semi-circle is greater than a right angle.]

(i) মনে কর, O-কেন্দ্রবিশিষ্ট BAC একটি অর্ধবৃত্ত এবং ∠BAC একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে, ∠BAC একটি সমকোণ।

প্রমাণ : BC চাপের উপর দণ্ডায়মান ∠BOC কেন্দ্রস্থ ও ∠BAC পরিধিস্থ এবং BC বৃত্তের ব্যাস বলিয়া ∠BOC একটি সরলকোণ।

∴ ∠BAC = সরলকোণ BOC-এর অর্ধেক

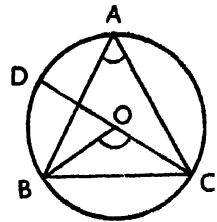
= 2 সমকোণের অর্ধেক = 1 সমকোণ।

(ii) মনে কর, O-কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং ∠BAC অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর বৃত্তাংশস্থ একটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে, ∠BAC একটি সূক্ষ্মকোণ।

অঙ্কন : BC, BO এবং CO সংযুক্ত কর ; CO-কে এমনভাবে বর্ধিত কর যেন উহা পরিধিকে কোন D বিন্দুতে ছেদ করে।

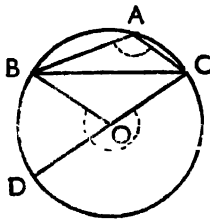
প্রমাণ : BC চাপের উপর দণ্ডায়মান ∠BOC কেন্দ্রস্থ এবং ∠BAC পরিধিস্থ।

∴ ∠BAC = ∠BOC-এর অর্ধেক।

আবার, CO-কে D পর্যন্ত বর্ধিত করায় ∠COD একটি সরলকোণ বা 2 সমকোণ।

∴ ∠BOC, দুই সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

∴ ∠BAC, এক সমকোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, অর্থাৎ ∠BAC একটি সূক্ষ্মকোণ।

(iii) মনে কর, O-কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং ∠BAC অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বৃত্তাংশস্থ একটি কোণ।

প্রমাণ করিতে হইবে, ∠BAC একটি স্থূলকোণ।

অঙ্কন : BO এবং CO সংযুক্ত কর; CO-কে বর্ধিত কর, যেন উহা পরিধিকে কোন D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : BC চাপের উপর দণ্ডায়মান ∠BOC কেন্দ্রস্থ এবং ∠BAC পরিধিস্থ।

∴ ∠BAC = ∠BOC-এর অর্ধেক।

আবার, CO-কে D পর্যন্ত বর্ধিত করায়, ∠COD একটি সরলকোণ বা 2 সমকোণ।

∴ ∠BOC, দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

∴ ∠BAC, এক সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ; অর্থাৎ ∠BAC একটি স্থূলকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত 1. সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে উহা অতিভুজের বিপরীত কৌণিক বিন্দু দিয়া যাইবে। [C. U. 1927]

অনুসিদ্ধান্ত 2. কোন বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে, উহার কোন জ্যা-এর সম্মুখ কোণটি সমকোণ হইলে, ঐ জ্যা বৃত্তটির একটি ব্যাস হইবে।

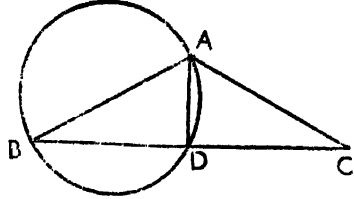
অনুশীলনী 21

1 দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের ছেদবিন্দু A ও B. যদি AP ও AQ দুইটি ব্যাস হয়, প্রমাণ কর, P, B ও Q একই সরলরেখায় অবস্থিত।

2 রম্বসের চারিটি বাহুকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত চারিটি বৃত্ত একটি সাধারণ বিন্দু দিয়া অতিক্রম করিবে।

3. কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলিকে ক্রমান্বয়ে ব্যাস লইয়া চারিটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর, ইহাদের মধ্যে যে-কোন দুইটি সন্নিহিত বৃত্তের জ্যা অপর দুইটি সন্নিহিত বৃত্তের সাধারণ জ্যা-এর সমান্তরাল।

4. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের একটিকে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্ত ত্রিভুজটির ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করিবে।

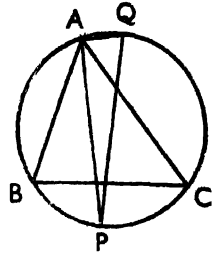
[**ইঙ্গিত:** ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয় পরস্পর সমান। AB-কে ব্যাস লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর; উহা BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করে। AD সংযুক্ত কর। প্রমাণ করিতে হইবে যে, BD = DC.

এখন, $\angle$ ADB অর্ধবৃত্তস্থ কোণ বলিয়া 1 সমকোণের সমান।

$\therefore$ $\angle$ ADC সন্নিহিত কোণ = 1 সমকোণ।

$\therefore$ $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$. $\therefore$ BD = CD]

5. কোন বৃত্তের পরিধিস্থ একটি বিন্দু A হইতে BC জ্যা-এর উপর AD একটি লম্ব। AE বৃত্তের একটি ব্যাস হইলে, প্রমাণ কর, $\angle BAD = \angle EAC$.

6. কোন ত্রিভুজের একটি কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক যদি পরিবৃত্তকে পুনরায় P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে, তবে PQ উক্ত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস হইবে।

[**ইঙ্গিত:** $\triangle$ABC বৃত্তস্থ ত্রিভুজের $\angle$A কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় যথাক্রমে AP এবং AQ. প্রমাণ করিতে হইবে যে, OP বৃত্তটির ব্যাস।

$\angle$PAQ 1 সমকোণের সমান বলিয়া, PAQ একটি অর্ধবৃত্ত এবং PQ উহার ব্যাস।]

7. একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত দুইটি সরলরেখা যদি পরস্পর লম্ব হয়, তবে লম্বদ্বয়ের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. 1917]

8. একটি বৃত্তের (i) অভ্যন্তরস্থ, (ii) উপরিস্থ বা (iii) বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া ঐ বৃত্তের যে সকল জ্যা অঙ্কন করা যাইতে পারে, তাহাদের মধ্যবিন্দুগুলির সঞ্চারপথ একটি বৃত্ত হইবে।

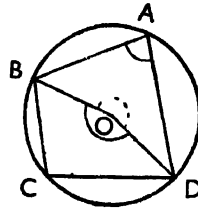
9. একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যে-কোন দুইটি বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় উহার পরিবৃত্তকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর, PQ ঐ বৃত্তের একটি ব্যাস।

উপপাদ্য 40

(i) বৃত্তে অন্তর্লিখিত যে-কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক।

(ii) বিপরীতক্রমে, কোন চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলি পরস্পর সম্পূরক হইলে উহা একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

((i) The opposite angles of any quadrilateral inscribed in a circle are supplementary.

(ii) Conversely, if the opposite angles of a quadrilateral be supplementary, the quadrilateral is a cyclic one.)

(i) মনে কর, O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, (i) $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ

এবং $\angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ।

অঙ্কন : OB এবং OD সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : বৃত্তের BCD চাপের উপর দণ্ডায়মান $\angle BOD$ কেন্দ্রস্থ এবং $\angle BAD$ পরিধিস্থ। $\therefore \angle BOD = 2 \angle BAD.$

পুনরায়, বৃত্তের BAD চাপের উপর দণ্ডায়মান প্রবৃদ্ধ $\angle BOD$ কেন্দ্রস্থ এবং $\angle BCD$ পরিধিস্থ।

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle BOD = 2 \angle BCD.$

$\therefore 2\angle BAD + 2\angle BCD = \angle BOD +$ প্রবৃদ্ধ $\angle BOD.$

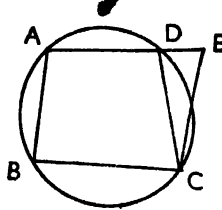
$\therefore 2(\angle BAD + \angle BCD) = 4$ সমকোণ।

$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ।

আবার, যেহেতু চতুর্ভুজের চারিটি কোণের সমষ্টি চারি সমকোণ;

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 2$ সমকোণ।

(ii) বিপরীতক্রমে, মনে কর, ABCD চতুর্ভুজের $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ অথবা $\angle BAD$ ও $\angle BCD$ পরস্পর সম্পূরক

প্রমাণ করিতে হইবে, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

প্রমাণ ঃ A, B ও C বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হইলে যদি উহা D বিন্দু দিয়া না যায়, তবে মনে কর, উহা যেন বর্ধিত AD-কে E বিন্দুতে ছেদ করে। EC সংযুক্ত কর।

এখন, যেহেতু ABCE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, সুতরাং $\angle ABC$ ও $\angle AEC$ পরস্পর সম্পূরক। আবার, দেওয়া আছে, $\angle ABC$ ও $\angle ADC$ পরস্পর সম্পূরক।

$\therefore$ $\angle ADC = \angle AEC$ অর্থাৎ DEC ত্রিভুজের বহিঃকোণ ADC = বিপরীত অন্তঃকোণ AEC ; কিন্তু ইহা অসম্ভব।

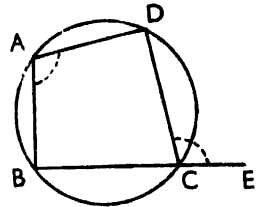
$\therefore$ A, B, C বিন্দু তিনটি দিয়া অঙ্কিত বৃত্ত D বিন্দু দিয়া অবশ্যই যাইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, তাহা চতুর্ভুজের বিপরীত অন্তঃকোণের সমান।

মনে কর, ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ এবং উহার BC বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত করায় DCE বহিঃকোণটি উৎপন্ন হইয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, $\angle DCE$ = বিপরীত অন্তঃকোণ BAD.

প্রমাণ ঃ ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া $\angle BAD + \angle BCD = 2$ সমকোণ।

আবার, BE রেখার উপর CD দণ্ডায়মান হওয়ায় $\angle BCD + \angle DCE = 2$ সমকোণ। $\therefore$ $\angle DCE = \angle BAD$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. কোন সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দুগুলি সমবৃত্ত হইলে সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র হইবে। [C. U. 1920]

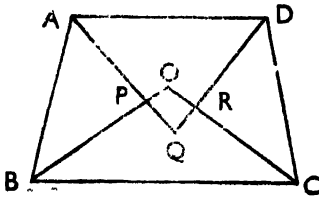
অনুসিদ্ধান্ত 3. কোন চতুর্ভুজের এক বাহু বর্ধিত করিলে যে বহিঃকোণ উৎপন্ন হয়, তাহা উহার বিপরীত অন্তঃকোণের সমান হইলে চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ হইবে।

অনুশীলনী 23

1. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। উহার $AC = BC$; $\angle ACB = 50^\circ$ এবং $\angle ABD = 40^\circ$ হইলে $\angle ACD$ ও $\angle DCA$ কত ডিগ্রী ?

2. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সমান্তরাল করিয়া অঙ্কিত সরলরেখা ত্রিভুজের সমান দুই বাহুকে ছেদ করিলে একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ উৎপন্ন হয়।

3. চতুর্ভুজের কোণগুলির অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ উৎপন্ন করে।

[**ইঙ্গিত :** ABCD চতুর্ভুজের অন্তর্দ্বিখণ্ডকগুলি দ্বারা OPQR চতুর্ভুজটি উৎপন্ন হইয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে যে, OPQR বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\triangle OBC$-এর $\angle O + \angle OBC + \angle OCB$ $= 2$ সমকোণ।

অর্থাৎ, $\angle O + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 2$ সমকোণ।

অনুরূপে. $\triangle QAD$-এর, $\angle Q + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle D = 2$ সমকোণ।

$\therefore$ $\angle O + \angle Q + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 4$ সমকোণ

বা, $\angle O + \angle Q + 2$ সমকোণ $= 4$ সমকোণ

($\because$ $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4$ সমকোণ)

বা, $\angle O + \angle Q = 2$ সমকোণ। $\therefore$ OPQR বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ]

4. ABC ত্রিভুজের $\angle B$ ও $\angle C$-এর অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় D এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, BCDE একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

5. ABC ত্রিভুজের BC ও AC বাহুর উপর যথাক্রমে AD ও BE লম্ব; প্রমাণ কর, $\angle ADE = \angle ABE$.

6. কোন বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত দুইটি বাহু সমান্তরাল হইলে অপর দুই বাহু পরস্পর সমান এবং চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পর সমান হইবে।

7. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। BE সরলরেখা $\angle ABC$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়া বৃত্তের পরিধির সহিত E বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে। প্রমাণ কর, DE সরলরেখা $\angle ADC$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক।

8. O-কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন বৃত্তে AB একটি ব্যাস। বৃত্তের CD জ্যা, AB-এর উপর লম্ব; বৃত্তের CX অপর একটি জ্যা AB-কে Y বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, O, X, Y ও D সমবৃত্ত।

9. ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দুগুলি যথাক্রমে D, E ও F. A হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু P হইলে প্রমাণ কর, D, P, E ও F একবৃত্তস্থ। [C. U. 1943]

দ্বিতীয় অধ্যায়

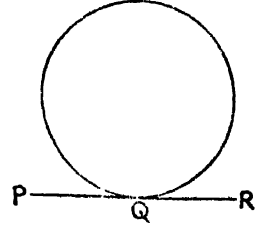
বৃত্তের স্পর্শক

(Tangent of a Circle)

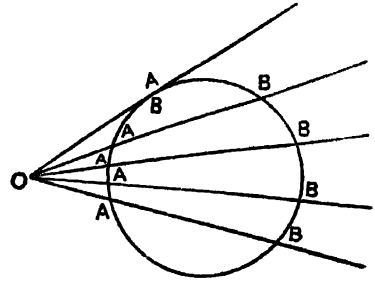
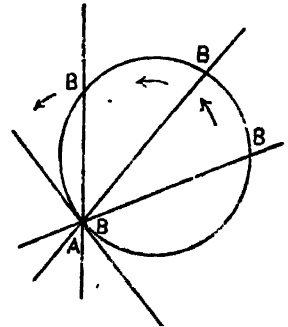
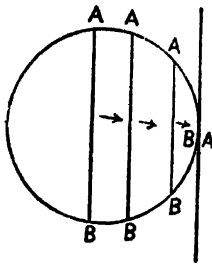
সংজ্ঞা : যে সরলরেখা বৃত্তের পরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাকে ঐ বৃত্তের **ছেদক** (Secant) বলে।

যে সরলরেখা বৃত্তের পরিধিকে একটিমাত্র বিন্দুতে **স্পর্শ** করিয়া যায় এবং বর্ধিত করিলেও যদি উহা বৃত্তের পরিধির সহিত মিলিত না হয়, তবে ঐ সরলরেখাকে বৃত্তের **স্পর্শক** (Tangent) বলে।

স্পর্শক বৃত্তের পরিধিকে যে বিন্দুতে স্পর্শ করে, তাহাকে **স্পর্শ বিন্দু** (Point of contact) বলে।

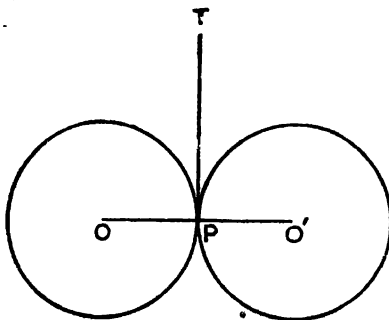
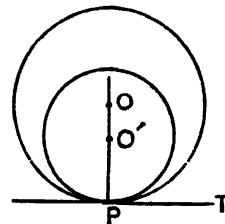
চিত্রে PQR সরলরেখা বৃত্তের স্পর্শক এবং Q বিন্দুটি স্পর্শবিন্দু।

দ্রষ্টব্য : স্পর্শবিন্দু ব্যতীত স্পর্শকের উপরিস্থ অন্য সকল বিন্দুই বৃত্তের বহিঃস্থ হইবে।

ছেদক ও স্পর্শকের সম্বন্ধ :

1. মনে কর, OAB একটি ছেদক কোন বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে ; সুতরাং, OAB বৃত্তটির একটি ছেদক। এখন, O বিন্দুতে স্থির রাখিয়া ছেদকটিকে বৃত্তটির চারিদিকে ঘুরাইতে থাকিলে A ও B বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব ক্রমশঃ বাড়িয়া শেষে কমিতে আরম্ভ করিবে এবং শেষ পর্যন্ত এই ছেদবিন্দু দুইটি একটি বিন্দুতে পরিণত হইবে। এই অবস্থানে OA অথবা OB ঐ বৃত্তের একটি স্পর্শক হইবে।

2. মনে কর, AB একটি ছেদক কোন বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। এই ছেদক ও বৃত্তের ছেদবিন্দু, A-কে স্থির রাখিয়া উহাকে বৃত্তটির চারিদিকে ঘুরাইতে থাকিলে A ও B বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব ক্রমশঃ বাড়িয়া শেষে কমিতে থাকিবে এবং শেষ পর্যন্ত এই ছেদবিন্দু দুইটি একটি বিন্দুতে পরিণত হইবে। এই অবস্থানে ছেদকটি ঐ বৃত্তের একটি স্পর্শক হইবে।

3. মনে কর, AB একটি ছেদক কোন বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে এখন যদি AB-কে সমান্তরালভাবে বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ক্রমশঃ দূরে সরাইয়া লওয়া যায়, তাহা হইলে A ও B ক্রমশঃ নিকটবর্তী হইতে থাকিবে এবং উহাকে এমন একটি স্থানে আনয়ন করা যাইবে, যেখানে A ও B পরস্পর মিলিত হইবে। এই অবস্থানে ছেদকটি বৃত্তের একটি স্পর্শক হইবে।

সুতরাং, উল্লিখিত তিনটি ক্ষেত্র হইতে দেখা যাইতেছে, কোন ছেদকের চরম অবস্থানে ছেদকটি স্পর্শকে পরিণত হয় এবং যে বিন্দুতে ছেদকটির দুইটি ছেদবিন্দু একটি বিন্দুতে পরিণত হয়, সেই বিন্দুটিই উক্ত স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু হইবে।

অন্তঃস্পর্শ ও বহিঃস্পর্শ :

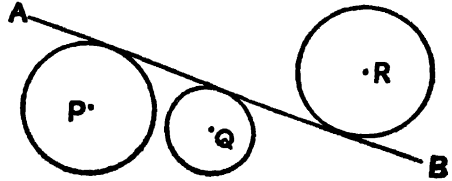
যখন দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করে, তখন বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুতে তাহাদের একটি **সাধারণ স্পর্শক** (Common tangent) অঙ্কন করা যায়।

চিত্র দুইটিতে PT, O এবং O′-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ স্পর্শক।

চিত্র 1 চিত্র 2

যখন বৃত্তদ্বয়ের একটি অপরটির বহির্ভাগে থাকিয়াও পরস্পরকে স্পর্শ করে, তখন ইহাকে **বহিঃস্পর্শ** (External contact) বলে। এইরূপ ক্ষেত্রে বৃত্তদ্বয় উহাদের সাধারণ স্পর্শকের বিপরীত দিকে থাকে (চিত্র 1)।

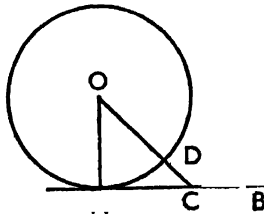
যখন বৃত্তদ্বয়ের একটি অপরটির মধ্যে অবস্থিত থাকিয়া পরস্পরকে স্পর্শ করে, তখন ইহাকে **অন্তঃস্পর্শ** (Internal contact) বলে। এইরূপ ক্ষেত্রে বৃত্তদ্বয় উহাদের সাধারণ স্পর্শকের একই দিকে থাকে (চিত্র 2)।

যে সরলরেখা একাধিক বৃত্তের প্রত্যেককে পরিধিতে একটিমাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করে তাহাকে বৃত্তগুলির **সাধারণ স্পর্শক** বলে।

বৃত্তগুলি যদি উহাদের সাধারণ স্পর্শকের একই দিকে অবস্থিত থাকে, তবে ঐ স্পর্শকটিকে বৃত্তগুলির **সরল সাধারণ স্পর্শক** (Direct common tangent) বলে এবং বৃত্তগুলি যদি উহাদের সাধারণ স্পর্শকের বিপরীত দিকে অবস্থিত থাকে, তবে ঐ স্পর্শকটিকে বৃত্তগুলির **তির্যক সাধারণ স্পর্শক** (Transverse common tangent) বলে।

চিত্রে AB সরলরেখা P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের সরল সাধারণ স্পর্শক এবং P ও R কেন্দ্রবিশিষ্ট অথবা Q ও R কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

উপপাদ্য 41

বৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ পরস্পরের উপর লম্ব।

(The tangent at any point of a circle and its radius through the point are perpendicular to one another.)

মনে কর, O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের A বিন্দুতে AB একটি স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী একটি ব্যাসার্ধ।

প্রমাণ করিতে হইবে, OA এবং AB পরস্পরের উপর লম্ব।

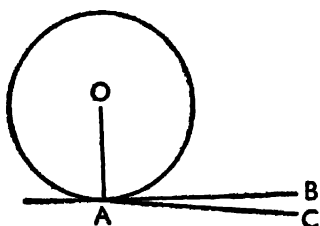
অঙ্কন : AB স্পর্শকের উপর যে-কোন একটি বিন্দু C লও এবং OC সংযুক্ত কর। মনে কর, OC বৃত্তের পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ ঃ OA = OD (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া); কিন্তু OD < OC ;

∴ OA < OC. এইরূপে দেখানো যায়, O কেন্দ্র হইতে AB স্পর্শক পর্যন্ত যতগুলি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়, তন্মধ্যে OA-ই ক্ষুদ্রতম।

∴ OA এবং AB পরস্পরের উপর লম্ব।

অনুসিদ্ধান্ত 1. বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে একাধিক স্পর্শক টানিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর, AB এবং AC উভয়েই O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের A বিন্দুতে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শক। OA সংযুক্ত কর।

এখন, AB এবং AC উভয়েই বৃত্তটির স্পর্শ-বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ OA-র উপর লম্ব।

∴ $\angle OAB = \angle OAC = 90°$; কিন্তু ইহা অসম্ভব।

∴ বৃত্তের পরিধিস্থ কোন বিন্দুতে একাধিক স্পর্শক থাকিতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত 2. স্পর্শবিন্দুতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুগামী।

অনুসিদ্ধান্ত 3. বৃত্তের কেন্দ্র হইতে স্পর্শকের উপর অঙ্কিত লম্ব স্পর্শবিন্দুগামী।

অনুসিদ্ধান্ত 4. স্পর্শবিন্দু ভিন্ন স্পর্শকের প্রত্যেক বিন্দু বৃত্তের বহিঃস্থিত।

অনুশীলনী 24

1. ব্যাসের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইতে অঙ্কিত লম্বদ্বয় বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক।

2. দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের কোন জ্যা ক্ষুদ্রতরটিকে স্পর্শ করিলে ঐ জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

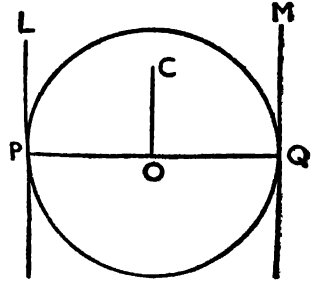
3. বৃত্তের কোন বিন্দু দিয়া অঙ্কিত স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যাগুলি উক্ত বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

4. কোন বৃত্তাংশস্থ কোণ অর্ধসমকোণ হইলে জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব হইবে।

5. কোন বিন্দু হইতে একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকগুলি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U. 1939]

6. কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদ্বয়-সংযোজক সরলরেখা বৃত্তটির একটি ব্যাস। [W. B. S. B. 1954]

[**ইঙ্গিত :** O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের PL ও QM স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে P ও Q. OC ∥ PL অঙ্কিত কর। OP ও OQ সংযুক্ত কর। ∵ OC ∥ PL, ∴ ∠LPO + ∠COP = 2 সমকোণ, কিন্তু ∠LPO = 1 সমকোণ; ∴ ∠COP = 1 সমকোণ।

অনুরূপভাবে, ∠COQ = 1 সমকোণ; ∴ POQ একটি সরলরেখা অর্থাৎ PQ বৃত্তটির একটি ব্যাস।]

7. যে কোন বৃত্তের কোন একটি স্পর্শকের সমান্তরাল জ্যাগুলি স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

8. AB কোন একটি বৃত্তের ব্যাস; A বিন্দুতে অঙ্কিত বৃত্তটির স্পর্শক হইতে AB-এর সমান করিয়া AC অংশ কাটিয়া লওয়া হইল। BC-কে যুক্ত করিলে উহা যদি বৃত্তটিকে D বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, (i) BC, D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত এবং (ii) AD = $\frac{1}{2}$ BC.

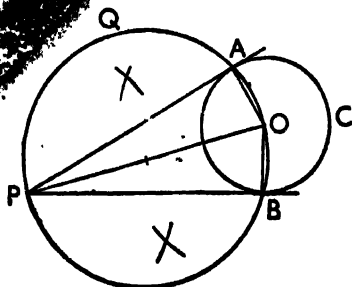
[**ইঙ্গিত :** চিত্র নিজে আঁকিয়া লও। AD সংযুক্ত কর। অর্ধবৃত্তস্থ ∠ADB = 1 সমকোণ। ∴ ∠ADC = 1 সমকোণ। ∵ AB = AC, ∴ ∠ABC = ∠ACB. এখন, △ADB = △ADC ; ∴ CD = BD অর্থাৎ, D, BC-এর মধ্যবিন্দু। ∠BAC = 1 সমকোণ বলিয়া, ∠CAD = ∠ABC = ∠ACB ; ∴ AD = CD = $\frac{1}{2}$ BC.]

9. যদি একটি বৃত্তের পরিধি তিন বিন্দুতে তিনটি সমান চাপে বিভক্ত হয়, তাহা হইলে ঐ তিন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক-ত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করিবে।

10. O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের AB একটি জ্যা এবং AR একটি স্পর্শক। প্রমাণ কর যে, ∠AOB = 2 ∠RAB.

উপপাদ্য 42

বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে কেবলমাত্র দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

(Only two tangents can be drawn to a circle from an external point.)

মনে কর, ABC একটি বৃত্ত ; O ইহার কেন্দ্র এবং P বহিঃস্থ কোন বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P বিন্দু হইতে ABC বৃত্তে মাত্র দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করা যায়।

অঙ্কন : PO সংযুক্ত কর। PO-কে ব্যাস ধরিয়া PQO একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। P বিন্দু বৃত্তের বহিঃস্থ এবং O বিন্দু অন্তঃস্থ বলিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি ABC বৃত্তকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে।

মনে কর, A ও B দুইটি ছেদবিন্দু। OA, OB, PA ও PB যুক্ত কর।

প্রমাণ : PQO বৃত্তে $\angle PAO$ এবং $\angle PBO$ অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া, উহারা এক সমকোণের সমান।

$\therefore$ PA ও PB যথাক্রমে OA এবং OB ব্যাসার্ধদ্বয়ের উপর লম্ব।

$\therefore$ PA ও PB যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক।

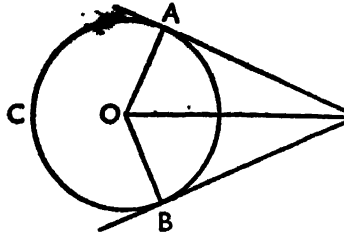
যেহেতু দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না ; অতএব, P হইতে ABC বৃত্তে মাত্র ঐ দুইটি স্পর্শকই অঙ্কিত করা যায়।

অনুসিদ্ধান্ত : বৃত্তের অন্তঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে কোন স্পর্শক অঙ্কন করা যায় না।

দ্রষ্টব্য : বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুদ্বয়-সংযোজক জ্যাকে ঐ বিন্দুর **স্পর্শ-জ্যা** (Chord of contact) বলে। উপরের চিত্রে AB সংযুক্ত করিলে, উহা স্পর্শ-জ্যা হইবে।

উপপাদ্য 43

বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন স্পর্শক পরস্পর সমান এবং বৃত্তের কেন্দ্রে উহাদের সম্মুখ কোণ দুইটি সম

(The two tangents drawn to an external point are equal and they subtend equal angles re.)

মনে কর. ABC একটি O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত এবং উহার বহিঃস্থ একটি বিন্দু P BC বৃত্তে PA ও PB দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত হইয়াছে।

OA, OB এবং OP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ করিতে হইবে, AP = BP এবং ∠AOP = ∠BOP.

প্রমাণ : যেহেতু AP ও BP বৃত্তটির স্পর্শক, এবং OA, OB দুইটি স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ; সুতরাং, ∠OAP = ∠OBP = 90° এবং △AOP ও △BOP দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ।

এখন, AOP এবং BOP সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

OA = OB (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)

এবং অতিভুজ OP সাধারণ ;

∴ △AOP ≡ △BOP.

∴ AP = BP এবং ∠AOP = ∠BOP.

অনুসিদ্ধান্ত : বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শক দুইটি উক্ত বিন্দুগত ব্যাসের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

অনুশীলনী 25

1. যে সকল বৃত্ত দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে, তাহাদের কেন্দ্রগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

2. কোন বৃত্তে একটি চতুর্ভুজ পরিলিখিত হইলে, উহার দুইটি বিপরীত বাহুর সমষ্টি অপর দুইটির সমষ্টির সমান। [C. U. 1931]

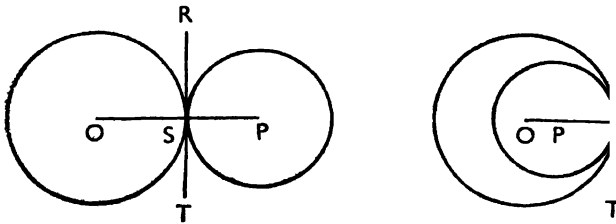
3. বৃত্তে পরিলিখিত সামান্তরিকটি একটি রম্বস।

4 কোন বৃত্তের দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক অপর যে-কোন স্পর্শকের যে অংশে ছেদ করে, সেই অংশ বৃত্তের কেন্দ্রে একটি সমকোণ উৎপন্ন করে। [D. B. 1929]

5. কোন বৃত্তে পরিলিখিত চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি বিপরীত বাহু বৃত্তটির কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

উপপাদ্য 43

দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিলে, উহাদের স্পর্শবিন্দু, কেন্দ্রদ্বয়-সংযোজক সরলরেখায় অবস্থান করে।

(If two circles touch, the point of contact lies in the straight line through the centres.)

মনে কর, O এবং P-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে S বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

প্রমাণ করিতে হইবে, O, P এবং S একই সরলরেখায় অবস্থিত।

অঙ্কন : OS এবং PS সংযুক্ত কর।

বৃত্ত দুইটি S বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে ; সুতরাং S বিন্দুতে উহাদের একটি সাধারণ স্পর্শক আছে। মনে কর, RST উহাদের সাধারণ স্পর্শক।

প্রমাণ : OS এবং PS স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ হওয়ায়, $\angle RSO = \angle RSP = 90°$.

$\therefore$ OS এবং PS একই সরলরেখায় অবস্থিত ; অর্থাৎ O, P এবং S বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

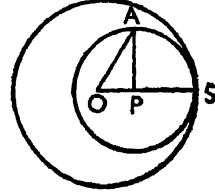
অনুসিদ্ধান্ত 1. দুইটি অসমান বৃত্ত অন্তঃস্পর্শ করিলে ক্ষুদ্রতর বৃত্তের স্পর্শবিন্দু ভিন্ন অপর সকল বিন্দুই বৃহত্তর বৃত্তটির মধ্যে অবস্থান করিবে।

মনে কর, O এবং P-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় S বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে ;

সুতরাং O, P এবং S একরেখীয় এবং OS > PS.

ক্ষুদ্রতর ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের উপর A একটি বিন্দু লও। AP এবং AO যুক্ত কর।

এখন, OAP ত্রিভুজে OP + AP > OA

∴ OP + PS বা, OS > OA (AP এবং PS একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া)।

∴ বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাসার্ধ > বৃহত্তর বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধিতে যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব। ∴ A বিন্দু বৃহত্তর বৃত্তের মধ্যস্থ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 2. দুইটি বৃত্ত বাহঃস্পর্শ করিলে স্পর্শবিন্দু ভিন্ন একটি বৃত্তের বিন্দুসমূহ অপরটির বহিঃস্থ হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 3. দুইটি বৃত্ত বহিঃস্পর্শ বা অন্তঃস্পর্শ করিলে উহাদের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব যথাক্রমে উহাদের ব্যাসার্ধদ্বয়ের সমষ্টি বা অন্তরের সমান হইবে।

অনুশীলনী 26

1. একাধিক বৃত্ত পরস্পরকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করিলে ঐ সকল বৃত্তের কেন্দ্রগুলি একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকিবে।

2. A ও B-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে। উহাদের স্পর্শবিন্দু হইতে অঙ্কিত একটি সরলরেখা বৃত্তদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর, AP ও BQ ব্যাসার্ধদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল।

3. দুইটি বৃত্ত A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করিয়াছে। একটি সরলরেখা উভয় বৃত্তকে B ও C বিন্দুতে স্পর্শ করিলে, প্রমাণ কর ∠BAC একটি সমকোণ।

[W. B. S. B. 1955]

4. দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে। পরস্পর সমান্তরাল করিয়া উভয় বৃত্তে একটি করিয়া ব্যাস অঙ্কিত হইল। প্রমাণ কর, বৃত্তদ্বয় অন্তঃস্পর্শ বা বহিঃস্পর্শ করিলে ব্যাসদ্বয়ের একই দিকে বা বিপরীত দিকে অবস্থিত প্রান্তবিন্দুদ্বয় ও উভয় বৃত্তের স্পর্শবিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থান করিবে।

অনুশীলনী 27

(বিবিধ অনুশীলনী)

1. দুইটি বৃত্তের সাধারণ জ্যা যদি কেন্দ্রদ্বয়ে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে বৃত্ত দুইটি পরস্পর সমান।

2. যে সকল সমান বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অতিক্রম করে, তাহাদের কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর অবস্থিত।

3. কোন বৃত্তের OA ও OB ব্যাসার্ধদ্বয় পরস্পর লম্বভাবে অবস্থিত এবং AX ও BY দুইটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ কর যে, BX এবং AY পরস্পরের সহিত সমকোণ উৎপন্ন করে।

4. ABC ত্রিভুজের কোণগুলির সমদ্বিখণ্ডকত্রয় ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে X, Y ও Z বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, XYZ ত্রিভুজের কোণগুলি যথাক্রমে

$$90^\circ-\frac{A}{2},\ 90^\circ-\frac{B}{2},\ 90^\circ-\frac{C}{2}.$$

5. O-কেন্দ্রীয় একটি বৃত্তের BC একটি নির্দিষ্ট চাপ। A উহার উপর যে-কোন একটি বিন্দু। OB ও OC-এর উপর যথাক্রমে AD এবং AE লম্ব। প্রমাণ কর যে, A বিন্দুর সর্ব অবস্থানে DE-র দৈর্ঘ্য সমান থাকিবে।

6. বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে একটি বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কিত করিলে ঐ বিন্দু ও কেন্দ্র-সংযোজক সরলরেখাটি স্পর্শ-জ্যাকে সমকোণে ছেদ করে।

7. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমভাবে ছেদ করিলে, ঐ ছেদবিন্দু দিয়া উহার এক বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব বিপরীত বাহুকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

8. একটি সামান্তরিক বৃত্তস্থ হইলে, উহার কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু, বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

9. AB কোন বৃত্তের ব্যাস এবং PQ জ্যা-এর উপর AD লম্ব। দেখাও যে, $\angle PAD = \angle QAB$.

10. কোন চতুর্ভুজের যে কোন দুইটি সন্নিহিত বাহুকে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা অপর বাহুদ্বয়কে ব্যাস ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা-এর সমান্তরাল হইবে।

11. দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করিয়াছে। যদি ক্ষুদ্রতর বৃত্তটি বৃহত্তর বৃত্তটির কেন্দ্র দিয়া গমন করে, তবে প্রমাণ কর যে, স্পর্শবিন্দু হইতে বৃহত্তর বৃত্তে অঙ্কিত জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তদ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

12. AB ও AC একটি বৃত্তের দুইটি নির্দিষ্ট স্পর্শক। ABC ত্রিভুজের বাহির বৃত্তের পরিধিতে D যে-কোন বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\angle ABD + \angle ACD =$ একটি ধ্রুবক।

13. কোন বৃত্তের AB একটি ব্যাস এবং B বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শককে AP ও AQ জ্যা-দ্বয় যথাক্রমে R ও S বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, RPS ও RQS কোণ-দ্বয় পরস্পর সমান।

14. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। বর্ধিত AB ও DC বাহুদ্বয় P বিন্দুতে এবং বর্ধিত AD ও BC বাহুদ্বয় Q বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, APC ও AQC কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় পরস্পর লম্ব।

15. A ও B-কেন্দ্রীয় বৃত্ত দুইটি পরস্পর বহিঃস্পর্শ করিয়াছে এবং PQ উহাদের সাধারণ সরল স্পর্শক। প্রমাণ কর যে, PQ, AB-কে ব্যাস করিয়া অঙ্কিত বৃত্তটির স্পর্শক।

16. দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার প্রত্যেকটিকে স্পর্শকারী বৃত্তের কেন্দ্রের সঞ্চার-পথ নির্ণয় কর।

17. কোন বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে বৃত্তটিতে দুইটি স্পর্শক টানিলে, উহারা যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহা স্পর্শ বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখাও স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের যে কোন একটি হইতে অঙ্কিত ব্যাসের অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হইবে।

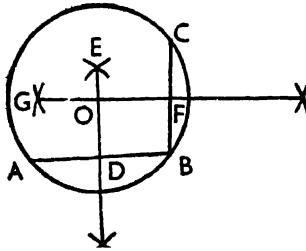
18. ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের AB ও CD বিপরীত বাহুদ্বয় বর্ধিত হইয়া P বিন্দুতে এবং BC ও DA বর্ধিত হইয়া Q বিন্দুতে মিলিত হইল। প্রমাণ কর যে, PBC ও QAB ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিলে P, O, Q বিন্দুত্রয় একরেখীয় হইবে।

তৃতীয় অধ্যায়

সম্পাদ্য প্রতিজ্ঞা

সম্পাদ্য 29

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

(To find out the centre of a given circle.)

মনে কর, ABC একটি বৃত্ত; ইহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে।

অঙ্কন : ABC বৃত্তের AB ও BC, দুইটি অসমান্তরাল জ্যা অঙ্কন কর।

AB জ্যা-এর সমদ্বিখণ্ডক লম্ব DE এবং BC জ্যা-এর সমদ্বিখণ্ডক লম্ব FG অঙ্কন র। মনে কর, উহারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করিল।

O বিন্দুই ABC বৃত্তের কেন্দ্র।

প্রমাণ : DE, AB জ্যা-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক; সুতরাং DE রেখার প্রত্যেক বিন্দু ও B হইতে সমদূরবর্তী।

আবার, FG, BC জ্যা-এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক; সুতরাং FG রেখার প্রত্যেক বিন্দু ও C হইতে সমদূরবর্তী।

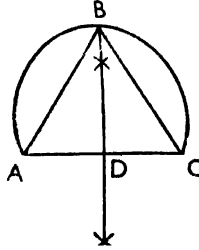
O বিন্দু, DE এবং FG-এর সাধারণ বিন্দু। সুতরাং O বিন্দু A, B ও C বিন্দু ইতে সমদূরবর্তী।

∴ O বিন্দু, ABC বৃত্তের কেন্দ্র।

মন্তব্য : কোন নির্দিষ্ট চাপের কেন্দ্রও এই প্রকারে নির্ণয় করিতে হয়

সম্পাদ্য 30

কোন নির্দিষ্ট চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে

(To bisect a given arc.)

মনে কর, ABC একটি নির্দিষ্ট চাপ ; ইহাকে সমদ্বিখণ্ডিত করিতে হইবে।

অঙ্কন : AC সংযুক্ত কর এবং AC রেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক BD অঙ্কন কর। মনে কর, BD, ABC চাপের সহিত B বিন্দুতে মিলিত হয়। ABC চাপটি B বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে।

প্রমাণ : AB, BC সংযুক্ত কর।

BD রেখা AC-এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক বলিয়া BD রেখার প্রত্যেক বিন্দু A ও C হইতে সমদূরবর্তী। ∴ AB = BC.

সুতরাং, দুই সমান জ্যা AB ও BC দ্বারা ছিন্ন হইয়াছে বলিয়া AB চাপ = BC চাপ।

∴ ABC চাপ B বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে।

নানাবিধ বৃত্তাঙ্কন

বৃত্তাঙ্কনের মূলসূত্র :

1. কোন বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইলে, (i) বৃত্তটির কেন্দ্রের অবস্থান এবং (ii) বৃত্তটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য জ্ঞাত হওয়া প্রয়োজন।

দুইটি কেন্দ্রগামী সঞ্চারপথের ছেদবিন্দুই বৃত্তটির কেন্দ্র ; সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্রের অবস্থান জানিতে হইলে প্রদত্ত সর্তানুসারে কেন্দ্রগামী দুইটি সঞ্চারপথ নির্ণয়ের প্রয়োজন।

বৃত্তের কেন্দ্রের অবস্থান এবং পরিধিস্থ যে-কোন একটি বিন্দুর অবস্থান জ্ঞাত হইলেই, বৃত্তটির ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্য নির্ণয় করা যায়।

2. বৃত্তাঙ্কন সুচারুরূপে সম্পন্ন করিতে হইলে নিম্নলিখিত সঞ্চারপথগুলি সম্পর্কে সম্যক ধারণা থাকা প্রয়োজন :—

(*a*) দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ।

সঞ্চারপথ : বিন্দু দুইটির সংযোজক-সরলরেখার মধ্যবিন্দুতে অঙ্কিত লম্ব।

(*b*) কোন নির্দিষ্ট সরলরেখার নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, এমন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ।

সঞ্চারপথ : নির্দিষ্ট বিন্দুটি দিয়া সরলরেখার উপর অঙ্কিত লম্ব।

(*c*) কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে, এমন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ।

সঞ্চারপথ : নির্দিষ্ট বৃত্তের নির্দিষ্ট বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ বা বর্ধিত ব্যাসার্ধের অংশ।

(*d*) কোন নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করে, এমন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ।

সঞ্চারপথ : নির্দিষ্ট সরলরেখা হইতে নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের দৈর্ঘ্যের সমান দূরবিশিষ্ট দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা।

(*e*) দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখাকে স্পর্শ করে, এমন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ।

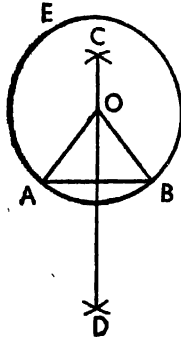
সঞ্চারপথ : উক্ত পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখাদ্বয়ের অন্তর্ভূত কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও বহির্দ্বিখণ্ডক।

(*f*) কোন নির্দিষ্ট ব্যসার্ধবিশিষ্ট এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে, এমন বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুর সঞ্চারপথ।

সঞ্চারপথ : নির্দিষ্ট বৃত্তটির এককেন্দ্রীয় একটি বৃত্ত। শেষোক্ত বৃত্তটির ব্যাসার্ধ, প্রথমোক্ত ব্যাসার্ধ ও নির্দিষ্ট বৃত্তটির ব্যাসার্ধের সমষ্টি বা অন্তরের সমান।

সম্পাদ্য 31

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং একটি নির্দিষ্ট রেখার সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে।

(To construct a circle with a given radius to pass through two given points.)

মনে কর, A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং m নির্দিষ্ট রেখা। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে, যাহা A ও B বিন্দু দিয়া যাইবে এবং যাহার ব্যাসার্ধ m-এর সমান।

অঙ্কন ঃ AB সংযুক্ত কর এবং AB-এর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক CD অঙ্কন কর। এখন, A-কে কেন্দ্র করিয়া m-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। মনে কর, চাপটি CD-কে O বিন্দুতে ছেদ করে। O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OA বা OB ব্যাসার্ধ লইয়া AEB বৃত্তটি অঙ্কন কর। AEB অভীষ্ট বৃত্ত।

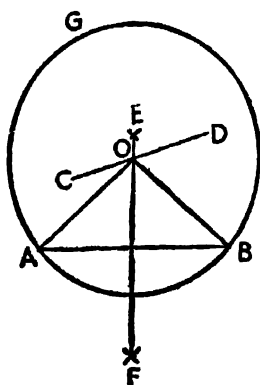
প্রমাণ ঃ AB রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক CD ; সুতরাং CD রেখার প্রত্যেক বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী। ∴ $OA = OB \equiv m$.

অধিকন্তু, AEB বৃত্ত নির্দিষ্ট A ও B বিন্দু দিয়া গিয়াছে।

মন্তব্য ঃ নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ যদি নির্দিষ্ট বৃত্তদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার অর্ধেক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে বৃত্তাঙ্কন সম্ভব হইবে না।

সম্পাদ্য 32

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে যাহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থান করিবে।

(To construct a circle passing through two given points and having its centre on a given straight line.)

মনে কর, A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং CD একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে, যাহা A ও B বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে এবং যাহার কেন্দ্র CD সরলরেখায় অবস্থান করিবে।

অঙ্কন : AB সংযুক্ত কর এবং AB-এর উপর লম্ব-সমদ্বিখণ্ডক EF অঙ্কন কর। মনে কর, EF রেখা, CD-কে O বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, O-কে কেন্দ্র করিয়া OA র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া ABG বৃত্তটি অঙ্কন কর। ABG অভীষ্ট বৃত্ত।

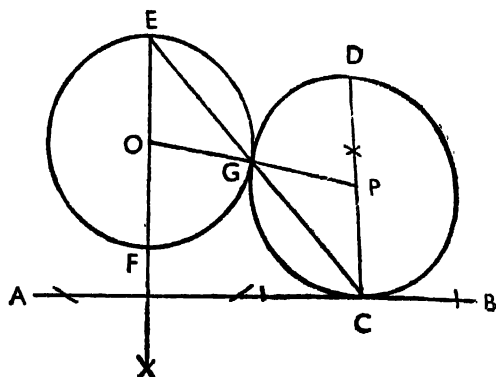
প্রমাণ : EF, AB-রেখার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক, সুতরাং EF রেখার প্রত্যেক বিন্দু A ও B হইতে সমদূরবর্তী। ∴ OA = OB.

∴ O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া, OA-র সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্ত AGB A ও B বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে; অধিকন্তু AGB বৃত্তের কেন্দ্র O, CD রেখায় অবস্থিত।

মন্তব্য : নির্দিষ্ট সরলরেখাটি যদি নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দুর সংযোজক সরলরেখার উপর লম্ব হয়, তবে বৃত্তাঙ্কন সম্ভব হইবে না।

সম্পাদ্য 33

এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে, যাহা কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার এক নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

(To construct a circle to touch a given circle and a given straight line at a given point.)

মনে কর, O নির্দিষ্ট বৃত্তটির কেন্দ্র এবং নির্দিষ্ট AB সরলরেখার উপর C একটি নির্দিষ্ট বিন্দু।

এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে, যাহা O-কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে এবং AB সরল-রেখাকে C বিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

অঙ্কন : C বিন্দু দিয়া AB সরলরেখার উপর CD লম্ব অঙ্কন কর। O বিন্দু হইতে AB (বা, বর্ধিত AB)-এর উপর লম্ব অঙ্কন কর। মনে কর, এই লম্ব বৃত্তটিকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। CE সংযুক্ত কর। মনে কর, CE বৃত্তটিকে G বিন্দুতে ছেদ করে। OG সংযুক্ত কর এবং উহাকে বর্ধিত করিলে বর্ধিত OG যেন CD-কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন P-কে কেন্দ্র করিয়া এবং PC ব্যাসার্ধ লইয়া CDG একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে উহা অভীষ্ট বৃত্ত হইবে।

প্রমাণ : PC ব্যাসার্ধ AB-এর উপর C বিন্দুতে লম্ব ; সুতরাং CDG বৃত্ত AB-কে C বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

আবার, $\angle OGE$ = বিপ্রতীপ $\angle CGP$ এবং $\angle OEG$ = একান্তর $\angle PCG$ ($\because$ EF $\parallel$ CD এবং EC উহাদের ছেদক)। কিন্তু OE = OG (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলিয়া);

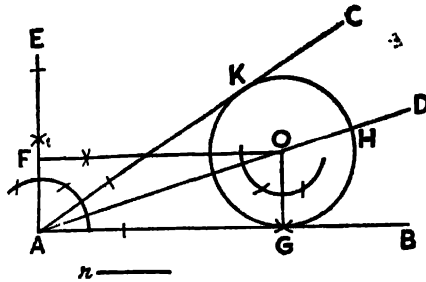
$\angle OEG = \angle OGE$

$\therefore$ $\angle PCG = \angle CGP$; অর্থাৎ $PC = PG$.

মন্তব্য : EG-এর পরিবর্তে FG সংযুক্ত করিয়া পূর্ববৎ অঙ্কনাদি করিলেও অভীষ্ট বৃত্তটি পাওয়া যাইবে।

সম্পাদ্য 34

নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সমান্তরাল রেখাকে স্পর্শ করে।

(To draw a circle of given radius touching two intersecting straight lines.)

মনে কর, AB ও AC দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা, A উহাদের ছেদবিন্দু এবং নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ r। r-ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে, যাহা AB ও AC-কে স্পর্শ করে।

অঙ্কন : $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডক AD এবং AB রেখার A বিন্দুতে AE লম্ব অঙ্কন কর। AE হইতে r-এর সমান করিয়া AF অংশ কাটিয়া লও এবং F বিন্দুতে AE রেখার উপর FO লম্ব অঙ্কন কর। FO যেন AD-কে O বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং FA অর্থাৎ r ব্যাসার্ধ লইয়া GHK বৃত্তটি অঙ্কন কর। GHK অভীষ্ট বৃত্ত।

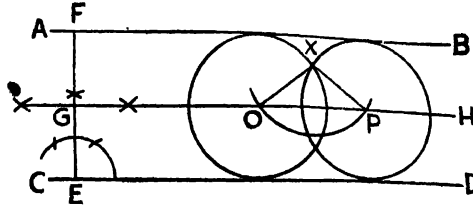
প্রমাণ : AB রেখার উপর O বিন্দু হইতে OG লম্বটি অঙ্কন কর।

এখন, AGOF একটি আয়তক্ষেত্র ; $\therefore$ $OG = AF = r$. আবার, OG, AB-এর উপর লম্ব এবং O, $\angle BAC$-এর সমদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ GHK বৃত্ত AB ও AC-কে স্পর্শ করিবে।

সম্পাদ্য 35

এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে, যাহা একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে এবং দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল রেখাকে স্পর্শ করিবে।

(To draw a circle passing through a given point and touching two given parallel straight lines.)

মনে কর, X একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং AB ও CD দুইটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল সরলরেখা। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে যাহা AB ও CD-কে স্পর্শ করিবে এবং X বিন্দুর মধ্য দিয়া যাইবে।

অঙ্কন : CD-এর উপর যে-কোন একটি বিন্দু E হইতে উহার উপর EF লম্ব অঙ্কন কর। EF যেন AB-কে F বিন্দুতে ছেদ করে। EF-এর উপর GH লম্ব সমদ্বিখণ্ডকটি অঙ্কন কর। এখন, X-কে কেন্দ্র করিয়া এবং EG বা FG-কে ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন কর। চাপটি যেন GH-কে O এবং P বিন্দুতে ছেদ করে। এইবার O এবং P-কে কেন্দ্র করিয়া এবং OX বা PX ব্যাসার্ধ লইয়া দুইটি বৃত্ত অঙ্কন কর। বৃত্তদ্বয়ের প্রত্যেকে অভীষ্ট বৃত্ত।

প্রমাণ : BF, GH এবং ED, প্রত্যেকে EF-এর উপর লম্ব ; সুতরাং উহারা পরস্পর সমান্তরাল। আবার FG=EG ; সুতরাং GH রেখার প্রত্যেক বিন্দু AB ও CD হইতে সমদূরবর্তী। সুতরাং, AB ও CD রেখাদ্বয়কে স্পর্শ করিবে, এইরূপ বৃত্তগুলির কেন্দ্রের সঞ্চারপথ GH ; আবার, OX=PX=EG=FG.

সুতরাং O বা P-কে কেন্দ্র করিয়া OX বা PX ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্ত অঙ্কন করিলে ঐ বৃত্ত AB ও CD-কে স্পর্শ করিবে।

মন্তব্য : নির্দিষ্ট বিন্দুটি নির্দিষ্ট সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের বাহিরে থাকিলে বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব হইবে না।

অনুশীলনী 28

1. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং সরলরেখাটির বহিঃস্থ কোন বিন্দুগামী হইবে।

2. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করিবে এবং ঐ বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দুগামী হইবে।

3. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং উহাদের সংযোজক সরলরেখার সমান্তরাল একটি নির্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করিবে।

4. একটি সরলরেখা হইতে 3·5 সে. মি. দূরে একটি নির্দিষ্ট বিন্দু P অবস্থিত। 2·4 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত অঙ্কন কর যাহারা P বিন্দু দিয়া যাইবে এবং রেখাটিকে স্পর্শ করিবে।

5. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় অবস্থিত যে-কোন একটি বিন্দু, যাহা ঐ সরলরেখার অন্তর্গত যে-কোন একটি বিন্দুগামী এবং একটি নির্দিষ্ট বিন্দুকে স্পর্শ করে।

6. কোন নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধের এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করিতে হইবে, যাহার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখায় থাকিবে এবং যাহা অপর একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে।

7. এমন একটি নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা কোন নির্দিষ্ট সরলরেখা ও নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

8. নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা কোন নির্দিষ্ট বিন্দুগামী হইবে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে স্পর্শ করিবে।

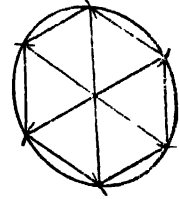
9. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর, যাহা দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

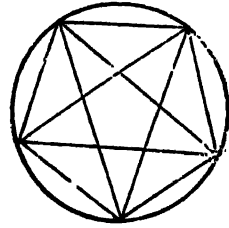
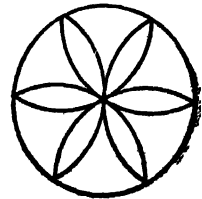
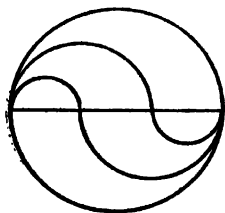
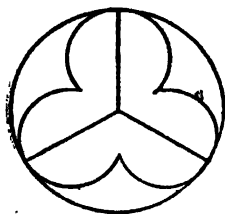
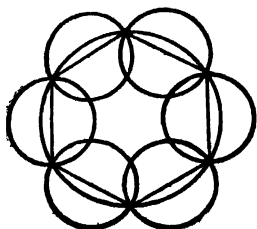
চতুর্থ অধ্যায়

জ্যামিতিক চিত্রের সাহায্যে নানাবিধ নক্সা অঙ্কন

(Construction of different designs by Geometric Figures)

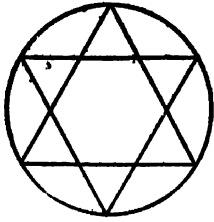
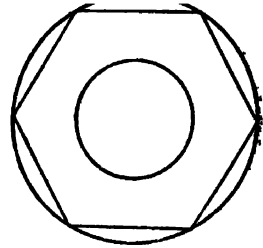
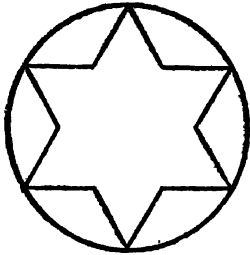
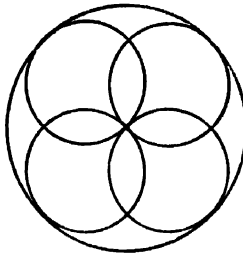
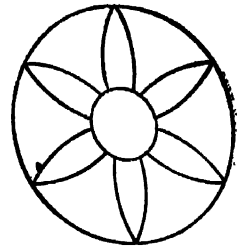
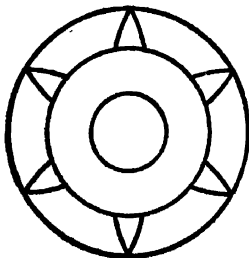
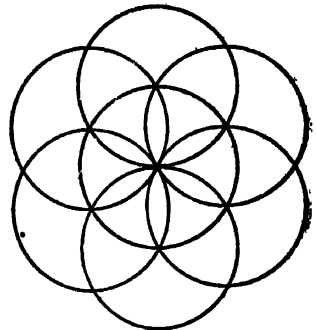
তোমরা রেখা, ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, প্রভৃতি অঙ্কন করিতে শিখিয়াছ। ইহাদের সাহায্যে তোমরা এখন সহজেই নানাবিধ ডিজাইন অঙ্কন করিতে পারিবে। নানাপ্রকার আল্পনা, শাড়ীর পাড়ের ডিজাইন, স্থাপত্যশিল্প ইত্যাদিতে এই সকল জ্যামিতিক চিত্রাঙ্কনের সাহায্য লওয়া হয়।

নমুনা 1. যে-কোন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। এখন, পরিধির যে-কোন এক বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বৃত্তটির ব্যাসার্ধের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া একটি চাপ অঙ্কন কর। এই চাপ যে বিন্দুতে পরিধিকে ছেদ করিবে, সেই বিন্দুটিকে কেন্দ্র করিয়া অনুরূপ ব্যাসার্ধ লইয়া পুনরায় একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। এই প্রকারে পর পর কয়েকটি চাপ অঙ্কন করিলে বৃত্তটির পরিধি 6-টি সমান অংশে বিভক্ত হইবে।

এই বিভাগ-বিন্দুগুলিকে পর পর যুক্ত করিয়া এবং প্রতিটি বিভাগ-বিন্দুর সহিত বৃত্তের কেন্দ্র যুক্ত করিয়া চিত্রাঙ্কিত নক্সাটি পাওয়া যাইবে।

নমুনা 2. যে কোন ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। এখন, বৃত্তের পরিধিটিকে পাঁচটি সমান অংশে বিভক্ত কর। বিভাগ-বিন্দুগুলির যে-কোন দুইটিকে পরস্পর যুক্ত করিলে চিত্রাঙ্কিত নক্সাটি পাওয়া যাইবে।

নমুনা 3. যে-কোন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন কর। অঙ্কিত বৃত্তের পরিধিস্থ যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া একই ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। চাপটি বৃত্তের পরিধিকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করিবে, সেই দুইটি বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া পুনরায় দুইটি বৃত্তচাপ অঙ্কন কর। এইরূপে প্রতি ছেদবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া প্রতিক্ষেত্রে একই ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তচাপ অঙ্কন করিতে থাকিলে চিত্রাঙ্কিত নক্সাটি পাওয়া যাইবে।

নমুনা 4. একটি সরলরেখা অঙ্কন করিয়া উহাকে সমান 3 অংশে বিভক্ত কর। এখন প্রথম বিভাগ-বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া বিপরীত পার্শ্বে অপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর। এইবার প্রথম বিভক্ত অংশের উপর একটি অর্ধবৃত্ত, প্রথমে অঙ্কিত অর্ধবৃত্তটি যে দিকে আছে সেইদিকে অঙ্কন কর এবং অনুরূপভাবে তৃতীয় বিভক্ত অংশের উপর, শেষোক্ত অর্ধবৃত্তটির বিপরীত দিকে অপর একটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন কর। সরলরেখাটিকে ব্যাস করিয়া এইবার একটি বৃত্ত অঙ্কন করিলে এবং সরলরেখাটি মুছিয়া দিলে চিত্রাঙ্কিত নক্সাটি অঙ্কিত হইবে।

নমুনা 5. যে-কোন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করিয়া উহার পরিধিকে সমান 6 অংশে বিভক্ত কর এবং এই বিভাগ-বিন্দুগুলির একটিকে বাদ দিয়া অপরটির সহিত বৃত্তের কেন্দ্র সংযুক্ত কর। তিনটি ব্যাসার্ধ পাওয়া গেল। এই তিনটি ব্যাসার্ধের মধ্যবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া তিনটি বৃত্ত-চাপ অঙ্কন করিলে চিত্রাঙ্কিত নক্সাটি অঙ্কিত হইবে।

নমুনা 6. যে-কোন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি বৃত্ত অঙ্কন করিয়া উহার পরিধিকে সমান 6 অংশে বিভক্ত কর এবং পাশাপাশি অবস্থিত বিভাগ-বিন্দুগুলি সংযুক্ত কর। এই প্রকারে যে 6-টি সরলরেখা পাওয়া গেল তাহাদের প্রত্যেকটিকে ব্যাস ধরিয়া 6-টি বৃত্ত অঙ্কন করিলে চিত্রাঙ্কিত নক্সাটি অঙ্কিত হইবে।

নিম্নলিখিত চিত্রগুলির অঙ্কন পদ্ধতি স্থির কর ও অনুরূপ চিত্র অঙ্কন কর :—

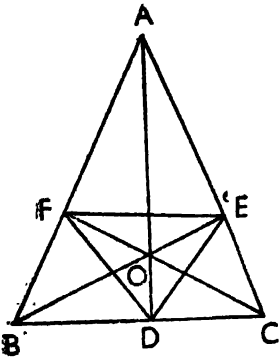
চিত্র 1 চিত্র 2

চিত্র 3 চিত্র 4 চিত্র 5

চিত্র 6 চিত্র 7

*অতিরিক্ত প্রতিজ্ঞা

আমরা জানি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় সমবিন্দু [114 পৃষ্ঠায় উদা. 3 দ্রষ্টব্য]। লম্বত্রয় যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে ত্রিভুজের **লম্ববিন্দু** (Ortho centre) বলে। এই লম্বত্রয়ের পাদ বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিয়া যে ত্রিভুজ পাওয়া যায় তাহাকে **পাদ-ত্রিভুজ** (Pedal-triangle) বলে।

প্রতিজ্ঞা 1.

সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় পাদ-ত্রিভুজের কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের A, B ও C শীর্ষ বিন্দুগুলি হইতে বিপরীত বাহুগুলির উপর অঙ্কিত লম্বত্রয় AD, BE ও CF O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। DEF পাদ-ত্রিভুজ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, AD, BE ও CF যথাক্রমে $\angle FDE$, $\angle DEF$ ও $\angle EFD$ কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ : $\because$ $\angle OFB$ ও $\angle ODB$ প্রত্যেকে 1 সমকোণের সমান ; $\therefore$ BDOF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ $\angle ODF = \angle OBF$ (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া)।

অনুরূপভাবে, $\because$ $\angle CFB = \angle BEC = 1$ সমকোণ ; $\therefore$ BCEF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

সুতরাং, $\angle EBF = \angle ECF$, অর্থাৎ $\angle OBF = \angle OCE$. $\therefore$ $\angle ODF = \angle OCE$.

পুনরায়, $\angle ODC$ ও $\angle OEC$ প্রত্যেকে সমকোণ বলিয়া, ODCE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ $\angle OCE = \angle ODE$.

$\therefore$ $\angle ODE = \angle ODF$, অর্থাৎ, AD, $\angle FDE$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, BE ও CF যথাক্রমে $\angle FED$ এবং $\angle DFE$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. পাদ-ত্রিভুজের যে-কোন বাহু মূল ত্রিভুজের বাহুর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহা মূল ত্রিভুজের ঐ বাহুর বিপরীত কোণের সমান।

অনুসিদ্ধান্ত 2. পাদ-ত্রিভুজের যে-কোন দুইটি সন্নিহিত বাহু মূল ত্রিভুজের যে বাহুর উপর পরস্পর মিলিত হয়, তাহার সহিত সমান কোণ করে।

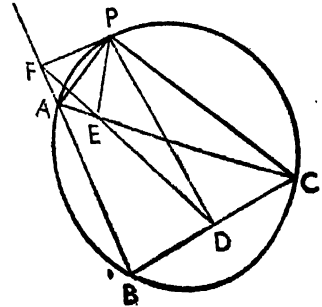
অনুসিদ্ধান্ত 3. ABC ত্রিভুজের পাদ-ত্রিভুজের কোণগুলি 2A, 2B ও 2C কোণের সম্পূরক।

অনুসিদ্ধান্ত 4. △DEF যদি ABC ত্রিভুজের পাদ-ত্রিভুজ হয়, তাহা হইলে DEC, AEF, FBD ও ABC ত্রিভুজ চতুষ্টয় সদৃশকোণী।

প্রতিজ্ঞা 2.

কোন ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুগুলি একরেখীয়।

মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপরিস্থ যে কোন বিন্দু P হইতে BC, CA ও AB-এর উপর যথাক্রমে PD, PE ও PF অঙ্কিত লম্বত্রয়।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, D, E ও F বিন্দুত্রয় একরেখীয়।

অঙ্কন: PA, PC, DE ও EF সংযুক্ত কর।

প্রমাণ: $\because$ $\angle PEA$ ও $\angle PFA$ প্রত্যেকে এক সমকোণ;

$\therefore$ PEAF বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ $\angle PEF = \angle PAF$ (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া)।

আবার, $\angle PDC$ ও $\angle PEC$ প্রত্যেকে এক সমকোণ বলিয়া পরস্পর সমান এবং উহার PC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত; $\therefore$ PEDC একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

$\therefore$ $\angle PED + \angle PCD = 2$ সমকোণ।

পুনরায়, APBC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া, $\angle PAF = \angle PCD$.

$\therefore$ $\angle PED + \angle PEF = 2$ সমকোণ। কিন্তু উহারা সন্নিহিত কোণ;

$\therefore$ ED ও EF একই সরলরেখায় অবস্থিত অর্থাৎ D, E ও F বিন্দুত্রয় একরেখীয়।

দ্রষ্টব্য: লম্বত্রয়ের পাদবিন্দু তিনটি যে সরলরেখায় অবস্থিত তাহাকে **পাদরেখা** (Pedal line or Simson line) বলে।

প্রতিজ্ঞা 3. একটি বিন্দু হইতে কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুত্রয় একরেখীয় হইলে, ঐ বিন্দুটি ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত।

[প্রতিজ্ঞা 2-এর বিপরীত।]

উপরের চিত্র দেখ।

P বিন্দু হইতে ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের D, E ও F পাদবিন্দুত্রয় DEF সরলরেখার উপর অবস্থিত।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, P, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত।

অঙ্কন : PA ও PC সংযুক্ত কর।

প্রমাণ : $\angle PEC = \angle PDC = 1$ সমকোণ এবং উহারা PC-এর একই পার্শ্বে অবস্থিত।

∴ PEDC একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

∴ $\angle PEF = \angle PCD$ অর্থাৎ $\angle PCB$.

পুনরায়, ∵ $\angle PEA = \angle PFA = 1$ সমকোণ ;

∴ PEAF একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

∴ $\angle PEF = \angle PAF$ (একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া)।

∴ $\angle PCB = \angle PAF$. সুতরাং PABC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ অর্থাৎ P, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর অবস্থিত।

অনুসিদ্ধান্ত : কোন বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুত্রয় একরেখীয় হইলে, ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথ ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত হইবে।

অনুশীলনী 29

1. O, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু। প্রমাণ কর যে, $\angle BAC + \angle BOC = 2$ সমকোণ।

2. O, ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু। AO সংযুক্ত করিয়া বর্ধিত কর যেন উহা BC কে D বিন্দুতে এবং ত্রিভুজটির পরিবৃত্তকে G বিন্দুতে ছেদ করিল। প্রমাণ কর যে, $DO = DG$. [C. U. 1944]

3. ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের উপর কোন বিন্দু P হইতে BC বাহুর উপর PD লম্ব অঙ্কন করিয়া বর্ধিত করা হইল। উহা পরিধিকে G বিন্দুতে ছেদ করিলে, প্রমাণ কর যে, AG, P বিন্দুর পাদরেখার সমান্তরাল।

পরিমিতি

পরিমিতি

প্রথম অধ্যায়

ত্রিভুজ ও বৃত্ত
(Triangles and Circles)

1. আয়তক্ষেত্র ও বর্গক্ষেত্র কাহাকে বলে এবং তাহাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয়-প্রণালী সম্বন্ধে পূর্বেই আলোচিত হইয়াছে। এক্ষণে, উহাদের ক্ষেত্রফল-বিষয়ক কিছু প্রশ্ন সন্নিবেশিত হইতেছে।

আয়তক্ষেত্র :

(i) আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা $=2($ দৈর্ঘ্য $+$ প্রস্থ $)$;

(ii) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ (বর্গ একক) ;

অতএব, উহার দৈর্ঘ্য $= \dfrac{\text{ক্ষেত্রফল}}{\text{প্রস্থ}}$ (একক)

এবং প্রস্থ $= \dfrac{\text{ক্ষেত্রফল}}{\text{দৈর্ঘ্য}}$ (একক)।

(iii) আয়তক্ষেত্রের কর্ণ : আয়তক্ষেত্রের দুইটি কৌণিক বিন্দুর সংযোজক সরলরেখাকে উহার কর্ণ (Diagonal) বলা হয়। সুতরাং, উহা একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ।

$\therefore$ (কর্ণ)$^2 =$ (দৈর্ঘ্য)$^2 +$ (প্রস্থ)^2

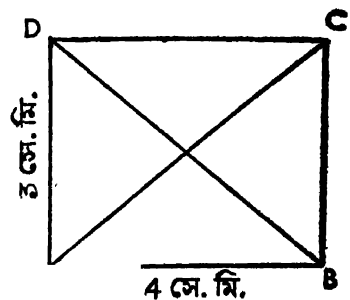
বা, কর্ণ $= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2}$ ।

পার্শ্বস্থ চিত্রে, দৈর্ঘ্য $=$ AB বাহু $= 4$ সে. মি.

প্রস্থ $=$ AD বাহু $= 3$ সে. মি.

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 4 \times 3$ বা 12 বর্গ সে. মি.

পরিসীমা $= 2(4+3)$ বা 14 সে. মি.

কর্ণ $= \sqrt{4^2+3^2}$ বা 5 সে. মি.।

বর্গক্ষেত্র :

কোন আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহুযুগল পরস্পর সমান হইলে, বর্গক্ষেত্র পাওয়া যায়।

C

সুতরাং বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = বাহুগুলির সমষ্টি

= 4 × বাহু,

উহার ক্ষেত্রফল = (দৈর্ঘ্য)^2 = (প্রস্থ)^2

এবং উহার কর্ণ = $\sqrt{2}$ × বাহু।

A B

অতএব, বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × (কর্ণ)^2।

উদাহরণ 1. একটি আয়তকার জমির পরিসীমা 960 মিটার এবং উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 7 : 5। জমিটির ক্ষেত্রফল কত ?

প্রশ্নানুসারে, $\frac{\text{দৈর্ঘ্য}}{\text{প্রস্থ}} = \frac{7}{5}$, বা, দৈর্ঘ্য = $\frac{7}{5}$ × প্রস্থ।

জমিটির পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ) = 2 ($\frac{7}{5}$ × প্রস্থ + প্রস্থ)

= 2 × $\frac{12}{5}$ × প্রস্থ = $\frac{24}{5}$ × প্রস্থ = 960 মিটার।

∴ প্রস্থ = $\frac{960 \times 5}{24}$ মিটার = 200 মিটার।

সুতরাং, দৈর্ঘ্য = 280 মিটার।

∴ উহার ক্ষেত্রফল = 200 × 280 বর্গমিটার = 56000 বর্গমিটার।

উদাহরণ 2. একটি বর্গাকার উদ্যানের ক্ষেত্রফল 900 বর্গমিটার। ঐ উদ্যানে 3 মিটার দৈর্ঘ্য ও 2 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট কতগুলি পাথর বসান যাইতে পারে ?

পাথরের ক্ষেত্রফল = 6 বর্গমিটার।

অতএব, নির্ণেয় পাথরের সংখ্যা = $\frac{\text{উদ্যানের ক্ষেত্রফল}}{\text{পাথরের ক্ষেত্রফল}}$

= $\frac{900 \text{ বর্গমিটার}}{6 \text{ বর্গমিটার}}$ = 150.

প্রশ্নমালা 1

1. একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 12 সে. মি. ও [illegible] মি.; উহার কর্ণ নির্ণয় কর।

2. একটি আয়তকার উদ্যানের পরিসীমা 900 মিটার এবং উহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত 5 : 4. উদ্যানটির ক্ষেত্রফল কত?

3. একটি ঘরের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দ্বিগুণ। প্রতি বর্গমিটারে 3·75 টা. হারে ঘরটিতে কর্পেট বসাইতে মোট খরচ পড়ে 187·50 টাকা। ঘরটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

4. মাথাপিছু $1\frac{1}{2}$ মিটার × 1 মিটার পরিমাণ জায়গা প্রয়োজন হইলে, 50 জন ছাত্র বসিবার জন্য অন্ততঃ কত জায়গা জায়গা লাগিবে?

5. 17 মিটার দীর্ঘ, 13 মিটার প্রস্থ এবং 15 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি ঘরে (4 মি. × 3 মি.) তিনটি জানালা আছে। চারি দেওয়াল রং করিতে প্রতি বর্গমিটারে 15 ন. প. খরচ হিসাবে, মোট কত খরচ হইবে?

[চারি দেওয়ালের ক্ষেত্রফল = 2 × (দৈ: + প্র:) × উ:]

6. একটি বর্গাকার উদ্যানের ক্ষেত্রফল 4 এর (Are)। উহার চারিধারে $\frac{3}{4}$ মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। ঐ রাস্তা পাথর দিয়া বাঁধাইবার জন্য প্রতি বর্গমিটারে 18 ন. প. খরচ হিসাবে মোট কত ব্যয় হইবে?

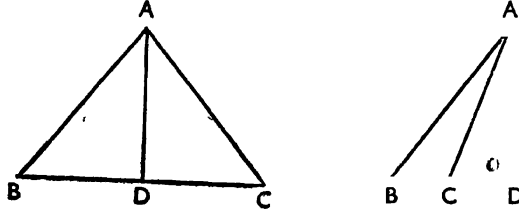
7. একটি আয়তকার ঘরের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার ক্রমিক অনুপাত 5 : 4 : 3। প্রতি বর্গসেন্টিমিটারে 5 ন. প. হিসাবে উহার দেওয়ালগুলি রং করিতে 388 টাকা 80 ন. প. খরচ হইলে। ঘরটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা কত?

8. একটি বর্গাকার জায়গার কর্ণের মাপ 20 মিটার। উহার ক্ষেত্রফল ও দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

9. 200 মিটার দীর্ঘ ও 100 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট একটি মাঠের চতুর্দিকে 2 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। এক মিটার লম্বা কতগুলি বর্গাকার পাথর দ্বারা রাস্তাটি বাঁধানো যাইবে? যদি প্রতিটি পাথরের মূল্য 20 টাকা হয়, তাহা হইলে মোট কত টাকা খরচ পড়িবে?

10. একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 396 বর্গ মি. এবং দৈর্ঘ্য প্রস্থের $2\frac{3}{4}$ গুণ। প্রতি মিটারে 25 নঁ. প. হিসাবে ঐ ক্ষেত্রের চতুর্দিকে বেড়া দিতে কত খরচ পড়িবে?

II. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
(Area of a Triangle)

(i) আমরা জানি, একই ভূমির উপর অবস্থিত এবং সমান উচ্চতাবিশিষ্ট একটি

আয়তক্ষেত্র ও একটি ত্রিভুজের মধ্যে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অর্ধেক। কিন্তু, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ভূমি × উচ্চতা ;

∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ × ভূমি × উচ্চতা।

উপরিস্থিত চিত্রদ্বয়ে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times BC \times AD$.

উদাহরণ 1. একটি ত্রিভুজের ভূমি 15 মিটার এবং উচ্চতা 12 মিটার ; উহার ক্ষেত্রফল কত ?

প্রদত্ত ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2} \times 15 \times 12 = 90$ বর্গমিটার।

(ii) যে-কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে, নিম্নলিখিত সূত্রটির সাহায্যে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায় :

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

যেখানে, a, b ও c তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য এবং $2s = a+b+c$ = ত্রিভুজের পরিসীমা।

উদাহরণ 2. কোন একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে, 9 সে. মি., 12 সে. মি. ও 15 সে. মি. হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

ত্রিভুজটির পরিসীমা = $2s = 9+12+15 = 36$ সে. মি.।

অর্ধ-পরিসীমা = 18 সে. মি.।

∴ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ সে. মি.

= $\sqrt{18(18-9)(18-12)(18-15)}$ বর্গ সে. মি.

= $\sqrt{18.9.6.3} = 54$ বর্গ সে. মি.।

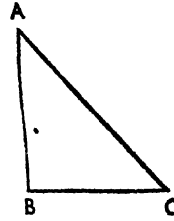
সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল :

সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয় পরস্পর লম্ব বলিয়া, উহার যে-কোন একটিকে ভূমি এবং অপরটিকে ত্রিভুজটির উচ্চতা ধরা যাইতে পারে।

∴ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের গুণফল।

পার্শ্বস্থ ABC সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AB.$$

আবার, পিথাগোরাসের সূত্রানুযায়ী, সমকোণী ত্রিভুজের—

$$(\text{অতিভুজ})^2 = (\text{ভূমি})^2 + (\text{উচ্চতা})^2$$

সুতরাং, $AC^2 = AB^2 + BC^2$

∴ $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

এবং $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$ ।

অতএব, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও যে-কোন একটি বাহুর দৈর্ঘ্য জানা থাকিলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল জানা যায়।

উদাহরণ 3. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ-সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 15 মি. ও 12 মি. হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত ?

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times (15 \times 12)$ বর্গমিটার

$= 90$ বর্গমিটার।

উদাহরণ 4. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 34 মিটার এবং একটি বাহু 30 মিটার ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

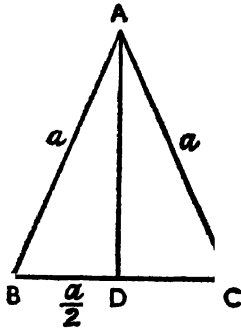
সমকোণী ত্রিভুজটির সমকোণ-সংলগ্ন অপর বাহুটির দৈর্ঘ্য

$= \sqrt{(\text{অতিভুজ})^2 - (\text{প্রদত্ত বাহু})^2} = \sqrt{34^2 - 30^2}$ মি.

$= \sqrt{1156 - 900}$ মি. $= \sqrt{256}$ মি. $= 16$ মি. ;

∴ ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 30 \times 16$ বর্গমি. $= 240$ বর্গমিটার।

সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ঃ

মনে কর, ABC সমবাহু ত্রিভুজটির প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্য a একক। A হইতে BC ভূমির উপর AD লম্ব টানা হইলে D বিন্দু BC-এর মধ্যবিন্দু হইবে।

$\therefore \quad BD = DC = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2}$.

এক্ষণে, ত্রিভুজটির উচ্চতা $= AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$

$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. ($\sqrt{3} = 1{\cdot}732$ প্রায়)

উদাহরণ 5. কোন সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর দৈর্ঘ্য 16 সে. মি. হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত ?

প্রদত্ত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} \times (16)^2$ বর্গসে. মি.

$= 1{\cdot}732 \times 64$ বর্গসে. মি.

$= 110{\cdot}85$ বর্গসে. মি.।

উদাহরণ 6. একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের একটি 25 মি. এবং ভূমি 30 মি. হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

প্রদত্ত ত্রিভুজটির অর্ধ-পরিসীমা $s = \frac{1}{2}(25+25+30)$ মি. $= 40$ মি.

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গমি.

$= \sqrt{40(40-25)(40-25)(40-30)}$ বর্গমি.

$= \sqrt{40 \,.\, 15 \,.\, 15 \,.\, 10}$ বর্গমি.

$= 300$ বর্গমি.।

উদাহরণ 7. একটি ত্রিকোণ পার্কের তিনটি পার্শ্ব যথাক্রমে 12 মি., 25 মি. ও মি.। প্রতি বর্গমিটারে 10 ন. প. হিসাবে উহাতে ঘাসের চাপড়া বসাইতে কত কা ব্যয় হইবে ?

পার্কটির পরিসীমা $=(12+25+33)$ মি. $=70$ মি.

$\therefore$ অর্ধ-পরিসীমা $=35$ মি.।

$\therefore$ ত্রিকোণ পার্কটির ক্ষেত্রফল $=\sqrt{35(35-12)(35-25)(35-33)}$ বর্গমি.

$=\sqrt{35 . 23 . 10 . 2}$ বর্গমি.

$=127$ বর্গ মি. (প্রায়)।

$\therefore$ নির্ণেয় খরচ $=127\times 10$ ন. প. $=12$ টাকা 70 ন. প.।

উদাহরণ 8. কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে 8 মিটার 15 মিটার ও 17 টার হইলে, বিপরীত কোণ হইতে দীর্ঘতম বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য কত বে ?

ত্রিভুজটির অর্ধ-পরিসীমা $=\frac{8+15+17}{2}$ মিটার $=20$ মিটার।

$\therefore$ উহার ক্ষেত্রফল $=\sqrt{20(20-8)(20-15)(20-17)}$ বর্গমি.

$=\sqrt{20 . 12 . 5 . 3}$ বর্গমি. $=60$ বর্গমি.।

এক্ষণে, দীর্ঘতম বাহুটিকে ত্রিভুজটির ভূমি ধরিলে, বিপরীত কোণ হইতে উহার র অঙ্কিত লম্ব, ত্রিভুজটির উচ্চতা হইবে।

মনে কর, উচ্চতা x মি.।

তাহা হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\times 17\times x$ বর্গমি.

$\therefore$ 60 বর্গ মি. $=\frac{1}{2}\times 17\times x$ বর্গমি.

বা, $120=17x$ বা, $x=7{\cdot}058$

$\therefore$ নির্ণেয় লম্ব $=7{\cdot}058$ মিটার।

প্রশ্নমালা 2

1. একটি ত্রিভুজের ভূমি 17 সে. মি. এবং উচ্চতা 12 সে. মি.। ত্রিভুজটির ত্রফল কত ?

2. কোন ত্রিভুজের ভূমি 10 মিটার এবং উচ্চতা 35 সে. মি. হইলে, উহার ত্রফল কত ?

3. একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 250 বর্গমিটার ; উহার উচ্চতা 30 মিটার হইলে ভূমি কত হইবে ?

4. কোন একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 6300 বর্গমিটার ; উহার ভূমি 90 মিটার হইলে, উচ্চতা কত ?

5. একটি ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতার অনুপাত 5 : 7 ; ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 315 বর্গমিটার হইলে, উহার ভূমি ও উচ্চতা কত হইবে ?

6. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে 15 মি., 18 মি. ও 25 মি. হইলে উহার ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

7. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে 36 মিটার ও 48 মিটার ; উহার পরিসীমা 144 মিটার হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

8. একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহু যথাক্রমে 15 মি., 20 মি. ও 25 মিটার ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল এবং বিপরীত কোণ হইতে দীর্ঘতম বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বটির দৈর্ঘ্য কত নির্ণয় কর।

9. একটি ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের পার্শ্বগুলির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 143 মিটার, 40? মিটার এবং 440 মিটার। প্রতি বর্গ মিটারের খাজনা 25 ন. প. হইলে, ঐ ক্ষেত্রের মোট খাজনা কত ?

10. একটি ত্রিভুজের পরিসীমা 48 মিটার এবং বাহুগুলির দৈর্ঘ্যের অনুপাত 13 : 14 : 15 হইলে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

11. একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 637 সে. মি. এবং একটি বাহু 24? সে. মি. হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত ?

12. সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়ের একটি 25 মিটার হইলে উহার ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

13. কোন সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহু 12 মি. হইলে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল কত

14. একটি সমবাহু ত্রিভুজের উচ্চতা 48 মিটার হইলে, উহার ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

15. কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহু ও ভূমির অনুপাত 5 : 8 ; উহার পরিসীমা 306 সে. মি. হইলে, ক্ষেত্রফল কত ?

16. একটি সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 288 বর্গমিটার হইলে, উহার বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

III. বৃত্তের পরিধি ও ক্ষেত্রফল

(Circumference and area of circles)

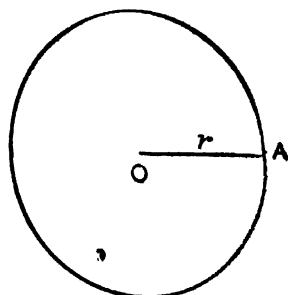
যে কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অনুপাত একটি ধ্রুবক। এই ধ্রুবক সংখ্যাটিকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় না; ইহাকে একটি গ্রীক অক্ষর π (পাই) দ্বারা প্রকাশ করা হয়। পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত π-এর শুদ্ধমান 3·14159, কিন্তু স্থূলভাবে দেখিলে π-এর মান $\frac{22}{7}$.

পার্শ্বের O-কেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=$ OA $= r$, মনে কর।

উহার, $\frac{\text{পরিধি}}{\text{ব্যাস}} = \pi$

অর্থাৎ, কোন বৃত্তের পরিধি

$= \pi \times$ বৃত্তটির ব্যাস

$= 2\pi \times$ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

পরিধিকে c ধরিলে, $c = 2\pi r$, বা, $r = \frac{c}{2\pi}$.

উদাহরণ 1. একটি বৃত্তের ব্যাস 42 সে. মি.; উহার পরিধি কত?

বৃত্তের পরিধি $= \pi \times$ ব্যাস,

$\therefore$ নির্ণেয় পরিধি $= \pi \times 42$ সে. মি.

$= \frac{22}{7} \times 42$ সে. মি. $= 132$ সে. মি.।

উদাহরণ 2. কোন বৃত্তের পরিধি 176 সে. মি. হইলে, উহার ব্যাসার্ধ কত হইবে?

বৃত্তের পরিধি $= 2\pi \times$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ

$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{\text{পরিধি}}{2\pi} = \frac{176}{2 \times \frac{22}{7}}$ সে. মি.

$= \frac{176 \times 7}{2 \times 22} = 28$ সে. মি.।

উদাহরণ 3. একটি চাকার ব্যাস 28 সে. মি.। 352 মিটার পথ যাইতে চাকাটি কতবার আবর্তন করিবে?

চাকার পরিধি $= \pi \times$ চাকার ব্যাস $= \frac{22}{7} \times 28$ বা 88 সে. মি.।

সুতরাং, 88 সে. মি. পথ যাইতে চাকাটি একবার আবর্তন করে।

∴ 352 মিটার বা 35200 সে. মি. পথ যাইতে চাকাটি $\frac{35200}{88}$ বা 400 বার আবর্তন করিবে।

উদাহরণ 4. 63 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি চাকা প্রতি মিনিটে 5 বার ঘুরে। গাড়ীখানির গতিবেগ ঘণ্টায় কত মিটার?

চাকার পরিধি $= \pi \times$ চাকার ব্যাস $= \frac{22}{7} \times 63$ বা 198 সে. মি.।

∴ প্রতি মিনিটে চাকাটি 5×198 বা 990 সে. মি. ঘুরে।

∴ ঘণ্টায় চাকাটি $\frac{990 \times 60}{100}$ বা 594 মিটার ঘুরে।

সুতরাং, নির্ণেয় গতিবেগ = 594 মিটার (ঘণ্টায়)।

বৃত্তের ক্ষেত্রফল :

যে-কোন বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi \times$ (ব্যাসার্ধ)^2 (বর্গ একক)

$$\therefore \ (\text{ব্যাসার্ধ})^2 = \frac{\text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল}}{\pi};$$

$$\therefore \ \text{ব্যাসার্ধ} = \sqrt{\text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল} \div \pi}$$

উদাহরণ 5. কোন একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে. মি.। **উহার ক্ষেত্রফল কত?**

বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$ বর্গসে. মি. = 616 বর্গ সে. মি.।

উদাহরণ 6. একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল 3850 বর্গ সেন্টিমিটার। **উহার পরিধি** নির্ণয় কর।

বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\text{বৃত্তের ক্ষেত্রফল} \div \pi}$ সে. মি. $= \sqrt{3850 \div \frac{22}{7}}$ সে. মি.

$= \sqrt{3850 \times \frac{7}{22}}$ সে. মি. $= \sqrt{175 \times 7}$ সে. মি. = 35 সে. মি.।

∴ নির্ণেয় পরিধি $= 2 \times \frac{22}{7} \times 35$ সে. মি = 220 সে. মি.।

উদাহরণ 7. একটি বৃত্তের পরিধি 88 সেন্টিমিটার; **উহার ক্ষেত্রফল কত?**

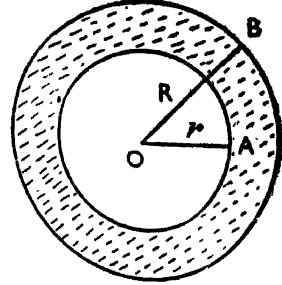
বৃত্তটির ব্যাসার্ধ = পরিধি $\div 2\pi = 88 \div 2 \times \frac{22}{7}$ সে. মি.

$$= \frac{88 \times 7}{2 \times 22} = 14 \text{ সে. মি.}$$

∴ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল $= \frac{22}{7} \times 14 \times 14$ বর্গসে. মি. = 616 বর্গসে. মি.।

বৃত্তাকার বলয় :

দুইটি এককেন্দ্রীয় অসমান বৃত্তের পরিধি-দ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানকে **বৃত্তাকার বলয়** (Circular ring) বলে। বৃত্ত দুইটির বৃহত্তরটির ক্ষেত্রফল হইতে ক্ষুদ্রতরটির ক্ষেত্রফল বিয়োগ করিলে উহাদের পরিধিদ্বয় দ্বারা সীমাবদ্ধ গোলাকার বলয়ের ক্ষেত্রফল পাওয়া যায়। পরিধিদ্বয়ের পার্থক্যকে বলয়ের পরিসর বলা হয়।

পার্শ্বস্থ চিত্রে O-কেন্দ্রীয় বৃত্ত দুইটির বৃহত্তরটির ব্যাসার্ধ $=OB=R$ এবং ক্ষুদ্রতরটির ব্যাসার্ধ $=OA=r$.

$\therefore$ বলয়ের পরিসর $=R-r$

এবং বলয়ের ক্ষেত্রফল $=\pi(R^2-r^2)$

উদাহরণ 8. দুইটি এককেন্দ্রীয় বৃত্তের ব্যাসার্ধদ্বয় যথাক্রমে 21 সে. মি. ও 14 সে. মি.। উহাদের মধ্যস্থ গোলাকার বলয়টির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

গোলাকার বলয়ের ক্ষেত্রফল

$=\pi\times[($ বৃহত্তর ব্যাসার্ধ $)^2-($ ক্ষুদ্রতর ব্যাসার্ধ $)^2]$ বর্গ সে. মি.

$=\pi\times[(21)^2-(14)^2]$ বর্গসে. মি.

$=\frac{22}{7}\times(21+14)(21-14)$ বর্গসে. মি.

$=\frac{22}{7}\times35\times7$ বর্গসে. মি. $=770$ বর্গসে. মি.।

উদাহরণ 9. একটি বৃত্তাকার উদ্যানের চারিপাশ-বেষ্টিত একটি রাস্তার বহিঃস্থ পরিধি অন্তঃস্থ পরিধি অপেক্ষা 66 মিটার অধিক দীর্ঘ। রাস্তাটির পরিসর নির্ণয় কর।

মনে কর, রাস্তার বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ R মিটার এবং অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ r মিটার।

$\therefore$ বহির্বৃত্তের পরিধি $=2\pi R$ মি. এবং অন্তর্বৃত্তের পরিধি $=2\pi r$ মি.

$\therefore$ পরিধিদ্বয়ের অন্তরফল $=2\pi(R-r)$ মি. $=2\times\frac{22}{7}(R-r)$ মি.

প্রদত্ত সর্তানুযায়ী, $2\times\frac{22}{7}(R-r)=66$

$\therefore$ $(R-r)=\frac{21}{2}$ বা 10.5 মিটার, অর্থাৎ, নির্ণেয় পরিসর $=10.5$ মিটার।

উদাহরণ 10. 50 মিটার ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের চারিপাশ ঘিরিয়া 5 মি. প্রস্থবিশিষ্ট একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ক্ষেত্রফল কত?

বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\pi\times50^2$ বর্গমি.

রাস্তাসহ বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=\pi\times55^2$ বর্গমি.

∴ রাস্তার ক্ষেত্রফল $=\pi(55^2-50)^2$ বর্গমি.

$=\frac{22}{7}\times(55+50)(55-50)$ বর্গমি.

$=\frac{22}{7}\times105\times5$ বর্গমি. $=1650$ বর্গমি.।

প্রশ্নমালা 3

1. নিম্নলিখিত ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তগুলির পরিধি নির্ণয় কর :—

(i) 14 সে. মি, (ii) 98 সে. মি. (iii) 35 মিটার

2. নিম্নলিখিত পরিধি-বিশিষ্ট বৃত্তগুলির ব্যাস নির্ণয় কর :—

(i) 88 সে. মি. (ii) 44 মি. (iii) 3·52 মিটার

3. বৃত্তগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যাহাদের ব্যাস—

(i) 56 মিটার (ii) 112 সে. মি. (iii) 35 মিটার

(iv) 1·4 মিটার

4. বৃত্তগুলির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর, যাহাদের ক্ষেত্রফল—

(i) 616 বর্গসে. মি. (ii) 20626 বর্গমিটার

5. বৃত্তগুলির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যাহাদের পরিধি—

(i) 176 সে. মি. (ii) 33 মিটার

6. বৃত্তগুলির পরিধি নির্ণয় কর, যাহাদের ক্ষেত্রফল—

(i) 2464 বর্গমিটার (ii) 34650 বর্গসে. মি.

7. একটি গাড়ীর চাকা প্রতি সেকেণ্ডে 3 বার ঘুরে। চাকাটির ব্যাস যদি 63 সে. মি. হয়, তাহা হইলে গাড়ীটির গতিবেগ কত ?

8. একটি গাড়ীর চাকা 3 কি. মি. 520 মিটার পথ যাইতে 280 বার আবর্তন করে ; চাকার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

9. প্রতি মিটার 1 টাকা 50 ন. প. হিসাবে 84 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার জমির চারিদিকে বেড়া দিতে কত খরচ পড়িবে ?

10. 65 মিটার ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তাকার উদ্যানের বাহিরে চারিদিকে 10 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা রহিয়াছে। পথটির ক্ষেত্রফল কত ?

11. একটি বৃত্তাকার উদ্যানের চতুর্দিকে একটি রাস্তা আছে। বৃত্তাকার ক্ষেত্রের পরিধি 259 মিটার এবং রাস্তার বাহিরের দিকের পরিধি 325 মিটার। রাস্তার বিস্তার নির্ণয় কর

12. একটি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের চারিদিকে 4 মিটার প্রশস্ত একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল 1056 বর্গমিটার হইলে, ক্ষেত্রটির পরিসীমা কত ?

13. কোন বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসের অন্তরফল 75 মিটার। ইহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

14. দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধের যোগফল 21 মি. এবং তাহাদের পরিধির অন্তরফল 44 মি.। উহাদের পরিধি কত ?

15. দুইটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5 মি. ও 12 মি.। উহাদের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ কত ?

*16. বৃত্তাকার দুইটি স্বর্ণখণ্ডের ব্যাসার্ধের অনুপাত 2 : 3 এবং উহাদের বেধের অনুপাত 9 : 10. বৃহত্তর খণ্ডের মূল্য 7 টাকা 50 ন. প. হইলে, ক্ষুদ্রতর খণ্ডের মূল্য কত ?

*17. কোন এক ব্যক্তি বৃত্তাকার ক্ষেত্রের ব্যাস বরাবর অতিক্রম করিয়া দেখিল যে বৃত্তটির পরিধি একবার ঘুরিয়া আসিতে যে সময় লাগিত তাহা অপেক্ষা 45 সেকেণ্ড কম লাগিয়াছে। লোকটির গতিবেগ ঘণ্টায় 4·8 কিলোমিটার হইলে, বৃত্তাকার ক্ষেত্রটির ব্যাস কত ?

*18. 14 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের চারিবাহুর উপর চারিটি অর্ধবৃত্ত অঙ্কন করা হইল। সম্পূর্ণ ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত ? ক্ষেত্রটির চতুর্দিকে বেড়া দিতে প্রতি মিটারে 25 ন. প. হিসাবে মোট কত ব্যয় হইবে ?

দ্বিতীয় অধ্যায়

ঘনবস্তুর তলের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল

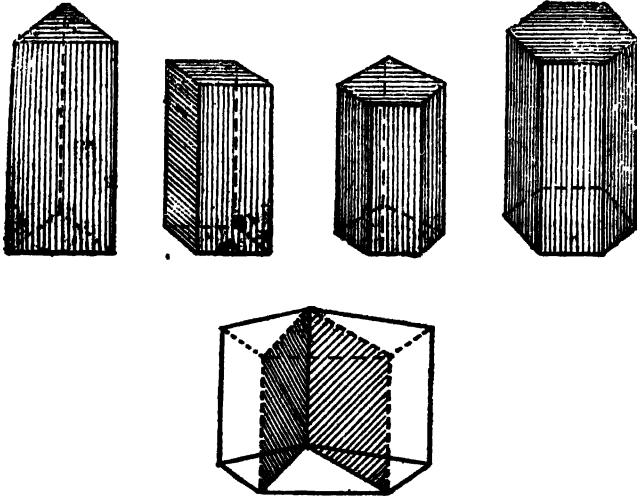
(Surface Areas and Volumes of Solids)

1. কয়েকটি প্রয়োজনীয় সংজ্ঞা :

আয়তন (Dimension) : দৈর্ঘ্য, প্রস্থ বা বিস্তার এবং বেধ বা উচ্চতা—এ তিনটি রৈখিক পরিমাপের যে-কোন একটিকে **আয়তন** বা **মাত্রা** বলে। কে জ্যামিতিক চিত্রের (i) শুধু দৈর্ঘ্য, (ii) দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বা (iii) দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চ একসঙ্গে থাকিলে উহাকে যথাক্রমে এক আয়তনবিশিষ্ট, দুই আয়তনবিশিষ্ট বা ি আয়তনবিশিষ্ট বলা হয়। সুতরাং সরলরেখা এক আয়তনবিশিষ্ট ; কিন্তু বিন্দুর কে আয়তন নাই।

ঘনবস্তু (Solid) : যে সকল বস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং বেধ বা উচ্চতা আে তাহাদিগকে **ঘনবস্তু** বলা হয়। সুতরাং, ইহারা তিনমাত্রা-বিশিষ্ট জ্যামিতিক চিত্র

ঘনফল (Volume) : ঘনবস্তু যে পরিমাণ স্থান অধিকার করিয়া থাকে ে স্থানের পরিমাণকে **ঘনফল** বলে।

কয়েকটি ঘনবস্তুর ছবি দেওয়া হইল।

মনে রাখিও, **ঘন ও ঘনবস্তু এক নহে** ; কারণ ঘন বলিলে আয়তন বুঝায় এ ঘনবস্তু বলিলে জিনিসটিকে বুঝায়।

তল (Surface) : ঘনবস্তুর বহিরাবরণ বা উপরিভাগকে **তল** বা **পৃষ্ঠ** বলা হয়। প্রত্যেক ঘনবস্তুই এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ। যেমন, বলের একটি মাত্র তল ; কিন্তু একটি বাক্সের ছয়টি তল।

বহুতলক (Polyhedron) : কোন বস্তু একাধিক সমতল দ্বারা বেষ্টিত হইলে, উহাকে **বহুতলক** বলা হয়। বহুতলক উৎপন্ন করিতে অন্ততঃ চারিটি সমতলের প্রয়োজন।

ধার (Edge) : কোন ঘনবস্তুর দুইটি তল পরস্পর যে রেখায় মিলিত হয়, তাহাকে **ধার** বলে।

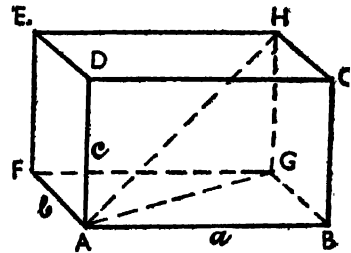
শীর্ষ (Vertex) : তিন বা ততোধিক ধার যে বিন্দুতে মিলিত হয়, সেই বিন্দুকে **শীর্ষ** বলা হয়।

কর্ণ (Diagonal) : দুইটি বিপরীত শীর্ষ-সংযোজক সরলরেখাকে **কর্ণ** বলা হয়।

চৌপল (Parallelopiped) : যে ঘনবস্তুর মোট ছয়টি তল এবং যাহার দুইটি বিপরীত তল পরস্পর সমান্তরাল, তাহাকে **চৌপল** বলে। স্পষ্টতঃই চৌপলের বারটি ধার, আটটি শীর্ষবিন্দু ও চারিটি কর্ণ এবং প্রত্যেকটি পৃষ্ঠই সামান্তরিক।

II. সমকোণী চৌপল (Rectangular Parallelopiped) :

যে চৌপলের ছয়টি তলের প্রত্যেকটি আয়তক্ষেত্র, তাহাকে **সমকোণী চৌপল** ব **উপঘনক** বলে।

প্রত্যেক শীর্ষে তিনটি করিয়া ধার মিলিত হইয়াছে। পার্শ্বস্থ চিত্রে AB, AF ও AD ধার তিনটি A শীর্ষে মিলিত হইয়াছে। ইহারা যথাক্রমে উপঘনকটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা।

যদি উপঘনকটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতাকে যথাক্রমে a একক, b একক ও c একক ধরা হয়; তাহা হইলে, উহ

ঘনফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা $= abc$ ঘন একক।

যেহেতু, ঘনফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা,

অতএব, $\text{দৈর্ঘ্য} = \dfrac{\text{ঘনফল}}{\text{প্রস্থ} \times \text{উচ্চতা}}$,

$\text{প্রস্থ} = \dfrac{\text{ঘনফল}}{\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{উচ্চতা}}$,

$\text{উচ্চতা} = \dfrac{\text{ঘনফল}}{\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}}$ ।

পুনরায়, ঘনফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা,

$= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 \times (\text{প্রস্থ})^2 \times (\text{উচ্চতা})^2}$

$= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{প্রস্থ}) \times (\text{দৈর্ঘ্য} \times \text{উচ্চতা}) \times (\text{প্রস্থ} \times \text{উচ্চতা})}$

$= \sqrt{\text{তিনটি সন্নিহিত তলের ক্রমিক গুণফল}}$ ।

সমকোণী চৌপলটির **পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল** (Area of the whole surface)

$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গ একক

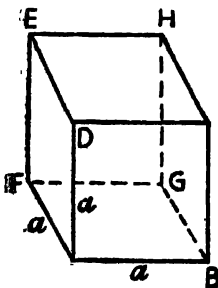
কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ একক ।

[মনে কর, AH কর্ণের দৈর্ঘ্য জানিতে হইবে। পূর্ববর্তী পৃষ্ঠার চিত্র হইতে

$AH^2 = AG^2 + GH^2 = AB^2 + BG^2 + GH^2$

$= AB^2 + AF^2 + AD^2 = a^2 + b^2 + c^2$.]

III. ঘনক (Cube) :

যে সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা পরস্পর সমান, তাহাকে **ঘনক** বলে।

সুতরাং, $a = b = c$.

∴ ঘনকের ঘনফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা

$= (\text{দৈর্ঘ্য})^3 = (\text{প্রস্থ})^3$

$= (\text{উচ্চতা})^3$ ঘন একক ।

$= a^3$ ঘন একক

∴ **দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা** $= \sqrt[3]{\text{ঘনকের ঘনফল}}$ ।

ঘনকের **পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল** $= 6a^2$ বর্গ একক

উহার **কর্ণ** $= \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$ একক ।

উদাহরণ 1. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 18 মি., 9 মি. ও 6 মি.। উহার ঘনফল, পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য কত ?

চৌপলটির ঘনফল $=18\times9\times6$ ঘনমিটার $=972$ ঘনমিটার।

পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $=2(18\times9+9\times6+6\times18)$ বর্গমিটার

$=2(162+54+108)$ বর্গমিটার $=648$ বর্গমিটার।

কর্ণের দৈর্ঘ্য $=\sqrt{18^2+9^2+6^2}$ মিটার

$=\sqrt{324+81+36}$ মিটার $=21$ মিটার।

উদাহরণ 2. একটি ইটের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 8 সে. মি., 6 সে. মি. ও 3 সে. মি. হইলে, 50 মি. লম্বা, 24 মি. প্রস্থ ও 18 মিটার উচ্চতাবিশিষ্ট একটি প্রাচীর তৈয়ারি করিতে কতগুলি ইট লাগিবে ?

ইটের ঘনফল $=8\times6\times3$ ঘন সে. মি. $=144$ ঘন সে. মি.।

প্রাচীরের আয়তন $=50\times24\times18$ ঘনমিটার $=50\times24\times18\times1000000$ ঘন-সেন্টিমিটার। $\therefore$ ইটের সংখ্যা $=\frac{50\times24\times18\times1000000}{8\times5\times3}=15,0000000.$

উদাহরণ 3. একটি বাক্সের বহির্ভাগের দৈর্ঘ্য 162 সে. মি., বিস্তার 80 সে. মি. ও বেধ 83 সে. মি.। 1 সে. মি. পুরু তক্তা দ্বারা ঐ বাক্স প্রস্তুত করিতে কত বর্গমিটার তক্তা লাগিবে ?

যেহেতু তক্তার বেধ 1 সে. মি., অতএব বাক্সটির অন্তর্ভাগের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধ যথাক্রমে $(162-2)$ সে. মি., $(80-2)$ সে. মি. এবং $(83-2)$ সে. মি. অর্থাৎ 160 সে. মি., 78 সে. মি. ও 81 সে. মি.।

এখন, অন্তর্ভাগসহ বাক্সের ক্ষেত্রফল $=162\times80\times83$ ঘন সে. মি.

$=1057680$ ঘন সে. মি.।

বাক্সের অন্তর্ভাগের ক্ষেত্রফল $=160\times78\times81$ ঘন সে. মি.

$=1010880$ ঘন সে. মি.।

$\therefore$ তক্তার ঘনফল $=(1075680-1010880)$ ঘন সে. মি.

$=64800$ ঘন সে. মি.।

যেহেতু, তক্তার বেধ $=1$ সে. মি. ; অতএব তক্তার ক্ষেত্রফল $=64800$ বর্গ সে. মি.

$=6{\cdot}48$ বর্গমিটার।

উদাহরণ 4. এক লিটার জলের ওজন 1 কিলোগ্রাম হইলে 5 মিটার দৈর্ঘ্য, 3 মিটার প্রস্থ এবং 4 মিটার গভীরতা-বিশিষ্ট একটি চৌবাচ্চায় কত পরিমাণ জল ধরিবে ?

প্রদত্ত দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও গভীরতাকে অন্তর্ভাগের মাপ ধরিয়া, চৌবাচ্চার অন্তর্ভাগের ঘনফল $= 5\times3\times4$ ঘনমিটার $=60$ ঘনমিটার $=60{,}000000$ ঘন সেন্টিমিটার।

এক লিটার অর্থাৎ 1000 ঘন সে. মি. জলের ওজন 1 কি.গ্রা.

$\therefore$ 60,000000 ঘন সে. মি. জলের ওজন $=60{,}000$ কি.গ্রা.।

উদাহরণ 5. একটি ঘনাকৃতি বাক্সের তলদেশের ক্ষেত্রফল 306·25 বর্গ সে. মি.। বাক্সটির দৈর্ঘ্য, পৃষ্ঠভাগের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।

প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $=\sqrt{306{\cdot}25}$ সে. মি. $=17{\cdot}5$ সে. মি.।

পৃষ্ঠভাগের ক্ষেত্রফল $=6\times306{\cdot}25$ বর্গ সে. মি. $=1837{\cdot}5$ বর্গ সে. মি.।

ঘনফল $=(17{\cdot}5)^3$ ঘন সে. মি. $=5359{\cdot}375$ ঘন সে. মি.।

উদাহরণ 6. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ এবং বিস্তার বেধের তিনগুণ। পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল 675 বর্গমিটার হইলে, ইহার আয়তন কত হইবে ?

মনে কর, সমকোণী চৌপলটির বেধ $=x$ মি.

তাহা হইলে, বিস্তার $3x$ মি. এবং দৈর্ঘ্য $6x$ মি.।

$\therefore$ পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল $=2(x.3x+3x.6x+6x.x)$ বর্গমিটার

$=54x^2$ বর্গমিটার।

$\therefore$ $54x^2=675$ (প্রশ্নানুসারে) বা, $x^2=\frac{675}{54}$

সুতরাং, $x=\frac{5}{2}\sqrt{2}$ মি.

$\therefore$ চৌপলটির আয়তন $=\frac{5}{2}\sqrt{2}\times3.\frac{5}{2}\sqrt{2}\times6.\frac{5}{2}\sqrt{2}$ ঘন মিটার

$=\frac{1125}{2}\sqrt{2}$ ঘন মিটার $=\dfrac{1125}{\sqrt{2}}$ ঘন মি.

$=\dfrac{1125}{1{\cdot}41}$ ঘন মি. $=798$ ঘন মি. (প্রায়)।

উদাহরণ 7. একটি সমকোণী চৌপলের কর্ণ 10 মিটার এবং ইহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধের সমষ্টি 12 মিটার। পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

কর্ণ $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ মি.

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=100\cdots(1)$ এবং, $a+b+c=12\cdots(2)$

আবার, $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

সুতরাং, $(12)^2=100+2(ab+bc+ca)$

বা, $2(ab+bc+ca)=144-100=44$

$\therefore$ পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল $=44$ বর্গমিটার।

উদাহরণ 8. তিনটি সোনার ঘনকের ধারগুলি যথাক্রমে 3 সে. মি., 4 সে. মি. ও 5 সে. মি.। যদি উহাদিগকে গলাইয়া একটি নূতন ঘনক তৈয়ারি করা হয়, তাহা হইলে ঐ ঘনকটির ধার কত সে. মি. হইবে?

ঘনকের আয়তন $=($ বাহু $)^3$ ঘন একক।

সুতরাং, তিনটি ঘনকের আয়তনের সমষ্টি $=(3^3+4^3+5^3)$ ঘন সে. মি.

$=216$ ঘনসে. মি. $\therefore$ নূতন ঘনকটির আয়তন $=216$ ঘনসে. মি.।

$\therefore$ উহার ধার $=\sqrt[3]{216}$ সে. মি. $=6$ সে. মি.।

প্রশ্নমালা 4

1. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য 8 মি., প্রস্থ 6 মি. এবং বেধ 4 মি.। উহার পৃষ্ঠভাগের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।

2. একটি উপঘনকের দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও উচ্চতা যথাক্রমে 12 সে. মি., 10 সে. মি. ও 4 সে. মি. হইলে, উহার ঘনফল কত?

3. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 9 মি., 5 মি. ও 6 মি. হইলে, উহার ঘনফল, বহির্ভাগের ক্ষেত্রফল ও কর্ণ কত?

4. একটি ঘনকের প্রত্যেক ধারের দৈর্ঘ্য 5 সে. মি. হইলে, উহার পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল, আয়তন ও কর্ণের দৈর্ঘ্য কত?

5. একটি ঘনাকৃতি কাষ্ঠখণ্ডের বহির্ভাগের ক্ষেত্রফল $33\frac{1}{2}$ বর্গ সে. মি.। উহার ঘনফল কত?

6. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 4 : 3 : 2 ; উহার বহির্ভাগের ক্ষেত্রফল 1872 বর্গ সে. মি. হইলে, দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

7. $\frac{1}{2}$ সে. মি. পুরু একটি বাক্সের দৈর্ঘ্য 16 সে. মি., প্রস্থ 12 সে. মি. এবং উচ্চতা 8 সে. মি.। প্রতি বর্গ সে. মি. 12 ন.প. খরচ হইলে, বাক্সটির অন্তর্ভাগ রং করিতে কত খরচ পড়িবে ?

8. একটি লোহার সিন্দুকের বহির্ভাগের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ যথাক্রমে 12 সে. মি., 10 সে. মি. ও 8 সে. মি.। ইহার অন্তর্দেশের ক্ষেত্রফল 376 বর্গ সে. মি. হইলে সিন্দুকটি কতখানি পুরু ?

9. 2·16 মি. লম্বা, 47 সে. মি. উচ্চ এবং 12 সে. মি. চওড়া একটি দেওয়াল নির্মাণ করিতে 10 সে. মি. লম্বা, 5 সে. মি. চওড়া এবং 3 সে. মি. পুরু কত ইষ্টক লাগিবে ?

10. 120 মি. দীর্ঘ এবং 50 মি. বিস্তৃত একটি আয়তাকার উদ্যানের বাহিরে চারিদিকে 6 মি. উচ্চ এবং 75 সে. মি. পুরু একটি প্রাচীর প্রস্তুত করিতে 75 সে. মি. দীর্ঘ, 37·5 সে. মি. বিস্তৃত এবং 25 সে. মি. পুরু কতগুলি ইট লাগিবে ?

11. একটি সমকোণী চৌপলের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং উচ্চতা যথাক্রমে 75 সে. মি., 24 সে. মি. ও 15 সে. মি.। সম-আয়তন-বিশিষ্ট একটি ঘনকের ভূমির ক্ষেত্রফল কত হইবে ?

12. 3·5 মিটার গভীরতা-বিশিষ্ট একটি জলাধারের দৈর্ঘ্য প্রস্থের দেড় গুণ। উহাতে মোট 236 মেট্রিক টন জল ধরে। প্রতি ঘন সে. মি. জলের ওজন 1 গ্রাম হইলে, জলাধারটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

13. 80 জন ছাত্রের জন্য 50 মি. দীর্ঘ একটি বিদ্যালয়-গৃহ নির্মাণ করিতে হইবে। প্রতি ছাত্রের জন্য যদি 7·5 বর্গমিটার মেঝে ও 150 ঘনমিটার ফাঁকা স্থান রাখিতে হয় তাহা হইলে ঐ গৃহটির প্রস্থ ও উচ্চতা কত হইবে ?

14. প্রতি ঘন সে. মি. 10 ন. প. হিসাবে একটি ধাতুনির্মিত ঘনকের মূল্য 72 টাকা 90 ন.প. হইলে উহার দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

15. একটি জলপূর্ণ চৌবাচ্চার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা যথাক্রমে 20 মি., 15 মি. ও 4 মি.। উহা হইতে কত পরিমাণ জল বাহির করিয়া লইলে, জলের গভীরতা 1 মি. কমিয়া যাইবে ?

16. তিনটি সোনার ঘনকের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 1 সে. মি., 6 সে. মি. এবং 8 সে. মি.। উহাকে গলাইয়া একটি ঘনক তৈয়ারি করিলে, নূতন ঘনকটির দৈর্ঘ্য কত হইবে ?

17. 360 মিটার দীর্ঘ ও 60 মিটার বিস্তৃত একটি জলাশয়ের চতুর্দিকে 24 মিটার প্রস্থবিশিষ্ট একটি রাস্তা আছে। প্রতি ঘন মিটার কাঁকরের মূল্য 25 ন. প. হইলে, $\frac{1}{8}$ মি. পুরু করিয়া কাঁকর বিছাইতে মোট কত ব্যয় হইবে ?

IV. লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ্ (Right circular Cylinder) :

কোন আয়তক্ষেত্রের একটি বাহুকে স্থির রাখিয়া আয়তক্ষেত্রটিকে স্থির বাহুর চতুর্দিকে সম্পূর্ণরূপে আবর্তন করাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ্** বা **বেলন** বলে।

C_1 B

পার্শ্বস্থ চিত্রে OABC আয়তক্ষেত্রটির OC বাহুকে স্থির রাখিয়া উহার চতুর্দিকে আয়তক্ষেত্রটিকে ঘোরানো হইয়াছে। উহার বিপরীত বাহু AB চোঙ্টির পৃষ্ঠদেশ (বা বক্রপৃষ্ঠ) উৎপন্ন করিয়াছে। OC এবং AB বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে **অক্ষ** (Axis) এবং **উৎপাদক রেখা** (Generating line) বলা হয়। OC অক্ষের দুই প্রান্তস্থিত OA ও CB লম্ব বাহুদ্বয় দুইটি **বৃত্তাকার প্রান্ততল** (Circular ends) বা **ভূমি** (Base) সৃষ্টি করিয়াছে। OC অক্ষে দৈর্ঘ্যকে **উচ্চতা** (Height) বলা হয়। OA (বা CB)-কে চোঙটির **ভূমির ব্যাসার্ধ** (Radius of the base) বলা হয়।

মনে কর, বৃত্তাকার, চোঙের দৈর্ঘ্য বা উচ্চতা h একক এবং ভূমির ব্যাসার্ধ r একক

তাহা হইলে, উহার **ঘনফল = ভূমির ক্ষেত্রফল × উচ্চতা**

$= \pi r^2$ বর্গ একক $\times h$ একক $= \pi r^2 h$ ঘন একক।

বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি × উচ্চতা

$= 2\pi r$ একক $\times h$ একক $= 2\pi rh$ বর্গ একক

এবং **সমগ্র বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + দুইটি প্রান্ততলে ক্ষেত্রফল** $= 2\pi rh$ বর্গ একক $+ 2\pi . r^2$ বর্গ একক $= 2\pi r\ (h+r)$ বর্গ একক।

উদাহরণ 1. একটি বৃত্তাকার চোঙের উচ্চতা 15 সে. মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3·5 সে. মি. ; উহার সমগ্র বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।

বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r\,(h+r)$ বর্গ একক

$= 2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\,(15+\frac{7}{2})$ বর্গ সে. মি. $=407$ বর্গ সে. মি.।

ঘনফল $=\pi r^2 h$ ঘন একক $=\frac{22}{7}\times\frac{49}{4}\times 15$ ঘন সে. মি. $=577·5$ ঘন সে. মি.।

উদাহরণ 2. একটি বেলনের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 660 বর্গমিটার এবং ভূমির ব্যাস 14 মি.। উহার ঘনফল নির্ণয় কর।

মনে কর, বেলনটির উচ্চতা h মি ;

বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $=2\pi rh$ বর্গ একক $=2\times\frac{22}{7}\times 7\times h$ বর্গমিটার

$\therefore\quad 22h=660$ অর্থাৎ, $h=30$ মি.।

$\therefore$ বেলনটির ঘনফল $=\pi r^2 h$ ঘন একক $=\frac{22}{7}\times 49\times 30$ ঘনমিটার

$=4620$ ঘনমিটার।

উদাহরণ 3. একটি বৃত্তাকার চোঙের সমগ্র বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 385 বর্গ সে. মি. এবং ভূমির ব্যাস 7 সে. মি. ; চোঙটির উচ্চতা ও আয়তন বাহির কর।

মনে কর, চোঙ্‌টির উচ্চতা h সে. মি.

বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $=2\pi rh$ বর্গ সে. মি.

$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}h$ বর্গ সে. মি.

$=22h$ বর্গ সে. মি.

দুইটি প্রান্ততলের ক্ষেত্রফল $=2\pi r^2$ বর্গ সে. মি.

$=2\times\frac{22}{7}\times\frac{49}{4}$ বর্গ সে. মি.

$=77$ বর্গ সে. মি.

$\therefore$ সমগ্র বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $=(22h+77)$ বর্গ সে. মি.

$\therefore\quad 22h+77=385$

বা, $22h=308$

বা, $h=14$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $=14$ সে. মি.।

চোঙ্‌টির আয়তন $=\pi r^2 h$ ঘন সে. মি.

$=\frac{22}{7}\times\frac{49}{4}\times 14$ ঘন সে. মি.

$=539$ ঘন সে. মি.

উদাহরণ 4. একটি বেলনাকৃতি ফাঁপা নলের দৈর্ঘ্য 12 মি.। উহার বহির্ব্যাসার্ধ ও অন্তর্ব্যাসার্ধদ্বয় যথাক্রমে 1 মি. ও 75 সে. মি. হইলে, বেলনটির বস্তুর আয়তন নির্ণয় কর।

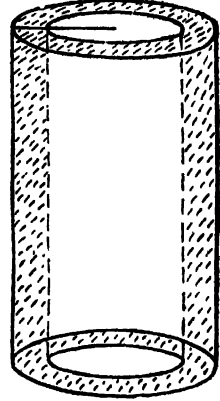
নলের ঘনফল = সমগ্র বেলনের ঘনফল − ভিতরের বেলনের ঘনফল

$= \pi.(1)^2.\ 12$ ঘনমিটার $- \pi.(\frac{3}{4})^2.\ 12$ ঘনমিটার

$= \pi.\ 12\ (1 - \frac{9}{16})$ ঘনমিটার

$= \pi.\ 12.\ \frac{7}{16}$ ঘনমিটার $= \frac{22}{7}.\ 12.\ \frac{7}{16}$ ঘনমিটার

$= \frac{33}{2}$ ঘনমিটার $= 16{\cdot}5$ ঘনমিটার

$\therefore$ নির্ণেয় বস্তুর আয়তন = 16·5 ঘনমিটার।

উদাহরণ 5. একটি বেলনাকৃতি প্রস্তর-স্তম্ভের উচ্চতা 20 মিটার। প্রতি বর্গমিটারে 25 ন.প. হিসাবে পালিশ করিতে মোট 220 টাকা ব্যয় হইলে ভূমির ব্যাস নির্ণয় কর।

মনে কর, $2r$ = ভূমির ব্যাস এবং h = উচ্চতা,

$\therefore$ প্রস্তর-স্তম্ভের বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গমিটার

$= 2 \times \frac{22}{7} \times r \times 20$ বর্গমিটার

25 ন.প. = 1 বর্গমিটার পালিশ করিবার খরচ

$\therefore$ 1 টাকা = 4 " " " "

$\therefore$ 220 টাকা = 880 " " " "

$2 \times \frac{22}{7} \times r \times 20 = 880$ $\therefore$ $2r = \frac{880 \times 7}{22 \times 20} = 14$ মিটার

নির্ণেয় ব্যাস = 14 মিটার

প্রশ্নমালা 5

1. নিম্নোক্ত লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ্গুলির সমগ্র বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় কর, যাহাদের ভূমির ব্যাস ও উচ্চতা যথাক্রমে—

(i) 16 সে. মি. ও 14 সে. মি., (ii) 10 সে. মি. ও 7 সে. মি.
(iii) ·5 মিটার ও 21 মিটার, (iv) 6 মিটার ও 28 মিটার।

2. নিম্নোক্ত লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ্গুলির ঘনফল ও উচ্চতা দেওয়া আছে, ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

(i) 1188 ঘন সে. মি. ও 42 সে. মি.

(ii) 2200 ঘন মি. ও 7 মি. (iii) 1100 ঘন মি. ও 14 মি.

3. একটি বেলনাকৃতি প্রস্তরস্তম্ভের ভূমির পরিসীমা 24 মি.। উহার উচ্চতা 50 মি. হইলে, বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

4. একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 1000 বর্গ সে. মি. এবং ভূমির ব্যাস 20 সে. মি.; উহার উচ্চতা ও ঘনফল কত ?

5. একটি রোলারের দৈর্ঘ্য 18 মি. ও বেড় 44 মি.। 300 বার আবর্তন করিতে মোট কত বর্গমিটার অতিক্রম করিবে ?

6. সম-আয়তন-বিশিষ্ট একটি বেলনের ভূমির ব্যাস ও ঘনকের বাহুর দৈর্ঘ্য 14 মি. হইলে, বেলনটির উচ্চতা কত হইবে ?

7. এক ঘনমিটার আয়তনবিশিষ্ট একটি সোনার তালকে পিটাইয়া 308 মিটার লম্বা একটা তার প্রস্তুত করা হইল। তারটির ব্যাস নির্ণয় কর।

8. কত ঘনমিটার মৃত্তিকা খনন করিলে 7 মি. ব্যাস ও 32 মি. গভীর একটি কূপ নির্মিত হইবে ?

9. কোন লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও দুই প্রান্তের ক্ষেত্রফল সমান। চোঙটির উচ্চতা ও ভূমির ব্যাসের অনুপাত নির্ণয় কর।

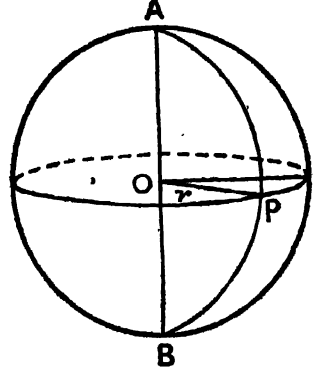
10. একটি লৌহ-নির্মিত নলের দৈর্ঘ্য 14 মি.। উহার বহির্ব্যাসার্ধ ও অন্তর্ব্যাসার্ধদ্বয় যথাক্রমে 8 সে. মি. ও 6 সে. মি.। প্রতি ঘন সে. মি. লৌহের মূল্য 25 ন. প. হিসাবে নলটির মূল্য কত হইবে ?

11. একটি বেলনাকৃতি প্রস্তর-স্তম্ভের ঘনফল 1584 ঘনমিটার এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 6 মিটার; প্রতি বর্গ মি. 1 টাকা 50 ন. প. হিসাবে উহার পৃষ্ঠদেশ রং করিতে মোট কত ব্যয় হইবে ?

12. 2 সে. মি. পুরু একটি নলের দৈর্ঘ্য 50 সে. মি. ও অন্তর্ব্যাস 20 সে. মি., প্রতি ঘন সে. মি. বস্তুর ওজন 252 গ্রাম এবং প্রতি কিলোগ্রাম বস্তুর মূল্য 75 ন. প হইলে, নলটির মূল্য কত ?

V. গোলক (Sphere) :

ব্যাসকে অক্ষ ধরিয়া কোন অর্ধবৃত্তকে উহার চতুর্দিকে ঘুরাইলে যে ঘন উৎপন্ন হয়, তাহাকে **গোলক** বলে।

পার্শ্বস্থ চিত্রে, AOB ব্যাসকে অক্ষ ধরিয়া O-কেন্দ্রযুক্ত APB অর্ধবৃত্তকে চতুর্দিকে ঘোরানো হইয়াছে এবং ইহার ফলে গোলকটি উৎপন্ন হইয়াছে। অর্ধপরিধি APB দ্বারা উহার বক্রপৃষ্ঠ উৎপন্ন হইয়াছে। যেহেতু, অর্ধপরিধিস্থ যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব O বিন্দু হইতে সর্বদা সমান, অতএব গোলকের পৃষ্ঠস্থ সকল বিন্দুই O হইতে সমদূরবর্তী। সুতরাং গোলক একটিমাত্র বক্রতল দ্বারা সীমাবদ্ধ এমন একটি ঘনবস্তু যাহার মধ্যস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ তলের উপরিস্থিত সকল বিন্দুর দূরত্ব সর্বদা সমান।

ঐ নির্দিষ্ট বিন্দুকে গোলকটির **কেন্দ্র** (Centre) এবং কেন্দ্র হইতে তল পর্যন্ত অংকিত যে-কোন সরলরেখাকে উহার **ব্যাসার্ধ** (Radius) বলে।

গোলকের তলের ক্ষেত্রফল এবং ঘনফল (Surface area and Volume of a Sphere) :

গোলকের ব্যাসার্ধ r একক হইলে, উহার তলের (বক্রপৃষ্ঠের) ক্ষেত্রফল

$= 4\pi r^2$ বর্গ একক

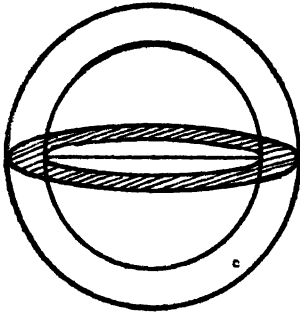
$$\text{গোলকের ব্যাসার্ধ} = \sqrt{\frac{\text{তলের ক্ষেত্রফল}}{4\pi}} \text{ একক।}$$

$$\text{উহার ঘনফল} = \tfrac{1}{3} \times \text{তলের ক্ষেত্রফল} \times \text{ব্যাসার্ধ}$$

$$= \tfrac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r \text{ ঘন একক}$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi r^3 \text{ ঘন একক।}$$

$$\text{সুতরাং, গোলকের ব্যাসার্ধ} = \sqrt[3]{\frac{3 \times \text{ঘনফল}}{4\pi}} \text{ একক}$$

ফাঁপা গোলকের ঘনফল (Volume of a hollow sphere) :

ফাঁপা গোলকের ঘনফল = বহির্গোলকের ঘনফল − অন্তর্গোলকের ঘনফল।

মনে কর, বহির্গোলকের ব্যাসার্ধ = R একক এবং অন্তর্গোলকের ব্যাসার্ধ = r একক।

∴ ফাঁপা গোলকের ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi (R^3 - r^3)$ ঘন একক।

উদাহরণ 1. একটি ঘন গোলকের ব্যাসার্ধ 14 সে.মি. হইলে, উহার ক্ষেত্রফল ও ঘনফল নির্ণয় কর।

গোলকটির বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ সে.মি.

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14$ বর্গ সে. মি. $= 2464$ বর্গ সে. মি.।

উহার ঘনফল $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন সে. মি. $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 14$ ঘন সে. মি.

$= \frac{34496}{3}$ ঘন সে. মি. $= 11498{\cdot}67$ ঘন সে. মি.

উদাহরণ 2. প্রতি বর্গমিটার 28 ন. প. হিসাবে 15 মিটার ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি গোলাকার গম্বুজের তলদেশ রং করিতে কত ব্যয় হইবে ?

গম্বুজের তলদেশের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গমিটার

$= 4 \times \frac{22}{7} \times 15 \times 15$ বর্গমিটার

1 বর্গমিটার রং করিতে খরচ হয় 28 ন. প.

∴ $\frac{4 \times 22 \times 15 \times 15}{7}$ বর্গমিটার রং করিতে খরচ হয়,

$\frac{4 \times 22 \times 15 \times 15}{8} \times 28$ ন. প. $= 792$ টাকা।

উদাহরণ 3. একটি গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 154 বর্গমিটার। উহার ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গমিটার $= 154$ বর্গমিটার।

$$\therefore \quad 4 \times \frac{22}{7} \times r^2 = 154 \quad \text{বা,} \quad r^2 = \frac{154 \times 7}{4 \times 22}$$

$$\therefore \quad r = \frac{7}{2} \text{ বা } 3{\cdot}5 \text{ মিটার।}$$

উদাহরণ 4. 4 সে. মি. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি নিরেট ধাতব গোলকের ওজন 4 কিলোগ্রাম ; ঐ ধাতুনির্মিত 10 সে. মি. বহির্ব্যাস ও 8 সে. মি. অন্তর্ব্যাস-বিশিষ্ট একটি ফাঁপা গোলকের ওজন কত হইবে ?

4 সে. মি. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট নিরেট গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3$

$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 4^3$ ঘন সে. মি. $=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 64$ ঘন সে. মি.।

ফাঁপা গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi\ (R^3-r^3)=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(5^3-4^3)$ ঘন সে. মি.

$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times(125-64)$ ঘন সে. মি. $=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 61$ ঘন সে মি.

এখন, $\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 64$ ঘন সে. মি. ধাতুর ওজন $=4$ কিলোগ্রাম,

∴ $\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 61$ ঘন সে. মি.

$$\text{ধাতুর ওজন}=\frac{4\times3\times7}{4\times22\times64}\times\frac{3}{4}\times\frac{22}{7}\times 61 \text{ কিলোগ্রাম}$$

$$=\frac{61}{16}\text{ কিলোগ্রাম}=3\cdot81\text{ কিলোগ্রাম।}$$

উদাহরণ 5. 45 সে. মি. দৈর্ঘ্য ও 4 সে. মি. ব্যাস-বিশিষ্ট একটি ধাতব চোঙ্কে গলাইয়া 6 সে. মি. ব্যাস-বিশিষ্ট কতগুলি নিরেট গোলক তৈয়ারি করা যাইবে ? যদি চোঙ্টি ফাঁপা হয়, তবে 6 সে. মি. ব্যাস-বিশিষ্ট কতকগুলি গোলাকার চাকতি নির্মাণ করা যায় ?

ধাতব চোঙের ঘনফল $=\pi r^2 h=\frac{22}{7}\times 2^2\times 45$ ঘন সে. মি.

$$=\frac{22\times4\times45}{7}\text{ ঘন সে. মি.।}$$

নিরেট গোলকের ঘনফল $=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 3^3$ ঘন সে. মি.

$=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 27$ ঘন সে. মি.

মনে কর, গোলকের সংখ্যা $=n$.

এখন, প্রশ্নানুসারে, $\frac{22\times4\times45}{7}=n\times\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times 27$ বা, $n=5$.

∴ নির্ণেয় গোলকসংখ্যা $=5$.

এখন চোঙ্টি যদি ফাঁপা হয়, তবে উহার বক্রতল চাক্তিগুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান। ধর, চাক্তির সংখ্যা $=x$.

∴ $2\times\frac{22}{7}\times2\times45=x\times\frac{22}{7}\times3^2$ বা, $x=20$

∴ নির্ণেয় চাক্তির সংখ্যা $=20$.

উদাহরণ 6. 48 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি অর্ধ-গোলাকার জলাধারকে 4 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট নলদ্বারা পূর্ণ করিতে হইবে। প্রতি মিনিটে 30 সে. মি. জল ভিতরে প্রবেশ করিলে কতক্ষণে জলধারটি পূর্ণ হইবে ?

অর্ধ-গোলাকার জলাধারটির আয়তন $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{22}{7} \cdot 24^3$ ঘন সে. মি.

$$= \frac{2 \times 22 \times 24 \times 24 \times 24}{3 \times 7} \text{ ঘন সে. মি.}$$

প্রতি মিনিটে যে পরিমাণ জল প্রবেশ করে তাহার আয়তন, 30 সে. মি. দৈর্ঘ্য ও 4 সে. মি. ব্যাসযুক্ত একটি ফাঁপা নলের আয়তনের সমান।

∴ প্রতি মিনিটে $\frac{22}{7} \times 2^2 \times 30$ ঘন সে. মি. জল প্রবেশ করে।

∴ $\frac{2 \times 22 \times 24 \times 24 \times 24}{3 \times 7}$ ঘন সে. মি. জল প্রবেশ করে

$$\frac{7}{22 \times 4 \times 30} \times \frac{2 \times 22 \times 24 \times 24 \times 24}{3 \times 7} \text{ বা } \frac{384}{5} \text{ মিনিটে।}$$

নির্ণেয় সময় $= \frac{384}{5}$ মিনিট $= 1$ ঘ. 17 মি.।

প্রশ্নমালা 6

1. নিম্নোক্ত ব্যাসার্ধবিশিষ্ট গোলকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল ও ঘনফল বাহির কর।

(i) 14 সে. মি. (ii) 9 মি. (iii) 56 সে. মি. (iv) 24 মি.।

2. একটি গোলকের বক্রতল 616 বর্গ সে. মি., উহার ব্যাসার্ধ কত ?

3. একটি গোলকের ঘনফল 310464 ঘন. সে. মি. হইলে, উহার ব্যাস কত ?

4. 2 মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি নিরেট লৌহ-গোলক হইতে 25 সে. মি. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট কতগুলি গোলক তৈয়ারি করা যাইবে ?

5. একটি গোলাকৃতি পাত্রের বহির্ব্যাস 56 সে. মি. ; পাত্রটি 2 সে. মি. পুরু। প্রতি বর্গ সে. মি. 5 ন. প. হিসাবে উহার উভয় তল রং করিতে কত ব্যয় হইবে ?

6. মধ্যভাগ একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ ও প্রান্তদ্বয় দুইটি অর্ধগোলক দ্বারা গঠিত একটি ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য 14 মি. ও ব্যাস 4 মি.। বস্তুটির বহির্ভাগ রং করিতে প্রতি বর্গ মিটারে 25 ন. প. হিসাবে কত খরচ পড়িবে ?

7. 6 সে.মি. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি নিরেট লৌহ-গোলকের ওজন 60 কিলোগ্রাম। উহাকে গলাইয়া 22 সে. মি. বহির্ব্যাস ও 16 সে. মি. অন্তর্ব্যাস-বিশিষ্ট একটি ফাঁপা লৌহ-গোলক তৈয়ারি করা হইলে, উহার ওজন কত হইবে ?

8. গোলাকৃতি একতাল কাদাকে 16 সে. মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙ্ তৈয়ারি করা হইল। চোঙ্টির ভূমির ব্যাসার্ধ গোলকের ব্যাসার্ধের সমান হইলে উহার মান নির্ণয় কর।

9. একটি গোলকের ঘনফল ও তলের ক্ষেত্রফলের মান সমান হইলে, গোলকটির ব্যাসার্ধ কত সে. মি. হইবে ?

10. 3 সে. মি., 4 সে. মি. ও 5 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি স্বর্ণগোলক ভাঙ্গিয়া একটিমাত্র গোলক তৈয়ারি করা হইল। নূতন গোলকটির ব্যাসার্ধ কত ?

11. একটি অর্ধ-গোলাকৃতি গম্বুজের ব্যাস 42 সে. মি., উহার বক্রতলের ক্ষেত্রফল কত ?

12. 4 সে. মি ব্যাসবিশিষ্ট একটি নিরেট সীসার তাল হইতে, 48 সে. মি. লম্বা নল প্রস্তুত করা হইল ; নলটির অন্তর্ব্যাস 1 সে. মি. হইলে, উহা কত পুরু হইবে ?

13. কোন একটি গোলককে একটি লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের মধ্যে ঠিক সম্পূর্ণরূপে স্থাপন করা গেল ; উহাদের আয়তনের অনুপাত কত হইবে ?

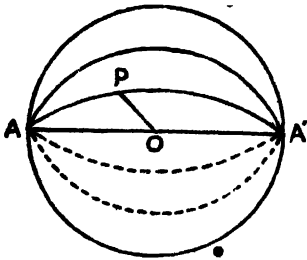
14. 6 মি. দীর্ঘ একটি লম্ব বৃত্তাকার চোঙের উভয় প্রান্তে 3 মিটার ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট দুইটি অর্ধবৃত্ত স্থাপন করা হইল। সম্পূর্ণ পাত্রটির ঘনফল নির্ণয় কর।

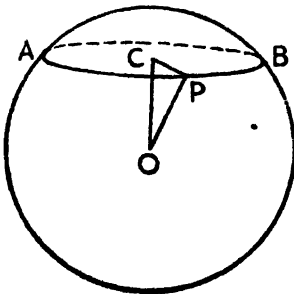
15. 4 সে. মি ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি গোলাকৃতি ঘনবস্তুকে গলাইয়া 5 সে. মি. বহি-বাসার্ধবিশিষ্ট একটি ফাঁপা গোলক প্রস্তুত করা হইল। ফাঁপা গোলকটি কতখানি পুরু হইবে ?

তৃতীয় অধ্যায়

গোলক-বিষয়ক জ্যামিতি

(Geometry of the sphere)

I. কোন অর্ধ-বৃত্তের ব্যাসকে অক্ষ ধরিয়া অর্ধ-বৃত্তটিকে একবার সম্পূর্ণ ঘুরাইলে একটি **গোলক** (Sphere) উৎপন্ন হয়। সুতরাং, উহা একটি ঘনবস্তু ; উহা নিরেট, ফাঁপা নহে। গোলকের মধ্যস্থ যে বিন্দুটি গোলক-তলের সমস্ত বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী, তাহাকে **গোলকের কেন্দ্র** (Centre of Sphere) এবং কেন্দ্র হইতে গোলক-তলের যে-কোন বিন্দুর দূরত্বকে **গোলকের ব্যাসার্ধ** (Radius of sphere) বলা হয়। আর, কেন্দ্র দিয়া যে-সকল সরলরেখা গোলকের তল পর্যন্ত উভয়দিকে বিস্তৃত তাহাকে গোলকের ব্যাস বলে। পার্শ্বস্থিত চিত্রে AA′ গোলকের ব্যাস এবং OP (= OA = OA′ = ···) গোলকের ব্যাসার্ধ।

II. গোলক-সম্বন্ধীয় কতিপয় তথ্য :

(1) গোলকের কেন্দ্রগামী যে-কোন সমতল (Plane) গোলককে দুইটি সমান **অর্ধ-গোলকে** (Hemisphere) বিভক্ত করে। প্রত্যেকটি অর্ধ-গোলক একটি বক্রতল ও একটি বৃত্তাকার সমতল দ্বারা সীমাবদ্ধ। গোলকটির কেন্দ্রই এই বৃত্তের কেন্দ্র এবং গোলকটির ব্যাসার্ধই এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

(2) একটি সমতল একটি গোলককে যে ভাবেই ছেদ করুক না কেন, ছেদটি একটি বৃত্ত হইবে।

মনে কর, APB সমতল ক্ষেত্রটি যে-কোন একটি সমতল কর্তৃক O-কেন্দ্র-যুক্ত গোলকের ছিন্ন অংশ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, APB একটি বৃত্ত।

অঙ্কন : O কেন্দ্র হইতে APB সমতল ক্ষেত্রের উপর OC লম্ব অঙ্কিত কর। OP, CP সংযুক্ত কর।

প্রমাণ ঃ ∵ OC, APB সমতলের উপর লম্ব ; ∴ OC, CP রেখার উপর লম্ব।

এখন, OCP সমকোণী ত্রিভুজের

$$OP^2 = CO^2 + CP^2$$

বা, $CP^2 = OP^2 - CO^2$

বা, $CP = \sqrt{OP^2 - CO^2} =$ ধ্রুবক (∵ লম্ব OC এবং গোলকটির ব্যাসার্ধ OP উভয়েই ধ্রুবক।)

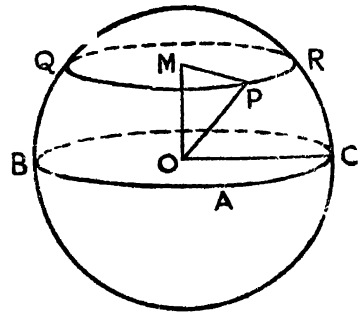
আবার, যেহেতু APB সমতলক্ষেত্রের পরিসীমার উপর P যে-কোন বিন্দু হইতে পারে এবং C বিন্দু হইতে উহার দূরত্ব সর্বদা সমান, সুতরাং ABC-এর পরিসীমার উপর সকল বিন্দুই C হইতে সমদূরবর্তী।

∴ ABC একটি বৃত্ত।

(3) কোন গোলককে বিভিন্ন সমতল বিভিন্ন বৃত্তে ছেদ করিলে গোলকের কেন্দ্রগামী সমতল গোলককে যে বৃত্তে ছেদ করে তাহাই বৃহত্তম হয়।

O-কেন্দ্রীয় গোলকটিকে যে সকল বিভিন্ন সমতল ছেদ করিয়াছে PQR বৃত্তটি তাহাদের মধ্যে O-বিন্দুগামী নয় এইরূপ একটি সমতলের ছেদ, এবং ABC বৃত্তটি O-বিন্দুগামী একটি সমতলের ছেদ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

ABC বৃত্ত > PQR বৃত্ত।

অঙ্কন ঃ O হইতে PQR সমতলের উপর OM লম্ব অঙ্কন কর। OC, OP এবং PM সংযুক্ত কর।

প্রমাণ ঃ OM সরলরেখা PQR সমতলের উপর লম্ব বলিয়া, উহা MP সরলরেখার সহিতও লম্ব।

∴ $\angle OMP = 1$ সমকোণ।

∴ $\triangle OMP$ সমকোণী ত্রিভুজের, অতিভুজ $OP > MP$.

কিন্তু, $OP = OC$ (একই গোলকের ব্যাসার্ধ) ;

∴ $OC > MP$, অর্থাৎ ABC বৃত্তের ব্যাসার্ধ > PQR বৃত্তের ব্যাসার্ধ,

∴ ABC বৃত্ত > PQR বৃত্ত।

III. **গুরুবৃত্ত ও লঘুবৃত্ত :**

কোন গোলককে উহার কেন্দ্রগামী সমতল ছেদ করিলে যে বৃত্ত উৎপন্ন হয়, তাহাকে **গুরুবৃত্ত** (Great circle) বলে এবং কেন্দ্রগামী নয় এইরূপ সমতল যে বৃত্ত উৎপন্ন করে, তাহাকে **লঘুবৃত্ত** (Small circle) বলে।

(4) কোন গোলকের তলে অবস্থিত যে-কোন বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ও ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধ লইয়া কয়েকটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, উহাদের যে-কোন দুইটি বৃত্তের পরিধিদ্বয়ের ব্যবধান সর্বদা সমান হইবে, এবং ঐ পরিধিগুলিকে পরস্পরের সমান্তরাল বলা হয়।

IV. **কৌণিক দূরত্ব :**

কোন গোলকের তলের উপরিস্থিত দুইটি বিন্দুকে গোলকটির কেন্দ্রের সহিত সংযুক্ত করিলে, কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাকে উক্ত বিন্দুদ্বয়ের **কৌণিক দূরত্ব** (Angular distance) বলে। গোলকের তল বক্র বলিয়া উহার উপরিস্থিত যে-কোন দুইটি বিন্দুর দূরত্ব গজ, ফুট বা মিটার ইত্যাদি রৈখিক এককে মাপা যায় না। ঐ সমস্ত ক্ষেত্রে ডিগ্রী, মিনিট, সেকেণ্ড প্রভৃতি কৌণিক একক ব্যবহৃত হয়।

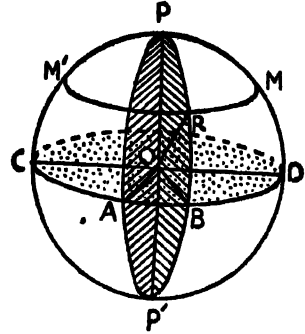
V. **অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমা :**

পৃথিবী সম্পূর্ণ গোলক নহে,—ইহার উত্তর ও দক্ষিণ অংশ কিঞ্চিৎ চাপা। পৃথিবীর নৈরক্ষিক ব্যাস 7926 মাইল এবং মেরুব্যাস 7899 মাইল। পৃথিবীর আয়তনের তুলনায় ব্যাসের এই পার্থক্য এত কম যে, মোটামুটিভাবে উহাকে একটি গোলক বলিয়া ধরা যাইতে পারে।

পৃথিবীর কেন্দ্র দিয়া উত্তর ও দক্ষিণ দিকে ভূপৃষ্ঠ পর্যন্ত যে ব্যাস কল্পনা করা হয়, তাহাকেই পৃথিবীর **অক্ষ** বা **মেরুরেখা** (Polar axis) বলে।

মেরুরেখা পৃথিবী-পৃষ্ঠকে যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদিগকে **মেরু** (Pole) বলা হয়। উত্তর দিকের মেরুটিকে **উত্তর মেরু** (North pole) এবং দক্ষিণ দিকেরটিকে **দক্ষিণ মেরু** (South pole) বলে।

যে গুরুবৃত্তের সমতলের উপর মেরুরেখা লম্বভাবে দণ্ডায়মান থাকে তাহাকে **বিষুবরেখা** বা **নিরক্ষরেখা** (Equator) বলে।

পার্শ্বস্থ চিত্রে, O-কেন্দ্রযুক্ত ভূগোলকের PP' মেরুরেখা, P উত্তর মেরু ও P' দক্ষিণ মেরু, এবং POP' ভূ-বিষুবরেখা।

বিষুবরেখা পৃথিবীকে দুইটি অংশে বিভক্ত করে। উত্তরাংশের নাম **উত্তর গোলার্ধ** (Northern hemisphere) এবং দক্ষিণ অংশের নাম **দক্ষিণ গোলার্ধ** (Southern hemisphere). মেরুবিন্দুদ্বয়কে কেন্দ্র ধরিয়া পৃথিবীপৃষ্ঠে কল্পিত বৃত্তগুলিকে **অক্ষরেখা** (Latitude lines) বলে। এই সকল লঘুবৃত্ত বিষুবরেখার সমান্তরাল এবং উহার উত্তরে ও দক্ষিণে অবস্থিত বলিয়া উহাদিগকে **সমাক্ষরেখাও** (Parallels of latitude) বলা হয়। চিত্রে MRM' এরূপ একটি সমাক্ষরেখা।

পৃথিবীর অক্ষগামী (সুতরাং কেন্দ্রগামীও) যে-কোন সমতল পৃথিবী-পৃষ্ঠকে গুরুবৃত্তে ছেদ করে। এই গুরুবৃত্তের যে অর্ধাংশ পৃথিবীর দুই মেরুর অন্তর্বর্তী তাহাকে **মধ্যরেখা** (Meridian) বলে। উহার অপর নাম **দ্রাঘিমা রেখা** বা **দেশান্তর রেখা** (Longitude line)। লণ্ডনের গ্রীণউইচ শহরের মধ্য দিয়া কল্পিত মধ্য-রেখাকে **মূল মধ্যরেখা** (Prime meridian) বলা হয়।

পৃথিবীর উপরিস্থিত কোন স্থানের মধ্য দিয়া যদি একটি মধ্যরেখা কল্পনা করা যায়; তাহা হইলে সেই মধ্যরেখা ও মূল মধ্যরেখার মধ্যবর্তী কৌণিক দূরত্বকে **দ্রাঘিমা** (Longitude) বলে। মনে কর, চিত্রে PAP' মূল মধ্যরেখা এবং PBP' মধ্যরেখাটি পৃথিবী-পৃষ্ঠের যে-কোন স্থান R-এর ভিতর দিয়া গিয়াছে। উহারা বিষুব-রেখাকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। AB বৃত্তচাপ ভূ-কেন্দ্রে $\angle AOB$ কোণ উৎপন্ন করে এবং উহা ঐ দুই মধ্যরেখার তলের অন্তর্ভূত কোণের সমান।

$\therefore$ $\angle AOB$ কোণ উক্ত স্থানের দ্রাঘিমা।

মূল মধ্যরেখা হইতে পূর্বে ও পশ্চিমে উভয়দিকেই 0° হইতে 180° পর্যন্ত দ্রাঘিমার পরিমাপ করা হয়। মূল মধ্যরেখার পূর্বদিকে অবস্থিত স্থলগুলির দ্রাঘিমাকে **পূর্ব দ্রাঘিমা** এবং পশ্চিমে অবস্থিত স্থানগুলির দ্রাঘিমাকে **পশ্চিম দ্রাঘিমা** বলা হয়।

কোন স্থান 25° পূর্ব দ্রাঘিমায় অবস্থিত বলিলে বুঝিতে হইবে যে, মূল মধ্যরেখা হইতে স্থানটি পূর্বে অবস্থিত এবং ঐ স্থানের মধ্য দিয়া যে মধ্যরেখা যাইবে তাহা মূল মধ্যরেখার সহিত 25° কোণ করিবে। সুতরাং মূল মধ্যরেখা ও বিষুবরেখার ছেদবিন্দু A এবং কেন্দ্র O যোগ করিয়া AO-এর সহিত পূর্বে 25° কোণ করিয়া একটি সরলরেখা টানিলে, উহা Q বিষুবরেখাকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুর মধ্য দিয়া অংকিত মধ্যরেখা ঐ স্থানের মধ্য দিয়া যাইবে।

মনে রাখিও, একই মধ্যরেখায় অবস্থিত সকল স্থানের দ্রাঘিমা এক এবং মূল মধ্যরেখার উপর অবস্থিত স্থানসমূহের দ্রাঘিমা 0°. মূল মধ্যরেখা হইতে 180° পূর্ব মধ্যরেখা এবং 180° পশ্চিম মধ্যরেখা একই রেখা। এই কাল্পনিক রেখাটিকে **আন্তর্জাতিক তারিখ রেখা** (International Date line) বলে।

বিষুবরেখা হইতে উত্তরে বা দক্ষিণে অবস্থিত কোন স্থানের মধ্য দিয়া অংকিত সমাক্ষরেখা বরাবর কৌণিক দূরত্বকে উক্ত স্থানের **অক্ষাংশ** (Latitude) বলে। চিত্রে, R স্থানের অক্ষাংশ ∠ROB কোণ; কারণ R স্থানের মধ্য দিয়া অংকিত অক্ষরেখা বরাবর বিষুবরেখা হইতে উহার কৌণিক দূরত্ব হইতেছে ∠ROB কোণ। বিষুবরেখার উত্তরে ও দক্ষিণে উভয়দিকে 0° হইতে 90° পর্যন্ত অক্ষাংশের পরিমাপ করা হয়। উত্তর গোলার্ধে অবস্থিত স্থানসমূহের অক্ষাংশ **উত্তর অক্ষাংশ** এবং দক্ষিণ গোলার্ধে অবস্থিত স্থানসমূহের অক্ষাংশকে **দক্ষিণ অক্ষাংশ** বলা হয়।

লক্ষ্য কর, একই অক্ষরেখায় অবস্থিত স্থানগুলির অক্ষাংশ একই এবং বিষুবরেখাস্থ কোন স্থানের অক্ষাংশ 0°, সুমেরু বিন্দুর অক্ষাংশ 90° উত্তর এবং কুমেরু বিন্দুর অক্ষাংশ 90° দক্ষিণ।

দ্রষ্টব্য ঃ পৃথিবী-পৃষ্ঠে কোন স্থানের প্রকৃত অবস্থান জানিতে হইলে ঐ স্থানের অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমা উভয়ই জানা প্রয়োজন।

জ্যামিতি

উত্তরমালা

অনুশীলনী 1 (পৃঃ 7—9)

26. 10 সমকোণ   27. 4

অনুশীলনী 4 (পৃঃ 36—37)

9. 75°

অনুশীলনী 5 (পৃঃ 44—45)

2. 3·75 সে. মি. (প্রায়)   3. 15 সে. মি.

অনুশীলনী 7 (পৃঃ 67)

1. (a) 24 বর্গ সে. মি.   (b) 31·50 বর্গ সে. মি.   (c) 3·30 বর্গ মি.
2. 72 বর্গ সে. মি.   3. 17·28 বর্গ সে. মি.   4. 12·5 সে. মি.
5. 185 বর্গ সে. মি.   6. 3   7. 330 বর্গ মি.
9. 3·6 সে. মি.   10. 225 বর্গ সে. মি.

অনুশীলনী 8 (পৃঃ 71)

1. (a) 512 বর্গ সে. মি.   (b) 126 বর্গ সে. মি.
   (c) 17·6 বর্গ সে. মি.

অনুশীলনী 10 (পৃঃ 82—83)

11. 43·75 বর্গ সে. মি.   12. 96 বর্গ সে. মি.
14. 13·84 বর্গ মি.   15. 96 বর্গ সে. মি.
16. 60 মি. ও 80 মি.

অনুশীলনী 12 (পৃঃ 92—93)

2. (a) 45   (b) 63   3. 30 সে. মি.
4. 16 মি.   5. 5 মি.   6. 3·75 হাত
7. 2·93 হাত   8. 52·43 মি.

অনুশীলনী 18 (পৃঃ 125)

1. 16 সে. মি.

পরিমিতি

উত্তরমালা

প্রশ্নমালা 1 (পৃঃ 173)

1. 15 সে. মি. ; 2. 20,000 বর্গ মিটার ; 3. 10 মি., 5 মি. ,
4. 75 বর্গ মি. ; 5. 129 টা. 60 ন. প. ; 6. 23 টা. 22 ন. প. ;
7. 60 সে. মি., 48 সে. মি. ও 36 সে. মি. ; 8. 200 ব.মি., 14·1 মি. ;
9. 1216, 24320 টাকা ; 10. 22 টাকা 50 ন. প.

প্রশ্নমালা 2 (পৃঃ 177—178)

1. 96 ব. সে. মি. ; 2. 1·75 ব. মি. ; 3. 16·7 মি. ;
4. 140 মি. ; 5. 15 মি., 21 মি. ; 6. 133·65 ব. মি. ;
7. 864 ব. মি. ; 8. 150 ব. মি., 12·8 মি. ;
9. 7260 টাকা ; 10. 336 ব.মি. ; 11. 588 ব. সে.মি. ;
12. 625 ব.মি. ; 13. 62 35 ব.মি. ; 14. 1330 18 ব.মি. ;
15. 5780 ব.মি. ; 16. 2·6 মি. (আসন্ন) ।

প্রশ্নমালা 3 (পৃঃ 182—183)

1. (i) 88 সে.মি., (ii) 6·16 মি., (iii) 220 মি.,
2. (i) 28 মি , (ii) 14 মি., (iii) 1·12 মি.,
3. (i) 2464 ব.মি , (ii) 98·56 ব.মি.,
(iii) 962·5 ব.মি., (iv) 1·54 ব.মি. ;
4. (i) 14 সে.মি. ; (ii) 91 মি. ;
5. (i) 2464 ব.সে.মি. ; (ii) 86·625 ব.মি. ;
9. (i) 176 মি. ; (ii) 660 সে.মি. ;
7. ঘণ্টায় 21024 মিটার ; 8. 2 মি. ;
9. 396 টাকা ; 10. 2357 ব.মি. ; 11. 10·5 মি. ;
12. 144·57 মি. ; 13. 17·5 মি. ; 14. 88 মি. ও 44 মি. ;
15. 13 মি. ; 16. 3 টাকা ; 17. 28 মিটার ;
18. 504 বর্গ মিটার, 22 টাকা ।

প্রশ্নমালা 4 (পৃঃ 189—191)

1. 208 বর্গমিটার, 192 ঘনমিটার ; 2. 480 ঘন সে.মি. ;
3. 270 ঘন মি., 258 বর্গমি. ; 4. 150 বর্গ সে.মি. ;

5. 512 ঘন সে.মি. ; 6. 24 সে.মি., 18 সে.মি., 12 সে.মি. ;
7. 138 টা. 60 ন.প. ; 8. 5·9 সে.মি. ;
9. 830 10. 26880
11. 900 বর্গ সে. মি. ; 12. দৈর্ঘ্য = 12 মি., প্রস্থ = 8 মি. :
13. প্রস্থ = 12 মি., উচ্চতা = 20 মি. ;
14. 9 সে.মি. ; 15. 300 ঘন মি. 16. 9 সে.মি. ।

প্রশ্নমালা 5 (পৃঃ 193—194)

1. (i) 1106·3 বর্গ সে.মি. ; 2816 ঘন সে.মি. ,
   (ii) 377·14 বর্গ সে.মি. ; 550 ঘন সে.মি. ;
   (iii) 33·44 বর্গ মি. ; 4·12 ঘন মি. ;
   (iv) 584·57 বর্গ মি. ; 792 ঘন মি. ;
2. (i) 3 সে.মি., (ii) 10 মি., (iii) 5 মি. ;
3. 1200 বর্গ মি., 230 ঘন মি. ;
4. 14·9 সে.মি. (প্রায়), 5000 ঘন সে.মি. ;
5. 237600 বর্গ মি. ; 6. 17·8 মি. ; 7. 64 সে.মি. ;
8. 1232 ঘন মি. ; 9. 1 : 2 ; 10. 30800 টাকা ;
11. 792 টাকা ; 12. 2454 টাকা 80 ন.প. ।

প্রশ্নমালা 6 (পৃঃ 198)

1. (i) 2464 বর্গ সে.মি., 11498·67 ঘন সে.মি. ;
   (ii) 1018·3 বর্গ মি., 3054·9 ঘন মি. ;
   (iii) 39424 বর্গ সে.মি., 735914·67 ঘন সে.মি. ;
   (iv) 7527 বর্গ মি., 60216 ঘন মি. ;
2. 7 সে.মি. ; 3. 84 সে.মি. ; 4. 512 ;
5. 917 টা. 71 ন.প. ; 6. 44 টাকা ; 7. 277·5 কি.গ্রা. ;
8. 12 সে.মি. ; 9. 3 সে.মি. ; 10. 6 সে.মি. ;
11. 2772 বর্গ সে.মি. ; 12. 32 মি.মি. (প্রায়) ; 13. 2 : 3. ;
14. $282\frac{6}{7}$ ঘন মিটার ; 15. 4 সে. মি. ।